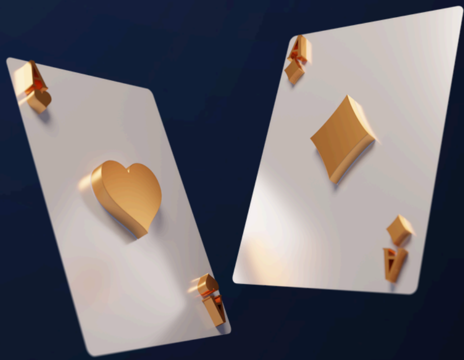
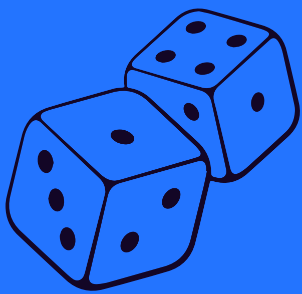
ANÁLISE COMBINATÓRIA

EBOOK INTERATIVO

Teoria + Exercícios + Vídeo Aulas



Análise Combinatória



Sumário

Professor Ricardinho

Clique na aula que deseja estudar

AULA 01

ANÁLISE COMBINATÓRIA FATORIAL

ASSISTA À VÍDEO AULA

Fatorial – Definição:

Seja **n** um número natural maior do que 1. O *fatorial* de **n**, indicado por **n!**, é definido como o produto dos **n** números naturais consecutivos de 1 até **n**, isto é,

$\boxed{n! = n(n-1).(n-2).\ ...\ .3.2.1 \text{ para } n \geq 2}$

Para **n** = 1 e **n** = 0 define-se $\boxed{\mathbf{n! = 1}}$

Acompanhe os exemplos:

a) 8! = 8.7.6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
b) 4! = 4. 3. 2. 1 = 24

Dica: Podemos desenvolver um fatorial até um fator conveniente. Observe:

$$\text{a)}\ 7! = 7.6.5.4.\underbrace{3.2.1}_{3!} = 7.6.5.4.3!$$

$$\text{b)}\ 8! = 8.7.6.\underbrace{5.4.3.2.1}_{5!} = 8.7.6.5!$$

$$\text{c)}\ 10! = 10.9.8!$$

$$\text{d)}\ n! = n(n-1).(n-2)!$$

Esse mecanismo de "pararmos" o desenvolvimento de um fatorial em um fator conveniente, permite o cálculo de expressões envolvendo fatorial em aulas posteriores, de forma menos trabalhosa.

EXERCÍCIOS

PROPOSTOS

Nível 1

1. Assinale V para as alternativas verdadeiras ou F para as alternativas falsas:

a) ( ) Sejam a e b dois números naturais positivos Nessas condições é sempre válida a expressão: a! + b! = (a + b)!

b) ( ) $\dfrac{10!}{6!} = 5040$

c) ( ) $\dfrac{12!}{11!} = 12$

d) ( ) $\dfrac{8!+7!}{7!} = 9$

2. Simplificando a expressão $\dfrac{15!+13!}{13!}$, obtém-se:

a) 210 b) 211 c) 212
d) 214 e) 215

3. Sendo $\dfrac{(m+1)m!}{(m+2)!} = \dfrac{1}{10}$ e tendo em vista que m > 0, o valor de m é um número:

a) primo
b) múltiplo de 3
c) múltiplo de 2
d) divisível por 5
e) divisível por 6

4. Resolvendo a equação $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n-1)!} = 7n$, encontramos n igual a:

a) 5
b) 4
c) 6
d) 7
e) 9

5. Se $\dfrac{x!(x+1)!}{(x-1)!x!} = 20$, então x vale:

a) –6
b) –5
c) 4
d) 5
e) 6

Nível 2

6. (UFPEL – RS) Os fatoriais são importantes em análise combinatória. Por exemplo, existem n! caminhos diferentes de arranjar n objetos distintos numa sequência. Esses arranjos são chamados permutações simples e número de permutações é dado pelo produto n(n – 1)(n – 2)...3.2.1 Utilizando essa teoria, o valor de n! na expressão **(n + 1) ! – 2n! = 6(n – 1)! é:**

a) 2
b) 3
c) 6
d) 1
e) 24

7. (ESPM) Para $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$, a expressão $\dfrac{(x^2-1)!.x!}{(x^2-2)!.(x+1)!}$ é equivalente a:

a) $x-2$
b) $(x-2)!$
c) $(x-1)!$
d) x
e) $x-1$

8. O produto 20.18.16.14. … .6.4.2 é equivalente a:

a) $\dfrac{20!}{2}$
b) $2 \cdot 10!$
c) $\dfrac{20!}{2^{10}}$
d) $2^{10} \cdot 10!$
e) $\dfrac{20!}{10!}$

Nível 3

9. (ITA – SP) A expansão decimal do número $100! = 100.99 \cdots 2.1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.
b) 21.
c) 22.
d) 23.
e) 24.

10. Qual é o algarismo das dezenas da soma finita $0!+1!+2!+3!+4!+\ldots+50!$?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Gabarito – Aula 01

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		*	A	C	D	C	C	E	D	E
1	A									

1. F, V, V, V

Ir para resoluções

AULA 02

ANÁLISE COMBINATÓRIA P.F.C (I)

ASSISTA À VÍDEO AULA

O Princípio Multiplicativo da contagem

Princípio Multiplicativo: "Se uma decisão d_1 pode ser tomada de **x** maneiras diferentes e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de **y** maneiras diferentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é dado pelo produto x.y"

Obs.: O Princípio Multiplicativo pode ser generalizado para mais de duas decisões.

Exemplo:

Numa sala existem 2 garotas (Adriana e Cleide) e 3 rapazes (Rodrigo, Saulo e Sandro). Quantos casais diferentes podemos formar com essas 5 pessoas?

Solução: Para formarmos um casal precisamos agrupar 1 homem e 1 mulher, isto é, precisamos tomar uma decisão 1 que consiste na escolha de um homem e tomar uma decisão 2, que consiste na escolha de uma mulher.
A decisão 1 pode ser tomada de 3 maneiras diferentes (existem 3 homens);

A decisão 2 pode ser tomada de 2 maneiras diferentes (existem 2 mulheres).

Logo, o número total de casais é 3.2 = 6.

EXERCÍCIOS

PROPOSTOS

Nível 1

1. (ESA) No Rancho de uma unidade militar há a opção de três pratos de proteína (frango, bife e ovo), três pratos de acompanhamento (farofa, arroz e macarrão) e dois pratos de sobremesa (doce de leite e gelatina). Os militares devem pegar apenas um item de cada prato. Desta forma, podem-se montar quantos tipos de refeições distintas?

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

2. (FAMENA) Camila vai escolher uma senha para sua primeira conta bancária. A senha será de seis campos, sendo que:

- os dois primeiros campos têm que ser símbolos, iguais ou distintos, do conjunto {#, &};
- os dois campos seguintes devem ser elementos do conjunto {a, b, A, B}, iguais ou distintos (note que aA constitui senha diferente de AA); e
- os dois últimos campos devem ser elementos do conjunto {0, 2, 4}, iguais ou distintos.

Sendo assim, o maior número de senhas diferentes que Camila poderá escolher é igual a

a) 144.
b) 288.
c) 576.
d) 524.
e) 432.

3. (UECE – CE) Quantos são os números inteiros positivos com três dígitos nos quais aparecem apenas os algarismos 1, 3 e 5, repetidos ou não, que são divisíveis por 5?

a) 6.
b) 15.
c) 9.
d) 12.

4. (EEAR) Utilizando os algarismos de 1 a 9, foram escritos números ímpares, de três algarismos distintos, de forma que nenhum deles termine com 1. A quantidade desses números é

a) 224
b) 264
c) 280
d) 320

5. (ENEM) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.
A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

Nível 2

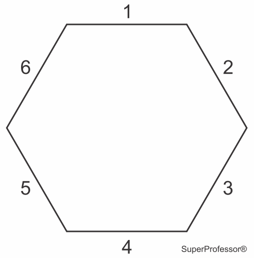
6. (ENEM) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet.
Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.
Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.
O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

a) $\dfrac{62^6}{10^6}$
b) $\dfrac{62!}{10!}$
c) $\dfrac{62!\,4!}{10!\,56!}$
d) $62! - 10!$
e) $62^6 - 10^6$

7. (UFRGS - RS) Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, a quantidade de números divisíveis por 5 que se pode obter é

a) 12
b) 14
c) 22
d) 24
e) 26

8. (UFPR-PR) Ana, Beatriz e Carlos escolhem lugares para se sentar em uma mesa hexagonal regular. Cada lugar corresponde a um dos lados do hexágono, que estão numerados de 1 a 6, conforme a figura ao lado. Os lados 1 e 4 são considerados lados opostos na mesa, assim como 2 e 5, e 3 e 6. De quantas formas diferentes Ana, Beatriz e Carlos podem escolher os lugares numerados de modo que nenhum deles fique sentado ao lado oposto do outro?



a) 48.
b) 36.
c) 24.
d) 12.
e) 8.

Nível 3

9. (UEM - PR) As senhas de acesso aos caixas eletrônicos de um banco são compostas por 3 pares ordenados de letras latinas maiúsculas e minúsculas. Em cada par, a primeira letra é maiúscula, a segunda letra é minúscula. Por exemplo, $Yy - Vu - Fd$ é uma senha enquanto $FG - rr - Km$ não é uma senha. Em relação ao exposto, considere as 26 letras do alfabeto latino e assinale o que for correto.

01. Há 26^6 senhas distintas.
02. Há apenas 125 senhas distintas compostas somente por vogais.
04. Há 21^6 senhas distintas nas quais, em cada par, a primeira letra é a letra A, e a segunda é uma consoante.
08. Há 105^3 senhas distintas nas quais, em cada par, a primeira letra é uma vogal, e a segunda é uma consoante.
16. Há 26^3 senhas distintas nas quais, em cada par, as letras são as mesmas, sendo a primeira maiúscula, e a segunda, minúscula.

10. (FUVEST - SP) Um aplicativo de videoconferências estabelece, para cada reunião, um código de 10 letras, usando um alfabeto completo de 26 letras. A quantidade de códigos distintos possíveis está entre

Note e adote:
$\log_{10} 13 \cong 1{,}114$

$1\,\text{bilhão} = 10^9$

a) 10 bilhões e 100 bilhões.
b) 100 bilhões e 1 trilhão.
c) 1 trilhão e 10 trilhões.
d) 10 trilhões e 100 trilhões.
e) 100 trilhões e 1 quatrilhão.

Gabarito – Aula 02

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		E	C	C	A	E	A	D	A	25
1	E									

Ir para resoluções

AULA 03

ANÁLISE COMBINATÓRIA
P.F.C (II)

ASSISTA À VÍDEO AULA

O Princípio Aditivo da contagem

Se **X** e **Y** são dois conjuntos com ***a*** e ***b*** elementos respectivamente. Se para a escolha de um dos elementos do conjunto **X** existem ***a*** possibilidades e, para a escolha de um dos elementos do conjunto **Y** existem ***b*** possibilidades, então, para a escolha de um elemento do conjunto **X** <u>**ou**</u> de um elemento do conjunto **Y** existem ***a + b*** possibilidades.

Exemplo:

Quantos números naturais pares, de 3 algarismos distintos, podemos formar com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4.

Solução: Observe que os números em questão devem terminar pelos algarismos 0, 2 ou 4, obedecendo o fato do número não poder começar pelo algarismo 0.

NÚMEROS TERMINADOS EM "0":

1ª Etapa: Para o algarimo das centenas temos 4 possibilidades (1 ou 2 ou 3 ou 4)

C	D	U
		0
4		

2ª Etapa: Para o algarimo das dezenas temos 3 possibilidades, ou seja, qualquer um dos 5 algarismos, excetuando "0" e o que foi usado na casa das centenas.

C	D	U
		0
4	3	

Então, o total de número de números pares terminados em "0" é: $\boxed{4.3 = 12}$

NÚMEROS TERMINADOS EM "2"

1ª Etapa: Para o algarimo das centenas temos 3 possibilidades (1 ou 3 ou 4); perceba que o "0" não pode ocupar essa posição.

C	D	U
		2
3		

2ª Etapa: Para o algarismo das dezenas temos 3 possibilidades ou seja, qualquer um dos 5 algarismos, excetuando "2" e o que foi usado na casa das centenas.

C	D	U
		2
3	3	

Então, o total de número pares terminados em "2" é: $\boxed{3.3 = 9}$

NÚMEROS TERMINADOS EM "4"

1ª Etapa: Para o algarimo das centenas temos 3 possibilidades (1 ou 2 ou 3); perceba que o "0" não pode ocupar essa posição.

C	D	U
		4
3		

2ª Etapa: Para o algarimo das dezenas temos 3 possibilidades ou seja, qualquer um dos 5 algarismos, excetuando "4" e o que foi usado na casa das centenas.

C	D	U
		4
3	3	

Então, o total de número pares terminados em "4" é: $\boxed{3.3 = 9}$

Observe, então, que no exercício proposto, o número pode ser par desde que seu último algarismo seja "0" **ou** "2" **ou** "4".
Portanto: **12 + 9 + 9 = 30 números possíveis**

Atenção: Não é conveniente, neste caso, tentar resolver o exercício em uma só etapa, pois, possivelmente detalhes importantes iriam ser descartados, por exemplo: Quando o algarismo "0" estiver na casa das unidades, não haverá restrição na casa das centenas, porém se o algarismo "2" ou "4" ocupar a última casa, haverá, então, restrição na primeira casa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

1. (FUVEST – SP) Atualmente, no Brasil, coexistem dois sistemas de placas de identificação de automóveis: o *padrão Mercosul* (o mais recente) e aquele que se iniciou em 1990 (o *sistema anterior*, usado ainda pela maioria dos carros em circulação). No sistema anterior, utilizavam-se 3 letras (em um alfabeto de 26 letras) seguidas de 4 algarismos (de 0 a 9). No padrão Mercosul adotado no Brasil para automóveis, são usadas 4 letras e 3 algarismos, com 3 letras nas primeiras 3 posições e a quarta letra na quinta posição, podendo haver repetições de letras ou de números. A figura ilustra os dois tipos de placas.

Dessa forma, o número de placas possíveis do padrão Mercosul brasileiro de automóveis é maior do que o do sistema anterior em

a) 1,5 vezes.
b) 2 vezes.
c) 2,6 vezes.
d) 2,8 vezes.
e) 3 vezes.

2. (ENEM) Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

a) $4^5 - 4^4 - 4^3$
b) $4^5 + 4^4 + 4^3$
c) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$
d) $(4!)^5$
e) 4^5

3. (IFAL – AL) Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras. Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização?

a) 4.
b) 12.
c) 16.
d) 40.
e) 120.

4. (VUNESP – SP) Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade, C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

a) 9
b) 10
c) 12
d) 15
e) 20

5. (UNICAMP – SP) João tem uma camisa azul, uma camisa vermelha, uma camisa preta, uma camisa branca e uma camisa rosa. Ele também tem uma calça azul, uma calça preta e uma calça branca. Ele nunca usa a camisa da mesma cor que a calça. De quantas formas João pode se vestir?

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.

Nível 2

6. (UNIFOR) O Mundo Unifor é o maior evento de disseminação científica, cultural, artística e de humanidades da região Nordeste promovido pela Universidade de Fortaleza. De 18 a 23 de outubro, a Universidade de Fortaleza realizou a 10ª edição do Mundo Unifor. O tradicional evento reuniu arte, ciência e inovação com programação gratuita aberta ao público. Suponha que os códigos de inscrição de uma parcela dos inscritos no evento sejam números inteiros de três algarismos que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

• menor que 800;
• maior que 199;
• possuir todos os dígitos distintos;
• ser par.

A quantidade de inscritos cujos códigos de inscrição satisfazem as condições acima é

a) 200.
b) 216.
c) 232.
d) 300.
e) 320.

7. (UEPG – PR) Com os algarismos 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9 podem ser formados n números de 3 algarismos distintos e m números de 4 algarismos distintos.

Nesse contexto, assinale o que for correto.

01. m é maior que 1.500.
02. n é menor que 300.
04. Dos n números de 3 algarismos distintos, 186 são pares.
08. Dos m números de 4 algarismos distintos, 540 são ímpares.
16. Dos n números de 3 algarismos distintos, 120 são divisíveis por 5.

8. (UFSCAR) Ana tem um cartão com uma senha de 4 dígitos. Certo dia, ao tentar realizar uma compra, ela se esqueceu da senha, porém lembra que

- sua senha tem exatamente um dígito 1;
- sua senha tem exatamente dois dígitos 3;
- o dígito 1 não é sucedido imediatamente por um dígito 3.

Supondo que Ana escreva todas as possíveis senhas que cumprem essas condições, quantas são as possibilidades de senha que ela escreverá?

a) 48.
b) 58.
c) 68.
d) 78.

Nível 3

9. (UEM – PR) Seja A o seguinte conjunto de números naturais: $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$. Assinale o que for **correto**.

01. Podem ser formados exatamente 24 números ímpares com 4 algarismos escolhidos dentre os elementos do conjunto A.
02. Existem exatamente 96 números de 5 algarismos formados com elementos distintos de A e terminados com um algarismo par.
04. Podem ser formados exatamente 64 números pares de 3 algarismos com elementos do conjunto A.
08. Existem exatamente 3.125 números menores do que 100.000 formados com elementos do conjunto A.
16. Podem ser formados exatamente 49 números menores do que 350 com elementos distintos do conjunto A.

10. (UDESC – SC) É cada vez mais frequente o uso de dispositivos móveis tais como *tablets* e *smartphones* na realização das mais variadas atividades do dia a dia, tais como se relacionar, acessar notícias, trabalhar, realizar transações bancárias, etc. Diante disso também existe uma crescente preocupação com a segurança e a privacidade nesses dispositivos. Dentre as opções de segurança, uma ferramenta muito utilizada são os padrões de movimento, que são senhas formadas pela ligação de pontos por meio de toque na tela destes aparelhos. De modo geral são nove pontos distribuídos em três linhas com três pontos em cada linha, como mostra a Figura 6.

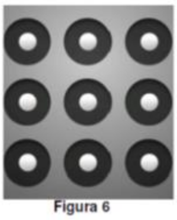


Figura 6

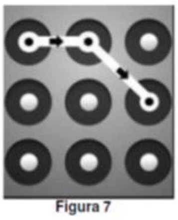


Figura 7

Nestas condições, se a ligação entre os pontos se der sempre por dois pontos adjacentes, conforme exemplo dado na Figura 7, a quantidade de senhas formadas por exatamente três pontos diferentes é:

a) 152
b) 504
c) 84
d) 200
e) 160

Gabarito – Aula 03

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	B	E	B	C	B	14	A	18
1	E									

Ir para resoluções

AULA 04

ANÁLISE COMBINATÓRIA ARRANJOS E COMBINAÇÕES (I)

ASSISTA À VÍDEO AULA

1. Noções Iniciais

Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5}. Obter:

a) todos os pares ordenados da forma (x; y) com 2 elementos distintos a partir do conjunto A:

(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (3, 5); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4. 5); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4).

b) todos os subconjuntos de 2 elementos:

{1, 2}; {1, 3}; {1, 4}; {1, 5}; {2, 3}; {2, 4}; {2, 5}; {3, 4}; {3, 5}; {4, 5}

Note que esses agrupamentos (item "a" e "b" se diferem basicamente num aspecto de fundamental importância: A ordem em que cada elemento é escrito.
Observe que no primeiro caso, a ordem em que são escritos os elementos é levado em conta, pois se trata da formação de pares ordenados.

(a, b) ≠ (b, a)

Já no segundo caso, a ordem em que são escritos os elementos não é levado em conta, pois se trata agora, da formação de subconjuntos.

{a, b} = {b, a}

Os agrupamentos do item a, ou seja, os pares ordenados, são denominados arranjos simples. No caso acima, os pares ordenados formados são arranjos de 5 elementos tomados 2 a 2 e indicados por: A_5^2 ou $A_{5,2}$.

Os agrupamentos do item b, ou seja, os subconjuntos, são denominados combinações simples. No caso acima, os subconjuntos formados são combinações de 5 elementos tomados 2 a 2 e indicados por: C_5^2 ou $C_{5,2}$.

Observação: Quando dizemos Arranjos *Simples* ou Combinações *Simples*, significa dizer, que os agrupamentos são formados com elementos distintos do conjunto A

2. Arranjos Simples

2.1. Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

Arranjos Simples de **n** elementos tomados **p** a **p** são sequências formadas por **p** (p ≤ n) elementos distintos de A.

Notações: A_n^p ou $A_{n,p}$

2.2. Cálculo do número de arranjos simples

$$\boxed{A_n^p = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Resultados Imediatos:

$A_n^0 = 1$	$A_n^1 = n$	$A_n^n = n!$

3. Combinações Simples

3.1. Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$

Combinações Simples de **n** elementos tomados **p** a **p** são subconjuntos formados por **p** (p ≤ n) elementos distintos de A.

Notações: C_n^p ou $C_{n,p}$

3.2. Cálculo do número de combinações simples

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{ou} \quad \boxed{C_n^p = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}}$$

Resultados Imediatos:

$C_n^0 = 1$	$C_n^1 = n$	$C_n^n = 1$

MATEMÁTICA X

Exemplos:

1) As 5 finalistas do concurso para Miss Universo são: Miss Brasil, Miss EUA, Miss Austrália, Miss Filipinas e Miss Venezuela. De quantas formas os juízes poderão escolher os três primeiros lugares neste concurso?

Podemos dizer que cada resultado é uma sequência da forma (1º lugar, 2º lugar, 3º lugar). Por exemplo, (Brasil, EUA, Austrália), (EUA, Filipinas, Venezuela), (Austrália, Brasil, Japão), etc. Então o total de sequências procurado é:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60 \ .$$

Ratificando que usamos arranjo visto que a ordem que escolhemos os elementos é relevante.

2) Quantos sucoss, contendo exatamente 3 frutas, podemos formar se dispomos de 8 frutas diferentes?

Vamos supor que as nossas 8 frutas sejam A,B,C,D,E,F,G e H. Um possível suco é dado pelo grupo ABC; uma outra pelo grupo ABD. Veja ainda que a vitamina ACB é a mesma que a vitamina ABC, pois é irrelevante a ordem em que as frutas são colocadas no liquidificador. Isto significa que cada vitamina pode ser considerada como um subconjunto de 3 elementos, isto é, uma combinação de 3 elementos. O total então é dado por $C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$.

EXERCÍCIOS
PROPOSTOS

Nível 1

1. (ENEM) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

2. (ENEM) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64
b) 56
c) 49
d) 36
e) 28

3. (PUC – SP) Admita que certa cidade brasileira tenha 8 *canais* de TV aberta, todos com transmissões diárias. Se uma pessoa pretende assistir três dos oito canais em um mesmo dia, ela pode fazer isso de x maneiras diferentes sem levar em consideração a ordem em que assiste os canais, e pode fazer de y maneiras diferentes levando em consideração a ordem em que assiste os canais. Sendo assim, y – x é igual a

a) 112
b) 280
c) 224
d) 56
e) 140

4. (UEG – GO) Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário.

Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

a) 120
b) 60
c) 40
d) 20
e) 10

5. (INTEGRADO MEDICINA) Dado 12 pontos distintos inscritos em uma circunferência. Quantas possibilidades distintas temos, para formar um quadrilátero usando 4 destes 12 pontos?

a) 210.
b) 345.
c) 415.
d) 495.
e) 720.

Nível 2

6. (UFJF – MG) Em uma festa havia 21 pessoas presentes. Ao chegarem, cumprimentaram com um aperto de mão uma única vez cada uma das outras pessoas. Quantos apertos de mão ocorreram ao todo?

a) 42 b) 84 c) 105 d) 210 e) 420

7. (ENEM) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\dfrac{10!}{2! \times 8!} - \dfrac{4!}{2! \times 2!}$
b) $\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{2!}$
c) $\dfrac{10!}{2! \times 8!} - 2$
d) $\dfrac{6!}{4!} + 4 \times 4$
e) $\dfrac{6!}{4!} + 6 \times 4$

8. (UERJ - RJ) Em uma reunião, trabalhadores de uma indústria decidiram fundar um sindicato com uma diretoria escolhida entre todos os presentes e composta por um presidente, um vice-presidente e um secretário. O número total de possibilidades de composição dessa diretoria é trinta vezes o número de pessoas presentes nessa reunião.
O número de trabalhadores presentes é:

a) 13
b) 11
c) 9
d) 7

Nível 3

9. (ENEM) Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	**Preço da cartela (R$)**
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:
- Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;
- Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;
- Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;
- Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;
- Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

a) Caio e Eduardo.
b) Arthur e Eduardo.
c) Bruno e Caio.
d) Arthur e Bruno.
e) Douglas e Eduardo.

10. (ESPCEX) Dado um dodecaedro regular, exatamente, quantas retas ligam dois de seus vértices mas não pertencem a uma mesma face desse dodecaedro?

a) 60
b) 100
c) 130
d) 160
e) 190

Gabarito – Aula 04

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	E	B	B	D	D	A	D	A
1	B									

AULA 05

ANÁLISE COMBINATÓRIA ARRANJOS E COMBINAÇÕES (II)

ASSISTA À VÍDEO AULA

Temos agora uma aula para aprofundamento do conteúdo visto na última aula. Abaixo segue um resumo do que foi estudado.

Arranjos simples

Agrupamentos que diferem:

- Pela natureza dos elementos componentes:
- Pela ordem dos elementos:

$$A_n^p = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinações

Esses agrupamentos diferem apenas pela natureza dos elementos componentes, mas não diferem pela ordem

$$C_n^p = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

EXERCÍCIOS

PROPOSTOS

Nível 1

1. (FUVEST - SP) Um professor precisa elaborar uma prova multidisciplinar que consta de duas questões de Matemática e seis de Física. Ele deve escolher questões de um banco de dados que contém três questões de Matemática e oito de Física. O número de provas distintas possíveis, sem levar em conta a ordem em que as questões aparecem, é:

a) 42
b) 54
c) 62
d) 72
e) 84

2. (UPF - RS) Uma clínica médica ortopédica conta com equipe interdisciplinar para atendimento com 3 fisioterapeutas, 5 traumatologistas e 4 enfermeiros. Nos finais de semana, são organizados plantões de atendimento. As equipes de plantão deverão ser constituídas por 1 fisioterapeuta, 2 traumatologistas e 2 enfermeiros. O número de equipes de plantão que podem ser formadas é:

a) 5
b) 180
c) 12
d) 60
e) 19

3. (ENEM) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais

diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

a) $\frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{15!}{10!5!}$

b) $\frac{6!}{4!2!} + \frac{15!}{10!5!}$

c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$

d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

e) $\frac{21!}{7!14!}$

4. Considere 5 pontos distintos sobre uma reta r e 4 pontos distintos sobre uma reta s, de forma que r seja paralela a s. O número de triângulos com vértices nesses pontos é igual a:

a) 10
b) 12
c) 20
d) 50
e) 70

5. (UEPG – PR) Um grupo de profissionais é formado por seis advogados e oito engenheiros. Considerando que serão formadas comissões com cinco destes profissionais, assinale o que for correto.

01. Podem ser formadas menos que 55 comissões sem nenhum advogado.
02. Em 420 dessas comissões apenas um advogado participa.
04. Em 1946 dessas comissões pelo menos um advogado participa.
08. Podem ser formadas 120 comissões com apenas um engenheiro.
16. Podem ser formadas mais de duas mil comissões distintas.

Nível 2

6. (PUC - SP) Em um restaurante, o cliente deve montar seu prato escolhendo um tipo de grelhado, entre carne, frango ou peixe, e dois ingredientes de salada, entre alface, tomate, pepino e cenoura. A sobremesa também compõe o prato e é sempre uma salada de frutas, exceto se o cliente escolher alface entre os ingredientes de salada. Nesse caso, para a sobremesa, ele pode escolher entre salada de frutas ou sorvete. O número de diferentes pratos que podem ser montados é:

a) 27 b) 24 c) 21 d) 18 e) 30

7. Com cinco médicos e sete enfermeiros, devem-se formar equipes com 5 desses profissionais. Se em cada equipe deve ter, pelo menos, um médico e um enfermeiro, o número de equipes distintas que podem ser formadas é:

a) 35
b) 175
c) 210
d) 350
e) 770

8. (ENEM) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1.000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

a) 8.
b) 9.
c) 11.
d) 18.
e) 24.

Nível 3

9. (PUC – PR) No jogo da Mega Sena, um apostador pode assinalar entre 6 e 15 números, de um total de 60 opções disponíveis. O valor da aposta é igual a R$ 2,00 multiplicado pelo número de sequencias de seis números que são possíveis, a partir daqueles números assinalados pelo apostador.

Por exemplo: se o apostador assinala 6 números, tem apenas uma sequencia favorável e paga R$ 2,00 pela aposta. Se o apostador assinala 7 números, tem sete sequencias favoráveis, ou seja, é possível formar sete sequencias de seis números a partir dos sete números escolhidos. Neste caso, o valor da aposta é R$ 14,00.

Considerando que se trata de uma aplicação de matemática, sem apologia a qualquer tipo de jogo, assinale a única alternativa CORRETA.

a) A aposta máxima custará R$ 5.005,00.
b) Uma aposta com 14 números assinalados custará entre R$ 3.000,00 e R$ 3.050,00.
c) Apostar dois cartões com dez números assinalados, ou cinco cartões com nove números assinalados, são opções equivalentes em termos de custo e de chance de ser ganhador do prêmio máximo.
d) O custo de uma aposta com 12 números assinalados será inferior a R$ 1.830,00.
e) Apostar um cartão com 13 números assinalados custará o dobro da aposta de um cartão com 12 números assinalados.

10. (OBMEP) Um professor de educação física precisou escolher, dentre seus alunos, uma equipe formada por dois meninos e uma menina ou por duas meninas e um menino. Ele observou que poderia fazer essa escolha de 25 maneiras diferentes. Quantos meninos e meninas são alunos desse professor?

a) 5 b) 7 c) 9 d) 10 e) 25

Gabarito – Aula 05

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		E	B	A	E	30	A	E	B	C
1	B									

Ir para resoluções

AULA 06

PERMUTAÇÕES SIMPLES

ASSISTA À VÍDEO AULA

O termo *permutação* é bastante sugestivo e neste sentido o que iremos fazer nesta aula é, essencialmente, permutar (trocar) as posições de elementos de um conjunto dado.

Definição: "Seja E um conjunto com **n** elementos, isto é, $E=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$. Chamamos de **Permutação Simples** dos **n** elementos de E a qualquer sequência formada pelos **n** elementos distintos de E."

Permutações Simples de **n** elementos são arranjos simples de **n** elementos tomados **n** a **n.**

Notação: P_n

Cálculo: $\boxed{P_n = n(n-1).(n-2).(n-3)....\ .2.1}$

Ou $\boxed{P_n = n!}$

O que são Anagramas?

Anagrama é uma espécie de jogo de palavras, resultando do rearranjo das letras de uma palavra ou expressão para produzir outras palavras ou expressões, utilizando todas as letras originais exatamente uma vez.

Eis abaixo, anagramas da palavra ROMA

AMOR	MAOR	OAMR	ROMA
AMRO	MARO	OARM	ROAM
AROM	MRAO	ORMA	RAOM
ARMO	MROA	ORAM	RAMO
AOMR	MORA	OMAR	RMAO
AORM	MOAR	OMRA	RMOA

Exemplo:

Com relação aos anagramas da palavra LIVRO, calcule:

a. O total de anagramas;
b. O total de anagramas que começam com a letra R;
c. O total de anagramas que apresenta as vogais juntas.

Solução

a) Um anagrama da palavra LIVRO é qualquer sequência, com ou significado, das 5 letras dessa palavra. Podemos listar alguns desses anagramas:

LOVRI, OILVR, LIVRO, ROLIV, etc.

Fica claro então que cada anagrama é uma permutação das 5 letras. O total é dado por $P_5 = 5! = 120$.

b) Como os anagramas devem começar pela letra R, vamos fixá-la na primeira casa. Fazendo isso, é fácil ver que as 4 letras restantes podem ocupar as 4 últimas casas. Temos assim a permutação de 4 letras, cujo total é $P_4 = 4! = 24$.

c) Vamos listar alguns dos anagramas que nos interessam:

<u>L</u> <u>I</u> <u>O</u> <u>V</u> <u>R</u>
<u>I</u> <u>O</u> <u>R</u> <u>L</u> <u>V</u>
<u>V</u> <u>R</u> <u>I</u> <u>O</u> <u>L</u>
<u>L</u> <u>V</u> <u>R</u> <u>I</u> <u>O</u>

⋮

O fundamental nesse exercício é perceber que as vogais I e O, juntas, "funcionam" como se fossem um único "objeto" que troca de ordem com os demais "objetos" L, V e R (note que nos exemplos listados acima o objeto IO ocupou a segunda posição, depois a primeira, a terceira e a quarta posição, respectivamente). Temos assim a permutação de 4 elementos, cujo total é $P_4 = 24$.

No entanto, esse raciocínio foi feito apenas para as vogais juntas e na ordem IO. Como não foi estipulada a ordem em que as vogais devem ficar juntas, devemos considerar também considerar a ordem OI. Neste caso, é evidente que o resultado também será 24. Logo, o total de anagramas que apresenta as vogais juntas é 24 + 24 = 48 ou $P_2.P_4$

EXERCÍCIOS
PROPOSTOS

Nível 1

1. Assinale a opção que contém o número de anagramas da palavra APRENDIZ.

a) 40300
b) 40320
c) 40330
d) 40340
e) 40350

2. (ENEM) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @ .
O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.
Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59
b) 60
c) 118
d) 119
e) 120

3.. Determine o número de anagramas formados com a palavra PÚBLICO que comece e termine por consoante é de

a) 5.040
b) 1.440
c) 720
d) 240

4.. (ESPM) O número de anagramas da palavra COLEGA em que as letras *L*, *E* e *G* aparecem juntas em qualquer ordem é igual a:

a) 72
b) 144
c) 120
d) 60
e) 24

5. (ACAFE – SC) Um grupo de seis amigos, sendo dois meninos e quatro meninas, estão comemorando a formatura do Ensino Médio. O fotógrafo solicitou ao grupo que se sentasse em um banco de seis lugares e que os meninos se sentassem nas extremidades do banco. Com essa configuração, o número de maneiras distintas que o grupo pode se sentar é de:

a) 720
b) 24
c) 48
d) 120

Nível 2

6. (INTEGRADO MEDICINA) Deseja-se fazer uma foto de sete estudantes sentados, porém três deles devem estar sempre juntos na foto. O número de maneiras diferentes que eles podem sentar-se é

a) 24
b) 120
c) 480
d) 720
e) 5040

7. (UNICAMP – SP) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

a) 48
b) 72
c) 96
d) 120

8. (FGV – SP) O número de anagramas da palavra COMUM nos quais as duas letras M não aparecem juntas é

a) 18
b) 24
c) 36
d) 48
e) 60

Nível 3

9. (ESPM) Escrevendo-se todos os anagramas da palavra PORTA em ordem alfabética, a posição ocupada pela palavra PRATO é a:

a) 60ª
b) 61ª
c) 62ª
d) 63ª
e) 64ª

10. (UEPG – PR) Em relação aos anagramas da palavra PRONTA, assinale o que for correto.

01. 120 desses anagramas iniciam com P.
02. Em 240 desses anagramas as letras P e R permanecem juntas.
04. Colocando-se todos os possíveis anagramas em ordem alfabética, a palavra PRANTO ocupa a posição 434.
08. 24 desses anagramas iniciam com P e terminam com A.
16. Em 144 desses anagramas todas as consoantes ficam juntas

Gabarito – Aula 06

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		B	D	B	B	C	D	B	C	C
1	31									

Ir para resoluções

AULA 07

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

ASSISTA À VÍDEO AULA

Permutações com elementos repetidos

Até agora trabalhamos com permutações simples, onde não há repetição de elementos (elementos distintos). Mas, vamos supor que seja dado um grupo de *n* elementos, sendo que um desses elementos apareça α vezes, outro elemento apareça β vezes, um outro elemento apareça δ vezes e assim por diante. O número de permutações desses *n* elementos será a divisão do fatorial do número total *n* de elementos pelo produto dos fatoriais dos números de vezes que cada elemento aparece (já que as trocas de posições entre elementos iguais não resultam em uma nova permutação). Então:

$$\boxed{P_n^{\alpha,\beta,\delta,...} = \frac{n!}{\alpha!.\beta!.\delta!}}$$

Exemplos:

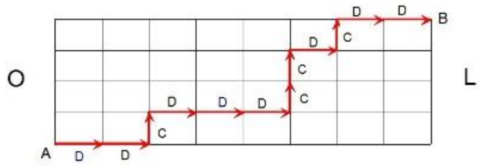
1) Quantos são os anagramas da palavra BATATA.

Solução:

A palavra BATATA possui 6 letras, sendo que 3 são iguais a A e 2 iguais a T. Logo:

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!.2!} = 60$$

2) A Figura representa o mapa de uma cidade fictícia na qual há nove ruas na direção vertical e cinco ruas na direção horizontal. Para ir do ponto A até o ponto B, os deslocamentos permitidos são sempre no sentido Oeste-Leste (D) e/ou Sul-Norte (C), como exemplificado na Figura abaixo, respectivamente, pelas letras D (direita) e C (para cima). Nestas condições existem quantos caminhos diferentes para ir do ponto A até o ponto B?



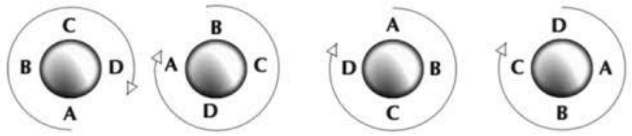
Solução:

Note que para ir do ponto A até o ponto B tem-se 12 passos (8D + 4C)

Então, cada trajetória possível, é uma sequência de 12 elementos sendo "8D" e "4C".

Logo: $P_{12}^{8,4} = \frac{12!}{8!.4!} = 495$

Permutação Circular



Permutação circular é um tipo de permutação composta por um ou mais conjuntos em ordem cíclica. Ocorre quando temos grupos com **n** elementos distintos formando uma circunferência.

A quantidade de permutações circulares de um conjuntos com n objetos (distintos) é o número de maneiras de colocá-los ao redor de um círculo, de forma que disposições que coincidam pela aplicação de uma rotação sejam consideradas iguais. O número de permutações circulares de n objetos é dado pela fórmula:

$$\boxed{P_n = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!}$$

Exemplos:

De quantas maneiras podemos organizar uma roda com 5 crianças?

Solução: $P_5 = (5-1)! = 4! = 24$

EXERCÍCIOS
PROPOSTOS

Nível 1

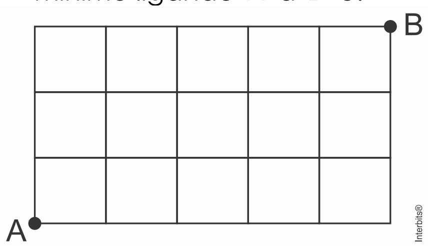
1. (UNISINOS) Um anagrama é uma palavra ou frase formada pela permutação das letras de outra palavra ou frase. Um exemplo é o nome da personagem Iracema, anagrama de América, no romance de José de Alencar. Quantos anagramas distintos podemos formar com a palavra MEDICINA?

a) 36
b) 2.520
c) 5.040
d) 20.160
e) 40.320

2. (UNIOESTE – PR) Quantas palavras podemos formar, independente se tenham sentido ou não, com as 9 letras da palavra BORBOLETA?

a) 81 440.
b) 90 720.
c) 362 880.
d) 358 140.
e) 181 440.

3. (UPF – RS) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:



a) 40 320
b) 6720
c) 256
d) 120
e) 56

4. (IBMEC – RJ) O número de anagramas que podem ser formados com as letras de PAPAGAIO, começando por consoante e terminando por O, é igual a:

a) 120.
b) 180.
c) 240.
d) 300.
e) 320.

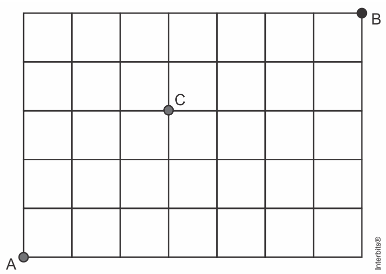
5. (ENEM) Nos livros *Harry Potter*, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".
Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

a) $9!$
b) $4!5!$
c) $2 \times 4!5!$
d) $\frac{9!}{2}$
e) $\frac{4!5!}{2}$

Nível 2

6. (UFRGS – RS) Um aplicativo de transporte disponibiliza em sua plataforma a visualização de um mapa com ruas horizontais e verticais que permitem realizar deslocamentos partindo do ponto A e chegando ao ponto B, conforme representado na figura abaixo.



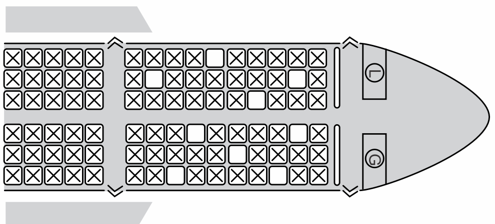
O número de menores caminhos possíveis que partem de A e chegam a B, passando por C, é

a) 28
b) 35
c) 100
d) 300
e) 792

7. (UFPR – PR) Considere o conjunto S de todas as sequências de 5 letras formadas com as vogais A, E, I, O e U que satisfazem simultaneamente às duas regras abaixo: I. O número de letras A é igual ao número de letras E. II. O número de letras O é igual ao número de letras U. Por exemplo, as sequências UOIOU, AEIOU e IAEII satisfazem as duas regras acima, enquanto AAEEE não satisfaz a primeira regra e IOIIO não satisfaz a segunda. Quantos elementos distintos possui o conjunto S?

a) 243 b) 221 c) 180 d) 125 e) 120

8. (ENEM) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

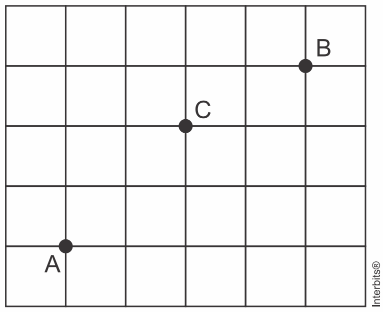


O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$
b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$
c) $7!$
d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$
e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

Nível 3

9. (ENEM) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.

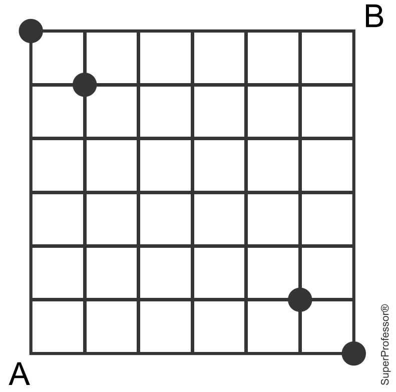


André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

a) 4.
b) 14.
c) 17.
d) 35.
e) 48.

10. (OBMEP) Uma formiga, inicialmente no vértice A, anda sobre as linhas do quadriculado da figura, sempre para a direita ou para cima, até chegar ao vértice B. De quantas maneiras ela pode fazer isso passando por algum dos quatro pontos destacados?



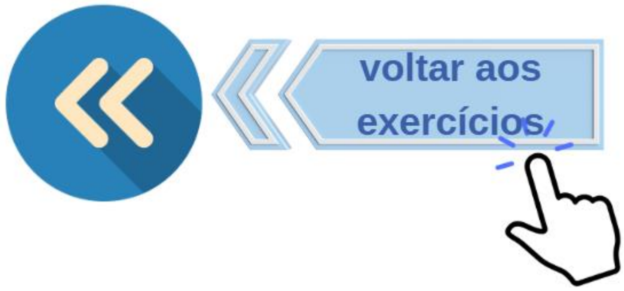
a) 4
b) 32
c) 36
d) 64
e) 74

Gabarito – Aula 07

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	E	B	E	D	B	A	C
1	E									

Ir para resoluções

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 01



Resolução do Exercício 1: [C]

O número de placas no sistema anterior é $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, enquanto que do padrão Mercosul existem $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$ placas.
Portanto, segue que a resposta é

$$\frac{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10}{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 2{,}6 \text{ vezes.}$$

Resolução do Exercício 2: [D]

a) [Falso] Basta perceber que 3! + 4!≠ 7!

b) [Verdadeiro] $\frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6}!}{\cancel{6}!} = 5040$

c) [Verdadeiro] $\frac{12!}{11!} = \frac{12.11!}{11!} = 12$

d) [Verdadeiro] $\frac{8!+7!}{7!} = \frac{8.7!+7!}{7!} = \frac{7!(8+1)}{7!} = 9$

Resolução do Exercício 2: [A]

$$\frac{15!+13!}{13!} = \frac{15.14.13!+13!}{13!} = \frac{\cancel{13}!(15.14+1)}{\cancel{13}!} = 211$$

Resolução do Exercício 3: [C]

$$\frac{(m+1)m!}{(m+2)!} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{(m+1)!}{(m+2)!} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{m+2} = \frac{1}{10} \Rightarrow m = 8$$

Portanto, m é múltiplo de 2

Resolução do Exercício 4: [D]

$$\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!} = 7n$$

$$\frac{(n+1).n.(n-1)!-n(n-1)!}{(n-1)!} = 7n$$

$$\frac{(n-1)![(n+1).n-n]}{(n-1)!} = 7n$$

$$(n+1).n-n = 7n$$

$$n^2+n-n = 7n$$

$$n^2-7n = 0$$

$$n_1 = 7 \quad \text{ou} \quad n_2 = 0 \text{ (não serve)}$$

Resolução do Exercício 5: [C]

$$\frac{x! \cdot (x+1)!}{(x-1)! \cdot x!} = 20 \Leftrightarrow \frac{x \cdot (x-1)! \cdot (x+1) \cdot x!}{(x-1)! \cdot x!} = 20 \Leftrightarrow$$

$$x(x+1) = 20 \Leftrightarrow x^2+x-20 = 0$$

Resolvendo a equação, temos:
$x = -5$ (não convém) ou $x = 4$.

Portanto, $x = 4$.

Resolução do Exercício 6: [C]

$$(n+1)!-2n! = 6(n-1)!$$

$$(n+1)n(n-1)!-2n(n-1)! = 6(n-1)!$$

$$(n+1)n-2n = 6$$

$$n^2+n-2n-6 = 0$$

$$n^2-n-6 = 0$$

$$n_1 = 3 \quad \text{ou} \quad n_2 = -2 \text{(não serve)}$$

Logo $n! = 6$

Resolução do Exercício 7: [E]

$$\frac{(x^2-1)! \cdot x!}{(x^2-2)! \cdot (x+1)!} = \frac{(x^2-1) \cdot (x^2-2)! \cdot x!}{(x^2-2)! \cdot (x+1) \cdot x!} = \frac{x^2-1}{x+1} =$$

$$\frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x+1)} = x-1$$

Resolução do Exercício 8: [D]

$$20\cdot 18\cdot 16\cdot 14\cdot \ldots 6\cdot 4\cdot 2=(2\cdot 10)\ (2\cdot 9)\ (2\cdot 8)\ (2\cdot 7)\ \ldots(2\cdot 3)\ (2\cdot 2)(2\cdot 1)$$
$$20\cdot 18\cdot 16\cdot 14\cdot \ldots 6\cdot 4\cdot 2=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$20\cdot 18\cdot 16\cdot 14\cdot \ldots 6\cdot 4\cdot 2=2^{10}\cdot 10!$$

Resolução do Exercício 9: [E]

Note que, toda vez que aparecer $5\cdot 2$, aparecerá um 0 (zero).

O fator 5 aparece nos seguintes números:
$$\underbrace{5, 10, 15, 20, 25, \ldots, 100}_{20\ \text{números}}$$

Note que:
$$25=5\cdot 5$$
$$50=2\cdot 5\cdot 5$$
$$75=3\cdot 5\cdot 5$$
$$100=4\cdot 5\cdot 5$$

Então, o fator 5 aparece $20+4=24$ vezes.

Resolução do Exercício 10: [A]

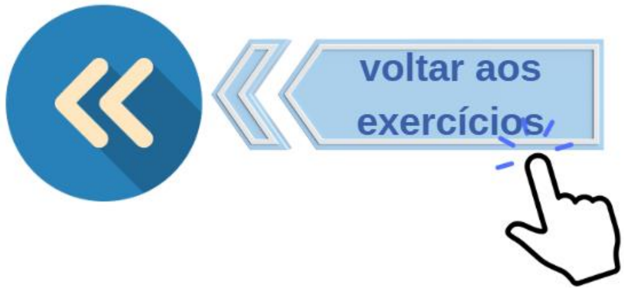
$$0!=1$$
$$1!=1$$
$$2!=2$$
$$3!=6$$
$$4!=24$$
$$5!=120$$
$$6!=720$$
$$7!=5040$$
$$8!=40320$$
$$9!=362880$$

A partir de 10! Todo número termina em 00.

Portanto, a soma dos dois últimos dígitos dos números será
$$1+1+2+6+24+20+20+40+20+80=214$$

Portanto, o algarismo das dezenas é o 1.

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 02



Resolução do Exercício 1: [E]

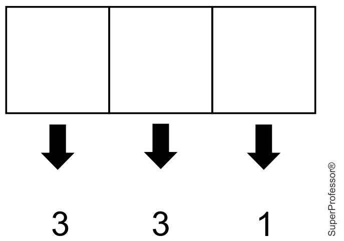
A quantidade de refeições distintas é de:
$\underset{p}{3}\cdot\underset{a}{3}\cdot\underset{s}{2}=18$

Resolução do Exercício 2: [C]

Existem 2 possibilidades para cada um dos dois primeiros campos, 4 possibilidades para o terceiro campo, 4 possibilidades para o quarto e 3 possibilidades para cada um dos dois últimos campos. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3=576.$

Resolução do Exercício 3: [C]

Para que estes números sejam divisíveis por 5 teremos, três possibilidades para o primeiro algarismo, três possibilidades para o segundo algarismo e apenas uma possibilidade para o terceiro algarismo (o número 5).



Resolução do Exercício 4: [A]

Os números devem terminar em 3, 5, 7 ou 9. Logo, a quantidade de números que satisfazem as condições dadas é:
$8\cdot 7\cdot 4=224$

Resolução do Exercício 5: [E]

A resolução dessa questão é feita de maneira imediata pelo Princípio fundamental da contagem.

Calculando:

Opção I $\Rightarrow 26\cdot 10^5=2.600.000$ opções

Opção II $\Rightarrow 10^6=1.000.000$ opções

Opção III $\Rightarrow 26^2\cdot 10^4=6.760.000$ opções

Opção IV $\Rightarrow 10^5=100.000$ opções

Opção V $\Rightarrow 26^3\cdot 10^2=1.757.600$ opções

Sendo o número esperado de clientes igual a 1 milhão, o formato que resulta num número de senhas distintas possíveis superior a 1 milhão mas não superior a 2 milhões é o formato dado na opção V.

Resolução do Exercício 6: [A]

Sabendo que cada letra maiúscula difere da sua correspondente minúscula e contando com mais 10 algarismos, há $2\cdot 26+10=62$ possibilidades para cada dígito da senha. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, segue-se que existem 62^6 senhas possíveis de seis dígitos.
Analogamente, no sistema antigo existiam 10^6 senhas possíveis de seis dígitos.

Em consequência, a razão pedida é $\dfrac{62^6}{10^6}.$

Resolução do Exercício 7: [D]

Como os números devem ser divisíveis por $5,$ o último algarismo deve ser $5.$
Então devemos formar números com 3 algarismos distintos escolhidos dentre os números do conjunto $\{1, 3, 7, 9\}.$

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:
$4\cdot 3\cdot 2=24$

Resolução do Exercício 8: [A]

A primeira pessoa para se sentar terá 6 opções, a segunda terá 4 opções, pois não poderá ocupar uma cadeira oposta à primeira pessoa e a terceira terá apenas duas opções, pois não poderá sentar-se em posições opostas à primeira e à segunda pessoa, portanto o número de maneiras que Ana, Beatriz e Carlos podem escolher lugares é:
$6\cdot 4\cdot 2=48$

Resolução do Exercício 9: [25]

[01] Verdadeira. Com efeito, pelo Princípio Multiplicativo, o número total de senhas distintas é $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^6$.

[02] Falsa. Na verdade, tal número é igual a $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 625$.

[04] Falsa. Fixada a letra A em cada par, existem $26 - 5 = 21$ escolhas possíveis para a segunda letra em cada par. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, segue que o número de senhas é $21 \cdot 21 \cdot 21 = 21^3$.

[08] Verdadeira. De fato, considerando [04], agora existem 5 escolhas para a primeira letra. Portanto, o número de possibilidades é $5 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 21 = 105^3$.

[16] Verdadeira. Com efeito, existem 26 escolhas para a primeira letra de cada par e 1 escolha para a segunda letra. Logo, o número de senhas distintas é $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3$.

Resolução do Exercício 10: [E]

Se n é o número de códigos distintos possíveis, então

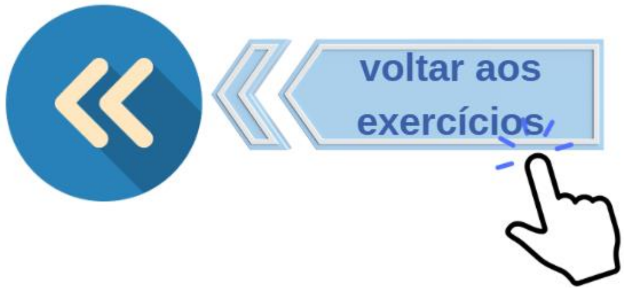
$$\begin{aligned} n &= \underbrace{26 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 26}_{10 \text{ vezes}} \\ &= 26^{10}. \end{aligned}$$

Logo, sabendo que $13 \cong 10^{1,114}$ e $2^{10} = 1024 \cong 10^3$, temos

$$\begin{aligned} 26^{10} &= 2^{10} \cdot 13^{10} \\ &\cong 10^3 \cdot (10^{1,114})^{10} \\ &\cong 10^3 \cdot 10^{11,14} \\ &\cong 10^{14,14}. \end{aligned}$$

Portanto, como $100 \cdot 10^{12} < 10^{14,14} < 10^{15}$, segue que n está entre 100 trilhões e 1 quatrilhão.

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 03



Resolução do Exercício 1: [C]

O número de placas no sistema anterior é $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10,$ enquanto que do padrão Mercosul existem $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$ placas.
Portanto, segue que a resposta é
$\frac{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10}{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 2{,}6$ vezes.

Resolução do Exercício 2: [B]

Essa é uma questão sobre a aplicação do princípio multiplicativo (e) e aditivo (ou)

O número de códigos possíveis é dado por:
Para 3 toques:
$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$

Para 4 toques:
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$

Para 5 toques:
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

Portanto, a expressão representa o número total de códigos existentes é:
$4^3 + 4^4 + 4^5$

Resolução do Exercício 3: [E]

Como as palavras tem até quatro letras temos a seguinte situação: palavras com uma, duas, três ou quatro letras. Logo:
$3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 120$

Resolução do Exercício 4: [B]

Como ele deve usar rodovia e ferrovia, se de A para B ele usar rodovia, de B para C deverá usar ferrovia. Por outro lado, se de A para B usar ferrovia, de B para C deverá usar rodovia. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos:

A – B (ferrovia = 2) e B – C (rodovia = 2) =
2 . 2 = 4
Ou
A – B (rodovia = 3) e B – C (ferrovia = 2) =
3 . 2 = 6

Logo, 4 + 6 = 10

Resolução do Exercício 5: [C]

Como João possui 5 cores de camisas e 3 cores de calças, temos:

Caso ele escolha uma camisa azul, preta ou branca:
$\underset{\text{camisa}}{3} \cdot \underset{\text{calça}}{2} = 6$

Caso ele escolha uma camisa vermelha ou rosa:
$\underset{\text{camisa}}{2} \cdot \underset{\text{calça}}{3} = 6$

Portanto, o total de possibilidades é de:
$6 + 6 = 12$

Resolução do Exercício 6: [B]

Número de possibilidades para o 1° algarismo (caso seja par):
$n\{2, 4, 6\} = 3$

Número de possibilidades para o 3° algarismo:
$n\{0, 2, 4, 6, 8\} - \underset{1^{\text{o}}\text{ alg}}{1} = 4$

Número de possibilidades para o 2° algarismo:
$n\{0, 1, \ldots, 9\} - \underset{1^{\text{o}}\text{ e }2^{\text{o}}\text{ alg}}{2} = 8$

Ou:

Número de possibilidades para o 1° algarismo (caso seja ímpar):
$n\{3, 5, 7\} = 3$

Número de possibilidades para o 3° algarismo:
$n\{0, 2, 4, 6, 8\} = 5$

Número de possibilidades para o 2° algarismo:
$n\{0, 1, ..., 9\} - \underbrace{2}_{1^\circ \text{ e } 2^\circ \text{ alg}} = 8$

Logo, a quantidade de códigos possíveis é de:
$3 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 8 = 216$

Resolução do Exercício 7: [14]

Com os algarismos disponíveis é possível formar $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$ números com 3 algarismos distintos. Ademais, é possível formar $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1470$ números com 4 algarismos distintos.

[01] Falsa. Temos $m = 1470 < 1500.$

[02] Verdadeira. De fato, pois $n = 294 < 300.$

[04] Verdadeira. Com efeito, pois os pares que terminam em zero são $7 \cdot 6 = 42,$ e os pares que não terminam em zero são $6 \cdot 6 \cdot 4 = 144.$ Logo, pelo Princípio Aditivo, o resultado é $144 + 42 = 186.$

[08] Verdadeira. Com efeito, pois os ímpares são $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 540.$

[16] Falsa. Os divisíveis por 5 que terminam em 5 são $6 \cdot 6 = 36,$ e os divisíveis por 5 que terminam em 0 são $7 \cdot 6 = 42.$ Assim, pelo Princípio Aditivo, apenas $36 + 42 = 78$ são divisíveis por $5.$

Resolução do Exercício 8: [A]

Temos as seguintes possibilidades para as senhas:

Senha	Nº de possibilidades
1 _ 3 3	8
3 1 _ 3	8
3 3 1 _	8
3 3 _ 1	8
3 _ 3 1	8
_ 3 3 1	8

Portanto, a quantidade total de senhas é de:
$6 \cdot 8 = 48$

Resolução do Exercício 9: [18]

[01] **Incorreto**. Temos uma possibilidade para o algarismo das unidades e cinco para cada um dos outros algarismos. Portanto, pelo PFC, podemos formar $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 125$ números ímpares com 4 algarismos escolhidos dentre os elementos do conjunto $A.$

[02] **Correto**. Podemos escolher o algarismo das unidades de quatro maneiras. Definido o algarismo das unidades, os outros quatro algarismos serão os elementos que restam de $A.$ Portanto, o resultado é $4 \cdot P_4 = 4 \cdot 4! = 96.$

[04] **Incorreto**. Existem quatro escolhas para o algarismo das unidades, e cinco escolhas para os algarismos das dezenas e das centenas. Desse modo, pelo PFC, podem ser formados $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ números pares de 3 algarismos com elementos do conjunto $A.$

[08] **Incorreto**. Podemos formar 5^5 números de cinco algarismos, 5^4 números de quatro algarismos, 5^3 números de três algarismos, 5^2 números de dois algarismos e 5 números de um algarismo. Portanto, é possível formar exatamente

$$5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 = 3905$$

números menores do que 100.000 com elementos do conjunto $A.$

[16] **Correto**. Temos 5 números com um algarismo, $5 \cdot 4 = 20$ números com dois algarismos e $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ números com três algarismos, totalizando $5 + 20 + 24 = 49$ números com elementos distintos de A e menores do que $350.$

Resolução do Exercício 10: [E]

1) Partindo dos pontos A, C, G ou I, temos:

$$\underline{A}.\underline{\overset{\text{B ou D}}{2}}.\underline{4}=8$$

ou

$$\underline{A}.\underline{E}.\underline{7}=7$$

8 + 7 = 15
Fazendo a analogia para C, G ou I, temos 4.15 = 60 possib.

2) Partindo dos pontos B, D, F ou H, temos:

$$\underline{D}.\underline{\overset{\text{A ou G}}{2}}.\underline{2}=4$$

ou

$$\underline{D}\ \underline{\overset{\text{B ou H}}{2}}\ .\underline{4}=8$$

ou

$$\underline{D}.\ \underline{E}.\ \underline{7}=7$$

4 + 8 + 7 = 19

Fazendo a analogia para B, F ou H, temos 4.19 = 76 possib.

3) Partindo do pontos E, temos:

$$\underline{E}.\underline{\overset{\text{A,C,G ou I}}{4}}.\underline{2}=8$$

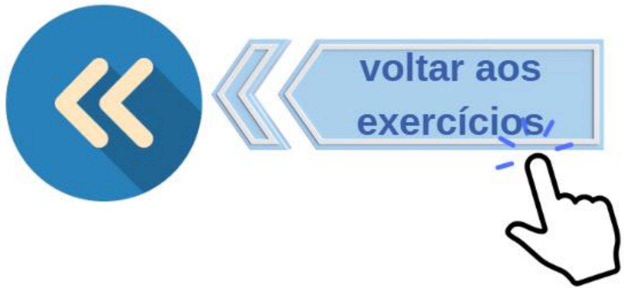
ou

$$\underline{E}\quad \underline{\overset{\text{B,D,F ou H}}{4}}\quad .\underline{4}=16$$

8 + 16 = 24

Total de possibilidades: 60 + 76 + 24 = 160

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 04



Resolução do Exercício 1: [A]

Para o grupo A a ordem dos elementos não é relevante o que nos leva a uma combinação.

Mas no jogo de abertura existe o time que jogará em sua casa e o time que jogará fora, então temos um arranjo.

Logo a alternativa A é a correta.

Resolução do Exercício 2: [E]

O número de partidas pode ser calculado pelo número de combinações de jogadores, 2 a 2 Assim:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{2\cdot 6!} = 28 \text{ partidas}$$

Resolução do Exercício 3: [B]

Calculando:

$$\left.\begin{array}{l} C_{8,3} = \dfrac{8!}{3!\cdot 5!} = 56 \\ A_{8,3} = \dfrac{8!}{5!} = 336 \end{array}\right\rangle \Rightarrow 336 - 56 = 280$$

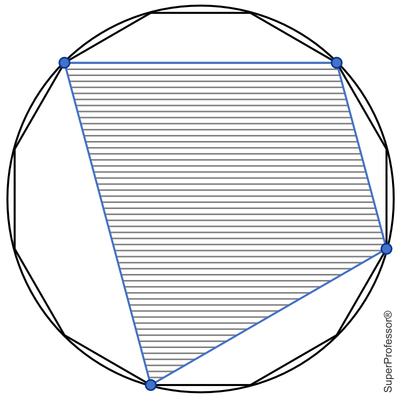
Resolução do Exercício 4: [B]

O resultado corresponde ao número de arranjos simples de 5 objetos tomados 3 a 3, ou seja,

$$A_{5,\,3} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Resolução do Exercício 5: [D]

Para resolver este problema devemos calcular o total de subconjuntos, de 4 elementos, obtidos a partir de um conjunto de 12 elementos. Utilizando combinação simples, temos:



$$C_{12,4} = \frac{12!}{4!.8!} = \frac{12.11.10.9.8!}{4.3.2.1.8!} = 495$$

Resolução do Exercício 6: [D]

O total de apertos de mão na situação descrita é dado por:

$$\frac{21\cdot 20}{2!} = 210$$

Resolução do Exercício 7: [A]

Número de maneiras de escolher dois tenistas quaisquer é: $C_{10}^{2} = \dfrac{10!}{2!\times 8!}$

Número de modos de escolher dois tenistas canhotos é $C_{4}^{2} = \dfrac{4!}{2!\times 2!}$

O resultado pedido é dado por: $\dfrac{10!}{2!\times 8!} - \dfrac{4!}{2!\times 2!}.$

Resolução do Exercício 8: [D]

Seja n o número de trabalhadores presentes na reunião. Logo, como o número total de possibilidades de composição da diretoria corresponde ao número de arranjos simples de n trabalhadores tomados três a três, vem

$$\begin{aligned} A_{n,\,3} = 30n &\Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 30n \\ &\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 30n \\ &\Rightarrow (n-1)(n-2) = 30 \\ &\Rightarrow n = 7. \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 9: [A]

Supondo que duas cartelas de um mesmo jogador não possuem 6 dezenas iguais, segue-se que Arthur, Bruno, Caio, Douglas e Eduardo possuem, respectivamente, as seguintes possibilidades de serem premiados:

Artur: 250

Bruno: $41 \cdot C_7^6 + 4 = 291$;

Caio: $12 \cdot C_8^6 + 10 = 346$;

Douglas: $4 \cdot C_9^6 = 336$

Eduardo: $2 \cdot C_{10}^6 = 420$.

Portanto, como o número de casos possíveis para o resultado do sorteio é o mesmo para todos, podemos concluir que Caio e Eduardo são os que têm as maiores probabilidades de serem premiados.

Resolução do Exercício 10: [B]

Um dodecaedro possui 12 faces pentagonais, e cada aresta está contida em 2 faces. Logo, o número de arestas é dado por:

$$A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$$

Total de vértices do dodecaedro:

$$V + F = A + 2$$
$$V + 12 = 30 + 2$$
$$V = 20$$

Total de retas que podem ser formadas com 2 de seus vértices:

$$C_{20,\,2} = \frac{20!}{18!2!} = 190$$

Total de retas que contém as arestas das faces:

30

Total de retas que contém as diagonais das faces:

$$12d = 12 \cdot \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 60$$

Portanto, a quantidade de retas que satisfaz a condição do enunciado é igual a:

$190 - 60 - 30 = 100$

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 05

voltar aos exercícios

Resolução do Exercício 1: [E]

Existem $C_3^2 = 3$ maneiras de escolher as questões de matemática e $C_8^6 = \dfrac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$ modos de escolher as questões de física. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $3 \cdot 28 = 84.$

Resolução do Exercício 2: [B]

Possibilidades para a escolha de um fisioterapeuta: $C_{3,1} = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$

Possibilidades para a escolha de dois traumatologistas: $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Possibilidades para a escolha de 4 enfermeiros: $C_{4,2} = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

Portanto, o número de equipes de plantão que podem ser formadas será dado por:
$3 \times 10 \times 6 = 180$

Resolução do Exercício 3: [A]

$$C_6^2 \ . \ C_{15}^5$$
$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{15!}{5! \cdot 10!}.$$

Resolução do Exercício 4: [E]

Calculando:
1) 2 pontos em r, 1 ponto em s:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10$$
$$T_\Delta = 10 \cdot 4 = 40$$

2) 1 ponto em r, 2 pontos em s:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = 6$$
$$T_\Delta = 6 \cdot 5 = 30$$

$\text{Total}\Delta = 40 + 30 = 70$ triângulos

Resolução do Exercício 5: [30]

[01] Falsa. Na verdade, temos $C_8^5 = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ possibilidades de formar uma comissão sem nenhum advogado.

[02] Verdadeira. De fato, existem $C_6^1 . C_8^4 = 6 \cdot \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 420$ possibilidades de formar uma comissão em que figura apenas um advogado.

[04] Verdadeira. Com efeito, há $C_{14}^5 = \dfrac{14!}{5! \cdot 9!} = 2002$ maneiras de formar uma comissão de 5 pessoas com quaisquer dos 14 profissionais. Logo, o número de possibilidades de formar uma comissão com pelo menos um advogado é $2002 - 56 = 1946.$

[08] Verdadeira. De fato, existem $C_8^1 . C_6^4 = 8 \cdot \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 120$ possibilidades de formar uma comissão em que figura apenas um engenheiro.

[16] Verdadeira. Com efeito, existe um total de 2002 possibilidades.

Resolução do Exercício 6: [A]

Caso o cliente escolha alface entre os ingredientes da salada:

$$\underset{\text{grelhado}}{C_{3,1}} \cdot \underset{\text{salada}}{C_{3,1}} \cdot \underset{\text{sobremesa}}{C_{2,1}} = 3\cdot 3\cdot 2 = 18$$

Caso o cliente não escolha alface entre os ingredientes da salada:

$$\underset{\text{grelhado}}{C_{3,1}} \cdot \underset{\text{salada}}{C_{3,2}} \cdot \underset{\text{sobremesa}}{C_{1,1}} = 3\cdot 3\cdot 1 = 9$$

Portanto, o número de diferentes pratos que podem ser montados é:
$18+9=27$

Resolução do Exercício 7: [E]

Total de equipes com 5 profissionais que podem ser formadas.

$$C_{12,5} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = 792$$

Total de equipes formadas só com médicos.

$$C_{5,5} = \frac{5!}{5!\cdot 0!} = 1$$

Total de equipes formadas só com enfermeiros.

$$C_{7,5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$$

Portanto, o total de equipes, com pelo menos um médico e pelo menos um enfermeiro, será dado por:
$792 - 1 - 21 = 770$.

Resolução do Exercício 8: [B]

Seja n o número de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes.
Sabendo que existem 7 modelos de carros, 2 tipos de motores e x cores, pelo Princípio Multiplicativo, segue que o número de configurações, sem opcionais, é dado por:

Sem opcionais: $7.2.x = 14x$
Com 1 opcional: $7.2.\ C_3^1.x = 42x$
Com 2 opcionais: $7.2.\ C_3^2.x = 42x$
Com 3 opcionais: $7.2.\ C_3^3.x = 14x$

Logo:
$14x + 42x + 42x + 14x > 1000$
$112x > 1000$
$x > 8{,}93$
O menor valor inteiro de x que satisfaz a desigualdade é $x = 9$.

Resolução do Exercício 9: [C]

a) Errada. $C_{15,6} = 5005$, logo custará R$10.010,00
b) Errada. $C_{14,6} = 3003$, logo custará R$ 6.006,00
c) Correta, $2.C_{10,6} = 2.210 = 420$, e $5.C_{9,6} = 5.84 = 420$ (420.2 = 840,00)
d) Errada. $C_{12,6} = 924$, logo custará R$1848,00
e) Errada. $C_{13,6} = 1716$, logo custará R$3432,00 ($3432 \neq 2 \times 1848{,}00$)

Resolução do Exercício 10: [B]

Sendo x e y, respectivamente, o número de meninas e de meninos, temos que:

$$C_{y,2}\cdot C_{x,1} + C_{x,2}\cdot C_{y,1} = 25$$
$$\frac{y(y-1)}{2}\cdot x + \frac{x(x-1)}{2}\cdot y = 25$$
$$xy^2 - xy + x^2y - xy = 50$$
$$xy^2 - 2xy + x^2y = 50$$
$$x\left(y^2 - 2y + xy\right) = 50$$

Atribuindo valores a x, obtemos:

$$x=1 \Rightarrow y^2 - y - 50 = 0 \Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{201}}{2}$$
$$x=2 \Rightarrow y^2 - 25 = 0 \Rightarrow y = 5$$
$$x=3 \Rightarrow y^2 + y - \frac{50}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{-3+\sqrt{609}}{6}$$
$$x=4 \Rightarrow y^2 + 2y - \frac{25}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{-2+3\sqrt{6}}{2}$$
$$x=5 \Rightarrow y^2 + 3y - 10 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Portanto, $x = 2$ e $y = 5$ ou $x = 5$ e $y = 2$. Sendo assim, esse professor possui 7 alunos meninos e meninas.

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 06

voltar aos exercícios

Resolução do Exercício 1: [B]

O número de anagramas formados pelas 8 letras da palavra APRENDIZ é igual a:
$8! = 40320$

Resolução do Exercício 2: [D]

O número de anagramas em que as letras "edu" estejam juntas e nessa ordem é dado pela permutação das 4 letras com o bloco composto pelas três letras que devem permanecer juntas. Ou seja:
$5! = 120$

Descontando a sequência "eduardo", teremos:
$120 - 1 = 119$

Resolução do Exercício 3: [B]

Temos 4 consoantes e 3 vogais. Logo:

$$\underset{C}{\underline{4}} \cdot \underbrace{\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}}_{V \text{ ou } C} \cdot \underset{C}{\underline{3}} = 1440$$

Resolução do Exercício 4: [B]

Calculando:

$P_3 . P_4 \Rightarrow 6 \cdot 24 = 144$

Resolução do Exercício 5: [C]

Existem duas escolhas para a primeira extremidade e uma escolha para a segunda extremidade. Ademais, as meninas podem ser dispostas de $P_4 = 4! = 24$ maneiras.
Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $2 \cdot 1 \cdot 24 = 48.$

Resolução do Exercício 6: [D]

Tratando os 3 estudantes que devem ficar juntos como um bloco de 1 estudante e permutando os 3 estudantes dentro deste bloco, concluímos que o número de possibilidades é igual a:
$5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$

Resolução do Exercício 7: [B]

As cinco pessoas podem ser fotografadas de $P_5 = 5! = 120$ maneiras. Dentre estas, as duas pessoas que se recusam a ficar lado a lado podem aparecer juntas de $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 48$ modos. Portanto, segue que a resposta é $120 - 48 = 72.$

Resolução do Exercício 8: [C]

Quantidade total de anagramas que podem ser formados:

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

Quantidade de anagramas em que as letras M ficam juntas:

$$4! \cdot \frac{2!}{2!} = 24$$

Sendo assim, o número procurado de anagramas vale:
$60 - 24 = 36$

Resolução do Exercício 9: [C]

As letras da palavra PORTA em ordem alfabética são (A, O, P, R, T). Obtendo as quantidades de palavras de acordo com as suas iniciais, temos:

$$\begin{array}{l} A\ \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 24 \\ O\ \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 24 \\ P\ A\ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \\ P\ O\ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \quad + \\ P\ R\ A\ O\ T = 1 \\ \underline{P\ R\ A\ T\ O = 1} \\ \qquad 62 \end{array}$$

Portanto, a palavra PRATO ocupa a 62ª posição.

Resolução do Exercício 10: [31]

[01] Verdadeira. De fato, fixando a letra P, temos $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

[02] Verdadeira. Considerando as letras P e R como uma única letra, temos $P_5 = 5! = 120$ permutações. Ademais, ainda é possível dispor as letras P e R de $P_2 = 2! = 2$ maneiras. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, segue que existem $120 \cdot 2 = 240$ anagramas com as letras P e R juntas e em qualquer ordem.

[04] Verdadeira. Existem $3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 360$ anagramas que começam por uma das letras A, N ou O.

Fixando a letra P na primeira posição, existem 3 modos de escolher a segunda letra $(A, N$ ou $O)$ e $P_4 = 4! = 24$ modos de dispor as outras letras. Logo, temos mais $3 \cdot 24 = 72$ anagramas.

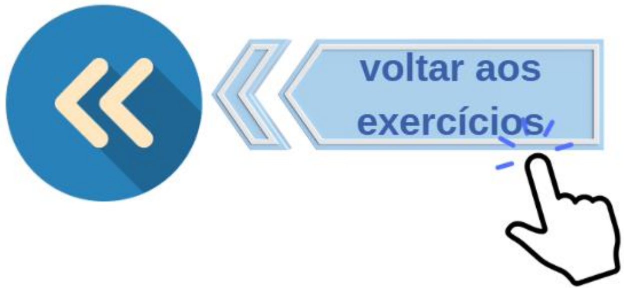
Os dois próximos anagramas são PRANOT e PRANTO.

Em consequência, a palavra PRANTO ocupa a posição $360 + 72 + 2 = 434$.

[08] Verdadeira. Fixando as letras P e A, podemos dispor as outras 4 letras de $P_4 = 4! = 24$ maneiras.

[16] Verdadeira. Considerando as consoantes N, P, R e T como sendo uma única letra, temos $P_3 = 3! = 6$ anagramas. Ademais, ainda podemos permutar as consoantes entre si de $P_4 = 4! = 24$ modos. Desse modo, pelo Princípio Multiplicativo, em $6 \cdot 24 = 144$ anagramas todas as consoantes ficam juntas.

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 07



Resolução do Exercício 1: [D]

Como a palavra MEDICINA possui duas letras I, segue que a resposta é dada por

$P_8^{(2)} = \frac{8!}{2!} = 20160.$

Resolução do Exercício 2: [B]

Calculando o número de anagramas da palavra BORBOLETA. (Observe que as letras O e B parecem duas vezes cada).

$$P_p^{2,2} = \frac{9!}{2!.2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{4} = 18 \cdot 5040 = 90720$$

Resolução do Exercício 3: [E]

$$P_n^{\alpha,\beta,\theta,...} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\theta!...} \to P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$$

Resolução do Exercício 4: [B]

Há dois casos possíveis:

i) Anagramas que iniciam pela letra P e terminam por O:

$$P_6^{(3)} = \frac{6!}{3!} = 120$$

ii) Anagramas que iniciam pela letra G e terminam por O:

$$P_6^{(3,2)} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

Portanto, de (i) e (ii), temos $120 + 60 = 180$ anagramas.

Resolução do Exercício 5: [E]

Como existem quatro vogais e cinco consoantes, a única configuração possível é

$c_1 v_1 c_2 v_2 c_3 v_3 c_4 v_4 c_5,$

em que cada c_i representa uma consoante e cada v_i representa uma vogal.

Desse modo, temos $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!}$ maneiras de dispor as consoantes e $P_4 = 4!$ modos de intercalar as vogais.

Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $\frac{5!}{2} \cdot 4!.$

Resolução do Exercício 6: [D]

A fim de cumprir a condição de menor caminho, deverão ocorrer apenas deslocamentos de oeste para leste e de sul para norte.

Desse modo, existem $P_6^{(3,3)} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ caminhos de A para C e $P_6^{(4,2)} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ caminhos de C para B.

Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $20 \cdot 15 = 300.$

Resolução do Exercício 7: [B]

Cenário 1: AAEEI $P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!.2!} = 30$

Cenário 2: AEOUI $P_5 = 5! = 120$

Cenário 3: OOUUI $P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!.2!} = 30$

Cenário 4: AEIII $P_5^{3} = \frac{5!}{3!} = 20$

Cenário 5: OUIII $P_5^{3} = \frac{5!}{3!} = 20$

Cenário 6: IIIII = 1

30 + 120 + 30 + 20 + 20 + 1 = 221

Resolução do Exercício 8 [A]

Indicando pela letra **A, B, C, D, E, F, G** como as poltronas ocupadas e **V e V** como poltronas vazias, temos que permutar:

ABCDEFGVV

O resultado pedido corresponde ao número de permutações de 9 objetos com 2 repetidos:

$P_9^{2} = \frac{9!}{2!}.$

Resolução do Exercício 9: [C]

Vamos indicar pela letra L a movimentação dos pontos no sentido leste e N, norte.
O número de maneiras de ir de A até B, passando ou não por C, é dado pela permutação das letras LLLLNNN

$$P_7^{(4,3)} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35.$$

O número de maneiras de ir de A até C é dado pela permutação das letras LLNN

$$P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6,$$

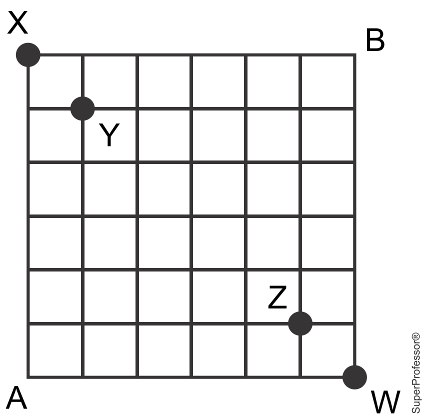
enquanto que o número de maneiras de ir de C até B é dado pela permutação das letras LLN

$$P_3^{(2)} = \frac{3!}{2!} = 3.$$

Desse modo, pelo Princípio Multiplicativo, é possível ir de A até B, passando por C, de $6\cdot 3 = 18$ maneiras.
A resposta é $35 - 18 = 17.$

Resolução do Exercício 10: [E]

Nomeando os demais pontos, sabemos que:



Só há 1 maneira de sair do ponto A e chegar ao ponto B passando pelo ponto X, e o mesmo acontece para o ponto W. Para ir de A até B passando por Y, temos:
De A até Y (1 para a direita e 5 para cima):

$$p_6^{1,5} = \frac{6!}{5!} = 6$$

De Y até B (5 para a direita e 1 para cima):

$$p_6^{5,1} = \frac{6!}{5!} = 6$$

O que totaliza:
$6\cdot 6 = 36$ casos

O mesmo acontece para ir de A até B passando por Z. Sendo assim, o total de casos favoráveis é igual a:
1 + 1 + 36 + 36 = 74