AULA 01

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (I)

SEQUÊNCIAS

Denomina-se sequência de números reais a qualquer função $f: N^* \to \Re$.

Representamos uma sequência por: $(a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ..)$, onde os números naturais que servem de índice representam as posições de cada elemento da sequência. Assim, na sequência (2, 5, 7, 12) de quatro termos, temos:
$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$ e $a_4 = 12$

Termo Geral de uma Sequência

Algumas sequências podem ser expressas por meio de uma "lei" que define cada elemento. Isso nos permite obter um termo qualquer de uma sequência a partir de uma expressão matemática. Essa expressão é denominada **termo geral da sequência.**

Exercício Resolvido

1) Considere a sequência dada pelo termo geral $a_n = 2 + 3n$ ($n \in N^*$). Determine os primeiros dessa sequência.

$n = 1 \Rightarrow 2 + 3.1 \Rightarrow a_1 = 5$
$n = 2 \Rightarrow 2 + 3.2 \Rightarrow a_2 = 8$
$n = 3 \Rightarrow 2 + 3.3 \Rightarrow a_3 = 11$
:
:
(5, 8, 11, ...)

Algumas sequências não possuem lei de formação, porém elas podem ser expressas por uma propriedade comum a todos os elementos da sequência. Por exemplo, a sequência dos números primos.
(2, 3, 5, 7, 11, 13,...)

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

1. Conceitos Iniciais

Considere a sequência (a_n) onde $a_n = 5n + 1$, sendo **n** inteiro positivo. Temos:
$a_1 = 6$, $a_2 = 11$, $a_3 = 16$, $a_4 = 21$ e assim por diante.
(6, 11, 16, 21, ...). Veja que a diferença entre cada termo e seu antecessor mantém-se igual a 5. Sequências como esta são denominadas progressões aritméticas.

2. Definição

Chama-se progressão aritmética uma sequência em que, a partir do segundo elemento, a diferença entre cada elemento e seu antecessor é constante. Essa constante é denominada razão da P.A. e é indicada por r.
$\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = r}$

Veja os exemplos:
a) a sequência (2, 5, 8, ...) é uma P.A., pois $5 - 2 = 8 - 5$. Sua razão é igual a 3.
b) a sequência (1, 4, 5, ...) não é P.A., pois $4 - 1 \neq 5 - 4$.

Exercício Resolvido

Dada a sequência x – 1, x + 3 e 2x + 5. Calcule o valor de x para que esses termos estejam em P.A.

Resolução: $\begin{cases} a_1 = x - 1 \\ a_2 = x + 3 \\ a_3 = 2x + 5 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \\ x + 3 - (x - 1) = 2x + 5 - (x + 3) \\ 4 = x + 2 \to x = 2 \end{array}$

3. Classificação da P.A.

Uma P.A. pode ser classificada de acordo com valor da razão. Observe o quadro abaixo:

- **r > 0** $\Leftrightarrow$ P.A. crescente Ex.: (2, 5, 8, 11, 14) r =3
- **r < 0** $\Leftrightarrow$ P.A. decrescente Ex.:(10, 7, 4, 1, -2) r = –3
- **r = 0** $\Leftrightarrow$ P.A. constante Ex.:(5, 5, 5, 5, 5) r = 0

4. Fórmula do Termo Geral da P.A.

Considere a sequência (a_1, a_2, a_3....a_n). Acompanhe o desenvolvimento:

$a_2 = \mathbf{a_1 + r}$
$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = \mathbf{a_1 + 2r}$
$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = \mathbf{a_1 + 3r}$
: : :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1).r}$$

Importante:

Sejam a_n e a_k dois termos quaisquer de uma P.A. Utilizando a fórmula do termo geral, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r$ (I)
$a_k = a_1 + (k - 1)r$ (II)
Fazendo (II) – (I), vem:
$a_n - a_k = (n - 1)r - (k - 1)r$
$a_n - a_k = (n - 1 - k + 1)\ r$
$a_n = a_k + (n - k)r$
Então, para dois termos quaisquer a_n e a_k, podemos escrever:

$$\boxed{a_n = a_k + (n - k).r}$$

Exemplos: $a_{15} = a_2 + 13r$; $a_{22} = a_{20} + 2r$; $a_7 = a_3 + 4r$

Exercícios Resolvidos

1) Em uma P.A. sabe-se que o primeiro termo vale 2 e o sexto termo vale 17. Calcule a razão dessa P.A.

Resolução: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_6 = 17 \\ r = ? \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1).r \\ 17 = 2 + (6-1).r \\ 15 = 5r \rightarrow r = 3 \end{array}$

2) Quantos termos tem a P.A. (– 5, –1, ..., 19)

Resolução: $\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_n = 19 \\ r = a_2 - a_1 = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1).r \\ 19 = -5 + (n-1).4 \\ 24 = 4n - 4 \rightarrow n = 7 \end{array}$

5. Representações Especiais

A fim de facilitar a resolução de alguns problemas em P.A. podemos utilizar os seguintes artifícios:

- Três termos em P.A de razão r = k.
  x – k . x . x + k
- Quatro termos em P.A de razão r = 2k
  x – 3k . x – k . x + k . x + 3k
- Cinco termos em P.A. de razão r = k
  x – 2k . x – k . x . x + k . x + 2k

6. Propriedades da P.A.

6.1.Média Aritmética

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ..)$, um termo qualquer excetuando os extremos é a média aritmética entre o termo anterior e o posterior, ou seja:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Exemplo: (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23) $\rightarrow \quad 11 = \dfrac{8+14}{2}$

6.2.Termos Equidistantes

Em uma P.A. limitada $(a_1, a_2, a_3, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, a soma dos termos extremos é igual a soma dos termos equidistantes dos extremos, ou seja:

$$\boxed{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...}$$

Observação: Seja uma P.A. com **n** termos. Se dois termos a_p e a_q são equidistantes dos extremos tem-se: **p + q = n + 1**

Com essa igualdade é possível saber se dois termos quaisquer são equidistantes dos extremos ou não. Por exemplo, numa sequência de 40 termos, a_{16} e a_{25} são equidistantes dos extremos, pois 16 + 25 = 40 + 1.

7. Interpolação Aritmética

Interpolar, inserir ou intercalar **m** meios aritméticos entre *a* e *b* significa formar uma P.A. de extremos *a* e *b* com **m + 2** elementos.
Para determinarmos os meios aritméticos, devemos calcular a razão da P.A.

Exemplo: Quantos termos devem ser interpolados entre 3 e 23 de modo que a razão seja igual a 5.

Resolução: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 23 \\ r = 5 \\ n - 2 = ? \end{cases}$ $\quad \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1).r \\ 23 = 3 + (n-1).5 \\ 20 = 5n - 5 \rightarrow n = 5 \end{array}$

Excetuando os extremos, devemos interpolar três termos.

Exercícios

01) A sequência (19 – 6x, 2 + 4x, 1 + 6x) são termos consecutivos de uma P.A. Então o valor de x é:

02) Dada a sequência $(4x - 1,\ 3x + 6,\ 6x + 1)$. Calcule o valor de x para que esses termos estejam em P.A.

03) Determine o 10º termo de uma progressão aritmética, sabendo que o primeiro termo é 2017 e a razão é 7.

04) A sequência $(11, a, 29, b, 47)$, é uma progressão aritmética, então a soma $a + b$ é igual a

a) 49.
b) 58.
c) 67.
d) 76.
e) 85.

05) Numa progressão aritmética de razão 3, o sexto termo vale 54. O septuagésimo sexto termo dessa sequência é o número

a) 284.
b) 264.
c) 318.
d) 162.
e) 228.

06) Assinale V para as alternativas Verdadeiras e F para as alternativas Falsas.

a) ( ) (UFSC – SC) Existem 64 múltiplos de 7 entre 50 e 500.
b) ( ) (UFSC – SC) O vigésimo termo da progressão aritmética (x, $x + 10$, x^2, ...) com $x < 0$ é 186.
c) ( ) (UFSC – SC) Uma avenida em linha reta possui 20 placas de sinalização igualmente espaçadas. A distância entre a sétima e a décima placa é 1.200 metros. A distância entre a primeira e a última placa é 7.600 metros.
d) ( ) (UFSC – SC) Se três números inteiros positivos não-nulos formam uma progressão aritmética, e a soma deles é igual a 36, então o valor máximo que o maior desses números pode ter é 24.
e) ( ) O perímetro de um triângulo retângulo mede 60m. Sabendo que seus lados estão em P.A., o valor da hipotenusa, é 25

07) A quantidade de números inteiros entre 50 e 200 que sejam múltiplos dos números 2 e 3 ao mesmo tempo é:

a) 31.
b) 14.
c) 15.
d) 25.
e) 27.

08) Numa progressão aritmética crescente de 3 termos a soma deles é 18 e o produto é 192. Dessa forma, o maior termo dessa sequência é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

09) Quantos múltiplos de 3 e 7 existem entre 100 e 900?

10) Em uma P.A, a soma do terceiro com o oitavo termo é 74 e a soma do quinto termo com o décimo segundo termo é 110. Determine o valor da razão dessa P.A.

11) Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. A sequência (3m; m + 1; 5) é uma progressão aritmética. Sua razão é 7.
02. Usando cubos, podemos fazer as seguintes construções: Na primeira, usamos 1 cubo; na segunda, 6 cubos, e na terceira, 11 cubos. O número de cubos que usaremos na décima construção é 46.
04. Se o quarto e o nono termos de uma P.A. são respectivamente, 8 e 13, então a razão da progressão é 1.
08. O 24º termo da P.A. $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, \ldots\right)$ é 35.
16. O perímetro de um triângulo retângulo é 6. As medidas dos lados estão em P.A. A área do triângulo é 20.
32. Entre 20 e 1200 existem 169 múltiplos de 7.

12) (UDESC – SC) Sejam x, y, z números reais tais que a sequência $\left(x, 1, y, \frac{1}{4}, z\right)$ forma, nesta ordem, uma progressão aritmética, então o valor de x + y + z é

a) $-\frac{3}{8}$
b) $\frac{15}{8}$
c) $\frac{21}{8}$
d) 2
e) $-\frac{19}{8}$

13) (UFRGS – RS) O quociente entre o último e o primeiro termos de uma sequência de números é 1000. Os logaritmos decimais dos termos dessa sequência formam uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.
Então, o número de termos da sequência é

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

GABARITO – AULA 01

1) 2	**2)** 3	**3)** 2080	**4)** b	**5)** b
6) V, V, V, F, V		**7)** d	**8)** e	
9) 38	**10)** 6	**11)** 47	**12)** b	**13)** e

AULA 02

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (II)

Soma dos Termos da P.A.

Considere a P.A. $(a_1, a_2, ,....,a_{n-1}, a_n)$. A soma de todos os termos dessa progressão, que indicaremos por S_n pode ser obtida assim:

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$ (I) ou

$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$ (II)

Fazendo (I) + (II), vem:

$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Como as *n* parcelas possuem o mesmo valor podemos escrever:

$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_1) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$

$2.S_n = (a_1 + a_n).n$

Logo: $\boxed{S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2}}$

Exercícios Resolvidos

1) Determinar a soma dos 6 primeiros termos da P.A. (2, 4, ...).

Resolução:

$$\begin{cases} a_1 = 2 & a_n = a_1 + (n-1).r & S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2} \\ r = 2 & a_6 = 2 + (6-1).2 & S_6 = (a_1 + a_6).\frac{6}{2} \\ S_6 = ? & a_6 = 12 & S_6 = (2+12).3 \\ & & \therefore S_6 = 42 \end{cases}$$

2) Se a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética (PA) de termo geral a_n, com $n \geq 1$, é dada por $S_n = \frac{15n - n^2}{4}$, então o vigésimo termo dessa PA é:

Resolução:

O vigésimo termo da progressão aritmética é dado por

$$\begin{aligned} S_{20} - S_{19} &= \frac{15 \cdot 20 - 20^2}{4} - \frac{15 \cdot 19 - 19^2}{4} \\ &= \frac{15 + (19-20) \cdot (19+20)}{4} \\ &= \frac{15 - 39}{4} \\ &= -6. \end{aligned}$$

Exercícios

01) Determine a soma dos 10 primeiros termos da P.A. $(2,5,8,...)$.

02) (PUC – RS) Devido à epidemia de gripe do último inverno, foram suspensos alguns concertos em lugares fechados. Uma alternativa foi realizar espetáculos em lugares abertos, como parques ou praças. Para uma apresentação, precisou-se compor uma platéia com oito filas, de tal forma que na primeira fila houvesse 10 cadeiras; na segunda, 14 cadeiras; na terceira, 18 cadeiras; e assim por diante. O total de cadeiras foi:

a) 384
b) 192
c) 168
d) 92
e) 80

03) (UFSC – SC) Marque no cartão resposta a ÚNICA proposição correta. A soma dos múltiplos de 10, compreendidos entre 1e1995, é

01. 198.000
02. 19.950
04. 199.000
08. 1.991.010
16. 19.900

04) Assinale V para as Verdadeiras e F para as Falsas.

a) (   ) (UFSC – SC) A soma dos números ímpares de *27* a *75* é *1173*.

b) (   ) (UFSC – SC) A soma dos n primeiros números naturais ímpares é $n^2 + 1$.

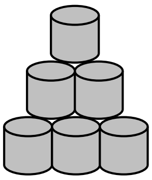
c) (   ) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada pela expressão $.S_n = n^2 - 2n$, então o seu terceiro termo é 7.

05) (UFRGS – RS) A sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...,a_{12}) forma uma progressão aritmética. Sabendo-se que $a_3 + a_{10} = 32$, o valor da expressão $\log_2(a_1 + a_{12})^3$ é:

a) 10
b) 15
c) 21
d) 26
e) 32

06) (ACAFE – SC) Um funcionário de um supermercado dispõe as latas de um produto em pilhas triangulares completas, com uma lata na primeira fileira, duas na segunda, três na terceira, e assim por diante. Forma assim uma pilha triangular completa, com 120 latas. O número de fileiras dessa pilha será:

a) 10
b) 12
c) 20
d) 15
e) 8



07) (UDESC – SC) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada pela expressão $S_n = 93n - 4n^2$, então a sua razão e o seu terceiro termo são iguais, respectivamente, a:
a) -8 e 73
b) 8 e 105
c) -8 e 243
d) 8 e 81
e) 81 e 251

08) Determine a soma dos 100 primeiros números naturais ímpares.

09) (ACAFE-SC) Um cinema possui 20 poltronas na primeira fila, 24 poltronas na segunda fila, 28 na terceira fila, 32 na quarta fila e as demais fileiras se compõe na mesma sequência. Quantas filas são necessárias para o cinema ter 800 lugares?
a) 13
b) 14
c) 15
d) 16
e) 17

10) Numa cerimônia de formatura de uma faculdade, os formandos foram dispostos em 20 filas de modo a formar um triângulo, com 1 formando na primeira fila, 3 formandos na segunda, 5 na terceira e assim por diante, constituindo uma progressão aritmética. O número de formandos na cerimônia é:
a) 400
b) 410
c) 420
d) 800
e) 840

11) (UFRGS – RS) Denominando P a soma dos números pares de 1 a 100 e I a soma dos números ímpares de 1 a 100, P – I é:
a) 49
b) 50
c) 51
d) 52
e) 53

12) (PUC – RS) Observe a sequência representada no triângulo abaixo:

1
4 7 10
13 16 19 22 25
28 31 34 37 40 43 46
....

Na sequência, o primeiro elemento da décima linha será
a) 19
b) 28
c) 241
d) 244
e) 247

13) Determine o valor de x em:
$x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + 20^3$.

GABARITO – AULA 02

1) 155 **2)** b **3)** 04 **4)** F, F, F **5)** b
6) d **7)** a **8)** 10000 **9)** d **10)** a **11)** b
12) d **13)** 44100

AULA 03

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (I)

1. Definição

Denomina-se progressão geométrica uma sequência de números não nulos em que, a partir do segundo elemento, o quociente entre cada elemento e seu antecessor é constante. Essa constante é denominada razão da P.G. e é indicada por **q**.

$$\boxed{\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\ldots=q}$$

2. Classificação da P.G.

1º caso: $a_1 > 0$

Se **q > 0** → P.G. crescente. Ex.: (2, 6, 18, 54,...)
Se **q = 1** → P.G. constante Ex.: (5, 5, 5, 5,...)
Se **0 < q < 1** → P.G. decrescente Ex.: (256, 64, 16,...)

2º caso: $a_1 < 0$

Se **q > 0** → P.G. decrescente Ex.: (-2, -10, -50,..)
Se **q = 1** → P.G. constante Ex.: (-3, -3, -3,...)
Se 0 < q < 1 → P.G. crescente Ex.: (- 40, -20, -10,...)

Observação: São denominadas P.G. alternantes ou oscilantes aquelas em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso ocorre quando a razão for negativa.

3. Termo Geral

Considere a sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_n). Acompanhe o desenvolvimento:

$a_2 = a_1.q$
$a_3 = a_2.q = a_1.q.q = a_1.q^2$
$a_4 = a_3.q = a_1.q^2.q = a_1.q^3$
.
.

$$\boxed{a_n = a_1.q^{n-1}}$$

Importante:

Assim, como na P.A., podemos relacionar dois termos quaisquer de uma P.G. Observe:

$$\begin{cases} a_n = a_1.q^{n-1} & \text{(I)} \\ a_m = a_1.q^{m-1} & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) ÷ (II), vem:

$$\frac{a_n}{a_m}=\frac{a_1.q^{n-1}}{a_1.q^{m-1}}$$
$$a_n = a_m.q^{n-1-(m-1)}$$

$$\boxed{a_m = a_k.q^{m-k}}$$

Exemplo: $a_8 = a_3.q^5$; $a_{13} = a_3.q^{10}$; $a_{20} = a_{13}.q^7$

Exercícios Resolvidos

1) Quantos termos tem a P.G. (3, 9, ..., 243).

Resolução: $\begin{cases} a_1 = 3 & a_n = a_1.q^{n-1} \\ q = \frac{9}{3} = 3 & 243 = 3.3^{n-1} \\ a_n = 243 & 3^5 = 3^n \to n = 5 \end{cases}$

2) Numa P.G crescente o 4º termo vale 81 e o 2º vale 9. Ache a razão.

Resolução: $\begin{cases} a_4 = 81 & a_m = a_n.q^{m-n} \\ a_2 = 9 & a_4 = a_2.q^2 \end{cases}$

$81 = 9.q^2$

$9 = q^2 \to q = \pm 3$

Como a P.G é crescente temos: q = 3

4. Representações Especiais

A fim de facilitar a resolução de alguns problemas em P.G. podemos utilizar os seguintes artifícios:

- Três termos em P.G de razão q = k.

$$\boxed{\frac{x}{k}, x, xk}$$

- Quatro termos em P.G de razão $q = k^2$.

$$\boxed{\frac{x}{k^3}, \frac{x}{k}, xk, xk^3}$$

- Cinco termos em P.G de razão q = k.

$$\boxed{\frac{x}{k^2}, \frac{x}{k}, x, xk, xk^2}$$

5. Propriedades

5.1. Média Geométrica

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ..)$ um termo qualquer excetuando os extremos é a média geométrica entre o termo anterior e o posterior, ou seja:

$$\boxed{a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

5.2.Termos Equidistantes

Em uma P.G. limitada $(a_1, a_2, a_3, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, o produto dos termos extremos é igual ao produto dos termos equidistantes dos extremos, ou seja:

$$\boxed{a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ...}$$

6. Interpolação Geométrica

Interpolar, inserir ou intercalar **m** meios geométricos entre *a* e *b* significa formar uma P.G. de extremos *a* e *b* com **m + 2** elementos.
Para determinarmos os meios aritméticos, devemos calcular a razão da P.G.

Exercícios

01) Sabe-se que os números $20 + x$, $50 + x$ e $100 + x$, nesta ordem formam uma progressão geométrica. Determine o valor de x.

02) (ACAFE – SC) Uma mercadoria que hoje é vendida por 3x + 1 reais era vendida há 18 meses atrás por x - 1 reais. Há 9 meses seu preço era x + 3 reais. Sabendo que esses três valores em sequência cronológica formam uma PG, é correto afirmar que a razão dessa PG é:

a) 16
b) 5
c) -1
d) 2

03) Determine o sexto termo da P.G $(3, 6, ...)$ é:

04) Numa P.G. de seis termos, o primeiro termo é 2 e o último é 486. Calcular a razão dessa P.G.

05) Determine o número de termos da progressão geométrica $(3, 6, 12, ..., 768)$

06) (UEL – PR) A sequência (2x + 5, x + 1, $\frac{x}{2}$, ...) é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo dessa sequência é:

a) 2
b) 3^{-10}
c) 3
d) 3^{10}
e) 3^{12}

07) (UFSC – SC) Numa P.G. de 6 termos a razão é 5. O produto do 1º termo com o último é 12500. Determine o valor do 3º termo. Obs.: Considere a P.G. de termos positivos.

08) Um artigo custa hoje R$ 100,00 e seu preço é aumentado, mensalmente, em 12% sobre o preço anterior. Se fizermos uma tabela de preços desse artigo mês a mês, obteremos uma progressão:

a) aritmética de razão 12
b) aritmética de razão 0,12
c) geométrica de razão 12
d) geométrica de razão 1,12
e) geométrica de razão 0,12

09) (UEPG – PR) Entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{20}$ são inseridos três meios geométricos. Se a P.G. formada é oscilante, assinale o que for correto.

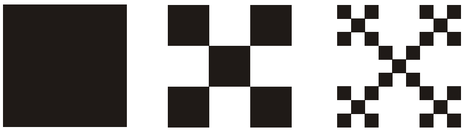
01. A sua razão é um número negativo.
02. O termo médio é um número positivo.
04. $\frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4}$.
08. $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{5}$.
16. $a_4 < 0$.

10) (UFES-ES) Qual a razão de uma P.G. de três termos, onde a soma de seus termos é 14 e o produto 64?

a) 4
b) 2
c) 2 ou 1/2
d) 4 ou 1

11) (UFSC – SC) Em uma progressão geométrica o 3º termo é $\frac{16}{9}$ e o 7º termo é 144. Determine o 5º termo.

12) (UFRGS – RS) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Na etapa 1, há único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é

a) $\frac{125}{729}$.
b) $\frac{125}{2187}$.
c) $\frac{625}{729}$.
d) $\frac{625}{2187}$.
e) $\frac{625}{6561}$.

13) (UFF – RJ) A população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente há cinqüenta anos (em 1953). Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior) com que essa população decresceu durante esse período, conclui-se que a população de marlim-azul, ao final dos primeiros vinte e cinco anos (em 1978), ficou reduzida a aproximadamente:

a) 10% da população existente em 1953
b) 20% da população existente em 1953
c) 30% da população existente em 1953
d) 45% da população existente em 1953
e) 65% da população existente em 1953

14) (UDESC – SC) Se os números reais *x*, *y* e *z* formarem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão 10^x, pode-se afirmar que log(*xyz*) é igual a:

a) log(3*x*)+ 3log(*x*)
b) 3*x*+ log(3*x*)
c) 3*x*+ 3log(*x*)
d) x^3+ log(x^3)
e) x^3 + log(3*x*)

GABARITO – AULA 03

1) 25	**2)** d	**3)** 96	**4)** 3	**5)** 9	
6) b	**7)** 50	**8)** d	**9)** 31	**10)** c	**11)** 16
12) e	**13)** d	**14)** c			

AULA 04

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (II)

1. Soma dos termos de uma P.G. finita.

Sendo $(a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1}, a_n)$ uma P.G de razão q ≠ 1.
A soma dos "n" primeiros termos dessa P.G. é dada pela expressão:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n.q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}$$

Vamos à demonstração dessa fórmula:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros por q, temos:

$$S_n.q = a_1.q + a_2.q + a_3.q + ...+ a_{n-1}.q + a_n.q$$

$$S_n.q = \underbrace{a_2 + a_3 + ...+ a_{n-1} + a_n}_{S_n - a_1} + a_n.q$$

$$S_n.q = S_n - a_1 + a_n.q$$

$$S_n.q - S_n = a_n.q - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_n.q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n.q - a_1}{q-1} = \frac{a_1.q^{n-1}.q - a_1}{q-1} = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$$

Exercícios Resolvidos

1) Determine a soma dos 6 primeiros termos da P.G. (1, 3, 9,...)

Resolução: $\begin{cases} a_1 = 1 & S_n = \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1} \\ q = \dfrac{3}{1} = 3 & S_6 = \dfrac{1(3^6-1)}{3-1} = \dfrac{728}{2} = 364 \end{cases}$

Resposta: 364

2) Determine o valor de **n** de modo que a soma dos **n** primeiros termos da P.G.(1, 5, 25, ...) seja 19531.

Resolução: $\begin{cases} a_1 = 1 & S_n = \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1} \\ q = \dfrac{5}{1} = 5 & 19531 = \dfrac{1.(5^n-1)}{5-1} \\ S_n = 19531 & 78124 = 5^n - 1 \end{cases}$

$$78125 = 5^n$$

$$5^7 = 5^n \rightarrow n = 7$$

Resposta: n = 7

2. Soma dos termos de uma P.G. infinita.

Dada uma P.G. de razão q de modo que $-1 < q < 1$. A soma dos infinitos termos dessa P.G. é dada por:

$$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-q}} \qquad -1 < q < 1$$

Justificativa: Sempre que a razão da P.G. estiver compreendida entre –1 e 1 ($-1 < q < 1$), a expressão q^n se aproxima de zero à medida que o número de termos da sequência tende ao infinito.

Para $-1 < q < 1 \rightarrow \underbrace{\lim}_{n\to+\infty}(q^n) = 0$

$$S_\infty = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Exercícios Resolvidos

1) Calcular a soma dos termos da P.G. $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots)$

Resolução:

$$\begin{cases} a_1 = 1 & S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q} \\ q = \dfrac{1/4}{1} = \dfrac{1}{4} & S_\infty = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ -1 < q < 1 & S_\infty = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Resposta: $\frac{4}{3}$

2) Determine a fração geratriz da dízima 0,222...

Resolução: Observe que a dízima periódica 0,222... pode ser escrita como a soma de infinitos decimais exatos:

$$0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots$$
$$\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{10} & S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q} \\ q = \dfrac{2/100}{2/10} = \dfrac{1}{10} & S_\infty = \dfrac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} \\ -1 < q < 1 & S_\infty = \dfrac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Então: $0{,}222\ldots = \frac{2}{9}$

Resposta: $\frac{2}{9}$

Exercícios

01) Determine a soma dos 10 primeiros termos da P.G. $(1, 2, 4, \ldots)$

02) (FURG – RS) Desde o início do mês de dezembro está sendo realizada a campanha de arrecadação de brinquedos para serem distribuídos a crianças carentes na festa de Natal. Supondo que um posto de coleta recebeu 1 brinquedo no primeiro dia da campanha, 5, no segundo dia, 25, no terceiro dia e, assim por diante, seguindo uma progressão geométrica. Ao final de quantos dias, o posto terá arrecadado o total de 19.531 brinquedos?

a) 7
b) 5
c) 13
d) 11
e) 9

03) Determine a soma dos termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \ldots\right)$

04) (PUC – PR) O valor de x na equação $x + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}x + \ldots\ldots = 8$ é:

a) 6
b) 4
c) 2
d) 1
e) 3/4

05) (ACAFE - SC) A soma dos oito primeiros termos da P.G. (16, 8, 4, ...) é:

a) $\frac{255}{256}$
b) $\frac{-255}{256}$
c) $\frac{255}{8}$
d) $\frac{255}{16}$
e) $\frac{-255}{16}$

06) (UEPG – PR) Em relação à progressão geométrica infinita $\left(a_1, \frac{3}{2}, a_3, a_4, \frac{81}{128}, \ldots\right)$ assinale o que for correto.

01. A soma dos termos da P.G vale 8
02. $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3$
04. $a_1 = 2$
08. A razão da P.G. é $\frac{3}{4}$

07) (UFCE – CE) A solução da equação $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\frac{x}{27}+\ldots=60$ é:

a) 37
b) 40
c) 44
d) 50
e) 51

08) Determine a soma dos 6 primeiros termos da P.G. $(3,6,12,\ldots)$

09) (UEL – PR) Você tem um dinheiro a receber em pagamentos mensais. Se você recebesse R$ 100,00 no primeiro pagamento e, a partir do segundo pagamento, você recebesse R$ 150,00 a mais do que no pagamento anterior, receberia todo o dinheiro em 9 pagamentos. Porém, se o valor do primeiro pagamento fosse mantido, mas, a partir do segundo pagamento, você recebesse o dobro do que recebeu no mês anterior, em quantos pagamentos receberia todo o dinheiro?

a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

10) Determine a soma dos termos da P.G. $\left(5,\frac{5}{2},\frac{5}{4}\ldots\right)$

11) (UEL-PR) O valor da soma infinita $\frac{3}{4}-\frac{4}{9}+\frac{9}{16}-\frac{8}{27}+\frac{27}{64}-\frac{16}{81}+\ldots$ é:
a) 2/3
b) 5/6
c) 7/6
d) 5/3
e) 7/3

12) A soma dos termos da P.G. (2, 6, ..., 486) é:

a) 567
b) 670
c) 728
d) 120
e) n.d.a.

13) (ACAFE – SC) Em um pomar são colhidas semanalmente apenas as frutas que já estão maduras. Dessa maneira, o dono do pomar percebeu que na primeira semana fora colhido 1000 kg e que, a cada semana, havia uma queda de 5% na colheita em relação à semana anterior. Sobre a quantidade máxima de frutas que podem ser colhidas nesse pomar, é correto afirmar:
a) Está entre 20 e 25 toneladas.
b) É menor que 20 toneladas.
c) É igual a 20 toneladas.
d) É maior que 25 toneladas.

14) (ACAFE – SC) A sequência numérica 0, 1, 2, 3, 4, 9, 6, 27, 8 (...) possui 40 termos. A soma destes 40 termos é igual a:
a) 2179240250
b) 1743392580
c) 2397164275
d) 1917731420

15) (UFPEL) Uma criança deixa cair, verticalmente, da janela de seu apartamento, uma bola de ping-pong. A janela está 4 metros acima do solo. Se não sofrer nenhuma interferência, a bola a cada batida no chão, sobe novamente a uma altura que corresponde a 60% da anterior. Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que, quando cessar o movimento, a bola terá percorrido uma distância de
a) 20 metros.
b) 10 metros.
c) 16 metros.
d) 6 metros.
e) 12 metros.

16) (UDESC – SC) Suponha que os termos da progressão geométrica infinita $\left(\sqrt{12},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{4},\ldots\right)$ sejam apótemas de hexágonos regulares. Sabendo que cada hexágono está inscrito em um círculo, então a soma das áreas destes círculos é:

a) $\frac{16\pi}{3}$
b) $\frac{32\pi}{3}$
c) $\frac{64\pi}{3}$
d) $12\,\pi$
e) $16\,\pi$

GABARITO – AULA 04

1) 1023	**2)** a	**3)** 2	**4)** c	**5)** c	**6)** 15
7) b	**8)** 195	**9)** b	**10)** 10	**11)** d	**12)** c
13) c	**14)** b	**15)** c	**16)** c		

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES RESOLVIDOS

1. (Unicamp 2020) Considere que $(a, b, 3, c)$ é uma progressão aritmética de números reais, e que a soma de seus elementos é igual a $8.$ O produto dos elementos dessa progressão é igual a
a) $30.$
b) $10.$
c) $-15.$
d) $-20.$

Resposta:

[C]

Seja r a razão da progressão aritmética, de tal sorte que

$$(a, b, 3, c) = (3-2r, 3-r, 3, 3+r).$$

Logo, como a soma de seus elementos é igual a $8,$ temos

$$3-2r+3-r+3+3+r=8 \Leftrightarrow r=2.$$

A resposta é $(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5=-15.$

2. (G1 - ifpe 2019) Clara está pensando em criar um lindo pomar. A ideia de Clara consiste em dispor suas árvores plantadas em forma de triângulo, havendo uma árvore na primeira fila, três árvores na segunda fila, cinco árvores na terceira fila, e, assim, sucessivamente. Imaginando que o projeto do pomar de Clara tem quarenta filas, quantas árvores haverá no pomar?
a) 1.200
b) 1.600
c) 3.200
d) 800
e) 2.600

Resposta:

[B]

A quantidade de árvores em cada fila do pomar de Clara foram uma PA de razão $2.$ Assim, pode-se calcular:

$$a_{40} = a_1 + (n-1)\cdot r = 1 + 39\cdot 2 \Rightarrow a_{40} = 79 \text{ árvores}$$

$$S_{40} = \frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2} = \frac{40\cdot(1+79)}{2} \Rightarrow S_{40} = 1600 \text{ árvores}$$

3. (G1 - ifal 2018) Determine o 2017^{o} termo da Progressão Aritmética cujo 1^{o} termo é 4 e cuja razão é $2.$
a) $4.032.$
b) $4.034.$
c) $4.036.$
d) $4.038.$
e) $4.040.$

Resposta:

[C]

Calculando:

$$a_{2017} = a_1 + 2016\times r$$
$$a_{2017} = 4 + 2016\times 2 = 4036$$

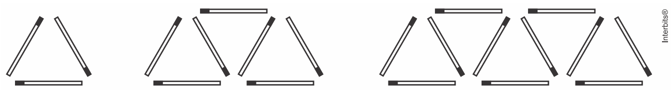
4. (Pucrj 2017) Os números $10, x, y, z, 70$ estão em progressão aritmética (nesta ordem). Quanto vale a soma $x+y+z$?
a) 80
b) 90
c) 100
d) 110
e) 120

Resposta:

[E]
Calculando:

$$PA = 10, x, y, z, 70$$
$$a_1 = 10$$
$$a_5 = a_1 + 4r = 70 \Rightarrow 10 + 4r = 70 \Rightarrow r = 15$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 10 + r = 25 \\ y = x + r = 40 \\ z = y + r = 55 \end{array}\right\rangle = x + y + z = 120$$

5. (Enem 2017) A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.



Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?
a) 30
b) 39
c) 40
d) 43
e) 57

Resposta:

[B]

O número de palitos em cada figura constitui uma progressão aritmética de primeiro termo 3 e razão $4.$ Portanto, o décimo termo da sequência possui $3+9\cdot 4=39$ palitos.

6. (G1 - ifal 2016) Em uma apresentação circense, forma-se uma pirâmide humana com uma pessoa no topo sustentada por duas outras que são sustentadas por mais três e assim sucessivamente. Quantas pessoas são necessárias para formar uma pirâmide com oito filas de pessoas, da base ao topo?
a) 8.
b) 16.
c) 28.
d) 36.
e) 45.

Resposta:

[D]

Utilizando os conceitos de progressão aritmética, pode-se escrever:

$a_1=1$

$a_2=2$

$r=1$

$a_8=1+(8-1)\cdot 1=1+7=8$

$S=\dfrac{(1+8)\cdot 8}{2}=36 \text{ pessoas}$

7. (Fmp 2019) Uma progressão geométrica tem o seu primeiro termo e sua razão iguais a $\dfrac{1}{2}.$

O quinto termo dessa progressão é uma fração que, se escrita em forma percentual, é dada por
a) $6,25\%$
b) $31,25\%$
c) $3,125\%$
d) 32%
e) $2,5\%$

Resposta:

[C]

Calculando:

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}=0,03125=3,125\%$

8. (Pucrs 2015) O resultado da adição indicada $0,001+0,000001+0,000000001+\ldots$ é
a) $\dfrac{1}{9}$
b) $\dfrac{1}{10}$
c) $\dfrac{1}{99}$
d) $\dfrac{1}{100}$
e) $\dfrac{1}{999}$

Resposta:

[E]
Lembrando que o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão $-1<q<1$ é dado por $\dfrac{a_1}{1-q},$ temos

$$\begin{aligned} 0,001+0,000001+0,000000001+\ldots &= 10^{-3}+10^{-6}+10^{-9}+\ldots \\ &= \frac{10^{-3}}{1-10^{-3}} \\ &= \frac{1}{10^3-1} \\ &= \frac{1}{999}. \end{aligned}$$

9. (Pucrj 2013) A sequência (2, *x*, *y*, 8) representa uma progressão geométrica. O produto *xy* vale:
a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 16

Resposta:

[E]
Sabendo que o produto de termos equidistantes dos extremos é igual a uma constante, temos que $x\cdot y=2\cdot 8=16.$

10. (Uesc 2011) Não sendo paga quantia alguma relativa a um empréstimo feito por uma pessoa, serão a ele incorporados juros compostos de $2,5\%$ a.m.
Assim, o montante desse empréstimo, considerado mês a mês, crescerá segundo uma progressão
a) aritmética de razão $0,25$.
b) geométrica de razão $1,025$.
c) aritmética de razão $1,205$.
d) geométrica de razão $10,25$.
e) aritmética de razão $12,05$.

Resposta:

[B]

Se C é o capital emprestado, n é o número de meses após a concessão e a taxa de juros é $2{,}5\% = 0{,}025$ a.m., segue que o montante é dado por $C \cdot (1+0{,}025)^n = C \cdot (1{,}025)^n$.
Portanto, o montante desse empréstimo, considerado mês a mês, crescerá segundo uma progressão geométrica de razão $1{,}025$.

11. (G1 - ifce 2019) Numa progressão geométrica, o segundo e o sétimo termos valem, respectivamente, 32 e 243.

Nessa progressão, o quarto termo é o número
a) 64.
b) 72.
c) 56.
d) 48.
e) 36.

Resposta:

[B]

Calculando a razão q da P.G., obtemos:

$$a_7 = a_2 \cdot q^5 \Rightarrow 243 = 32 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

O próximo passo será calcular o quarto termo:

$$a_4 = a_2 \cdot q^2 \Rightarrow a_4 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow a_4 = 72$$

12. (Uepg 2018) Sobre progressão aritmética e geométrica, assinale o que for correto.
01) Sendo $(3x-2,\ x-1,\ 2x+3)$ uma PA, então $x = -\frac{3}{7}$.
02) Em uma PG, o 1º termo vale $\frac{3}{125}$, o último termo vale 1875 e a razão é 5. Então, essa PG tem 8 termos.
04) A equação $x + 4x + 16x + \ldots + 1.024x = 1.365$ tem como solução $x = 1$.
08) Em uma PA, o 5º termo vale 10 e o 10º termo vale 5. Então o 1º termo é 14 e a razão é -1.

Resposta:

02 + 04 + 08 = 14.

[01] INCORRETA. Calculando:
$$(3x-2,\ x-1,\ 2x+3)$$
$$x-1-(3x-2) = 2x+3-(x-1) \Rightarrow$$
$$x-1-3x+2 = 2x+3-x+1 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$$

[02] CORRETA. Calculando:
$$n-1 = x$$
$$1875 = \frac{3}{125} \cdot 5^x \Rightarrow 3 \cdot 5^4 = \frac{3}{5^3} \cdot 5^x \Rightarrow 5^x = 5^7 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow n = 8$$

[04] CORRETA. Calculando:
$$x + 4x + 16x + \ldots + 1.024x = 1.365$$
$$PG \Rightarrow 1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256,\ 1024 \Rightarrow S_6 = 1365$$

[08] CORRETA.
$$\begin{cases} 10 = a_1 + (5-1) \cdot r \\ 5 = a_1 + (10-1) \cdot r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10 = -a_1 - 4r \\ 5 = a_1 + 9r \end{cases} \Rightarrow -5 = 5r \Rightarrow r = -1 \Rightarrow a_1 = 14$$

13. (G1 - ifsul 2015) Dada a equação $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \ldots = 16$, o valor de x que a satisfaz é
a) 12
b) 16
c) 24
d) 36

Resposta:

[A]

A equação é uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{4}$.
Sabe-se, pelo enunciado, que a soma de todos os termos dessa PG é 16, e que ela é infinita. Assim, pode-se escrever:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \to 16 = \frac{x}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4x}{3} \to 16 == \frac{4x}{3} \to x = 12$$