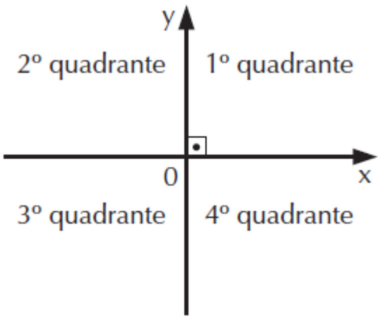
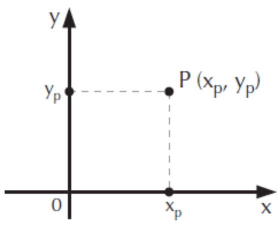
AULA 01
GEOMETRIA ANALÍTICA – PONTO I

1. Plano Cartesiano

O sistema cartesiano ortogonal como já vimos em funções, é composto por duas retas **x** e **y** perpendiculares entre si, no ponto O (origem). A reta x é denominada eixo das abscissas e a reta y é denominada eixo das ordenadas.
Os dois eixos dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes numerados no sentido anti-horário.

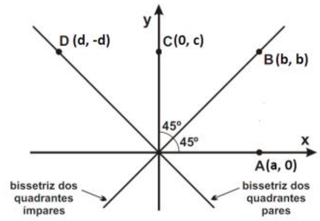


O ponto O é denominado origem do sistema de eixos cartesianos.
Cada ponto do plano cartesiano está associado um par ordenado (x,y) e vice-versa.
Dizemos que (x_P, y_P) são as coordenadas do ponto P, onde o número real x_P é chamado abscissa do ponto e o número real y_P é chamado ordenada do ponto.



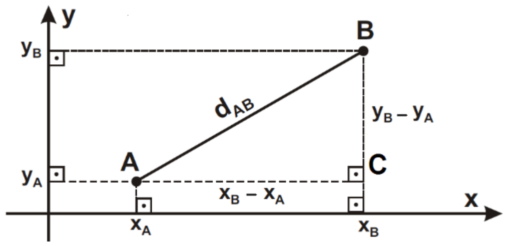
Destacamos abaixo algumas posições particulares de pontos no plano cartesiano:

- Se um ponto A pertence ao eixo das abscissas sua ordenada é nula.
$$\boxed{A(a,0)}$$
- Se um ponto C pertence ao eixo das ordenadas sua abscissa é nula.
$$\boxed{C(0,c)}$$
- Se um ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares suas coordenadas são iguais
$$\boxed{B(b,b)}$$
- Se um ponto D pertence à bissetriz dos quadrantes pares suas coordenadas são simétricas.
$$\boxed{D(d,-d)}$$



2. Distância entre dois pontos

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos do plano cartesiano como mostra a figura abaixo:



A distância entre os pontos A e B indicada por d_{AB} é calculada aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Então: $$\boxed{\mathbf{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}}$$

Exercícios Resolvidos:

1) Determinar a distância entre os pontos $A(2,4)$ e $B(5,8)$.

Resolução: $\begin{cases} A(2,4) \rightarrow x_A = 2;\ y_A = 4 \\ B(5,8) \rightarrow x_B = 5;\ y_B = 8 \end{cases}$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow d_{AB} = 5$$

Resposta: 5 unidades de comprimento

2) Determinar no eixo das abscissas um ponto P, equidistante dos pontos $A(-2,2)$ e $B(2,6)$.

Resolução:

$$\begin{cases} P(x, 0) \rightarrow x_P = x;\ y_P = 0 \\ A(-2,2) \rightarrow x_A = -2;\ y_A = 2 \\ B(2, 6) \rightarrow x_B = 5;\ y_B = 8 \end{cases}$$

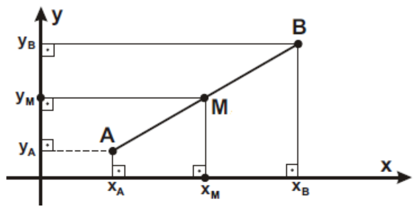
Devemos ter $d_{PA} = d_{PB}$:

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$
$$\sqrt{(x-(-2))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (0-6)^2}$$
$$x^2 + 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 36$$
$$\therefore x = 4$$

Portanto: $P(4, 0)$

3. Ponto Médio de um Segmento

Sejam os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ extremidades de um segmento de reta. As coordenadas do ponto médio do segmento AB são obtidas por médias aritméticas. Acompanhe:



$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Dessa forma: $\boxed{M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)}$

Exercícios

Nível 1

01) O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ sendo $A(1,2)$ e $B(7,8)$ é:

a) $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ b) $(4,5)$ c) $(8,11)$ d) $(13,14)$ e) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

02) O ponto simétrico de $A(1,2)$ em relação à $B(7,8)$ é:

a) $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ b) $(4,5)$ c) $(8,11)$ d) $(13,14)$

03) (ENEM) Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto $A(1; 2)$. No ponto médio entre a loja A e a loja B está o sanitário S, localizado no ponto $S(5; 10)$. Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B.

a) $(-3; -6)$
b) $(-6; -3)$
c) $(3; 6)$
d) $(9; 18)$
e) $(18; 9)$

04) Sendo os pontos A(2, 3) e C(5, 6) vértices opostos de um quadrado, o comprimento do lado desse quadrado é

a) 2
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) 3
e) $5\sqrt{2}$

Nível 2

05) (UFRGS – RS) Sendo os pontos A (– 1, 5) e B(2, 1) vértices consecutivos de um quadrado, o comprimento da diagonal desse quadrado é

a) 2
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) 5
e) $5\sqrt{2}$

06) (UFPEL – RS) Na arquitetura, a matemática é usada a todo momento. A geometria é especialmente necessária no desejo de projetos. Essa parte da Matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir a medidas desses espaços. Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência, que deve ter o formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A(8,4); B(4,6); C(2,4). No ponto médio do lado formado pelos pontos A e C é colocado um suporte para luminárias. Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto B mede, em unidades de comprimento.

a) $\sqrt{37}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$

07) O ponto do eixo das abscissas, equidistantes dos pontos P(-2,2) e Q(2,6), é:

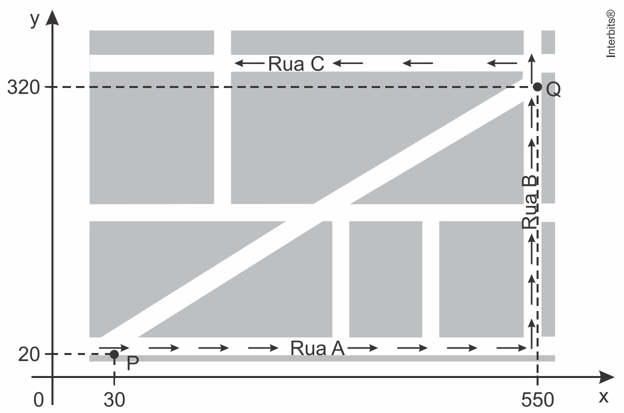
a) A(2,0)
b) B(5,0)
c) C(3,0)
d) D(0,2)
e) E(4,0)

Nível 3

08) (FGV – SP) Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices consecutivos são, respectivamente, (1, 4), (–2, 6) e (0, 8). A soma das coordenadas do quarto vértice é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

09) (ENEM) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

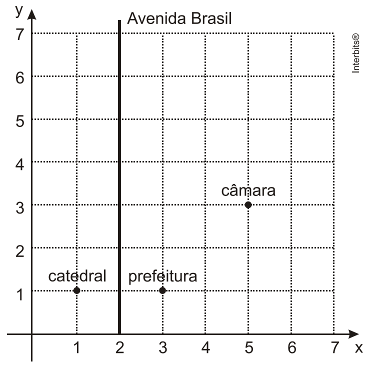
a) (290; 20).
b) (410; 0).
c) (410; 20).
d) (440; 0).
e) (440; 20).

10) (UFRGS – RS) A distância entre os pontos A(–2,y) e B (6,7) é 10. O valor de y é:

a) -1
b) 0
c) 1 ou 13
d) -1 ou 10
e) 2 ou 12

11) (UFSC – SC) Dados os pontos A(-1,-1); B(5,-7) e C(x,2), determine x sabendo que o ponto C é equidistante dos pontos A e B.

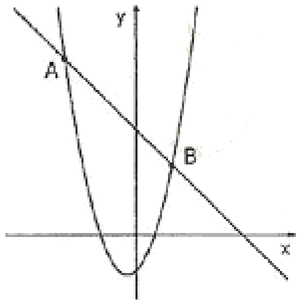
12) (UNICAMP – SP) A figura a seguir apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano.
Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores.



Sabendo que a distância real entre a catedral e a prefeitura é de 500 m, podemos concluir que a distância real, em linha reta, entre a catedral e a câmara de vereadores é de

a) 1500 m.
b) $500\sqrt{5}$ m.
c) $1000\sqrt{2}$ m.
d) $500 + 500\sqrt{2}$ m.

13) (UFRGS – RS) Considere os gráficos das funções f e g, definidas por $f(x) = x^2 + x - 2$ e $g(x) = 6 - x$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, e os pontos A e B, intersecção dos gráficos das funções f e g, como na figura abaixo.



A distância entre os pontos A e B é:

a) $2\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}$

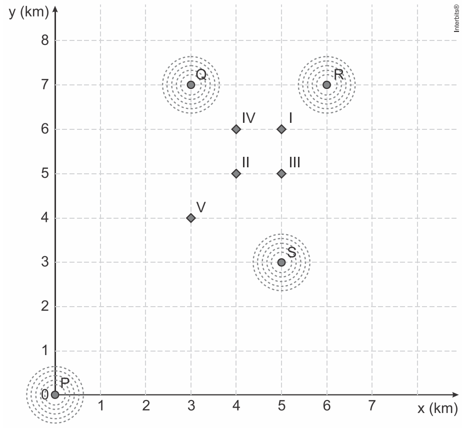
c) $4\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{2}$

e) $6\sqrt{2}$

14) (ENEM) Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a $3\text{ km}, 2\text{ km}$ e 5 km.



Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

a) I b) II c) III d) IV e) V

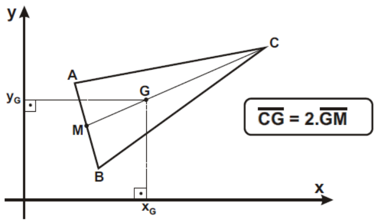
GABARITO – AULA 01

1) b	**2)** d	**3)** d	**4)** d	**5)** e	**6)** c	**7)** e
8) b	**9)** e	**10)** c	**11)** 08	**12)** b	**13)** e	**14)** a

AULA 02
GEOMETRIA ANALÍTICA – PONTO II

1. Mediana e Baricentro

Mediana é o segmento de reta cujas extremidades são um dos vértices do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Num triângulo ABC, denomina-se baricentro ou centro de gravidade ao ponto de encontro das medianas desse triângulo. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos, de maneira que o que tem extremidade em um vértice possui a medida o dobro do que tem extremidades no ponto médio do lado do triângulo.

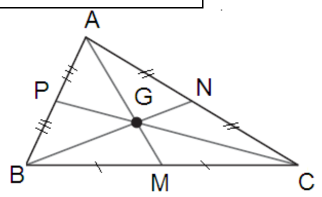


CM é uma mediana
G é o Baricentro

Coordenadas do baricentro de um triângulo

Como você viu, o baricentro de um triângulo ABC divide cada mediana na razão 2 para 1, ou seja:

$$\boxed{\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GP}} = \frac{2}{1}}$$



$$\begin{cases} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \\ C(x_C, y_C) \\ G(x_G, y_G) \end{cases}$$

A partir do exposto, vamos determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo.

Em x:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1} \rightarrow \frac{x_G - x_A}{x_M - x_G} = \frac{2}{1} \rightarrow x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \rightarrow 3x_G = 2x_M + x_A \text{ (I)}$$

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$3x_G = 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) + x_A \rightarrow 3x_G = x_B + x_C + x_A \rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

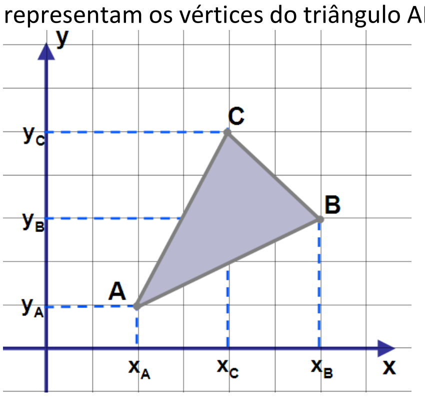
De forma análoga prova-se que: $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Assim as coordenadas do baricentro do triângulo ABC são:

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

2. Área do Triângulo

Considere os três pontos $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B); C(x_C, y_C)$ que representam os vértices do triângulo ABC da figura abaixo.

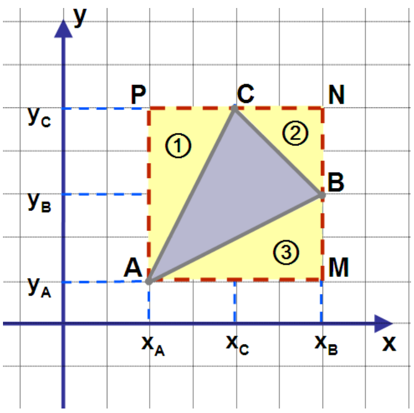


A área do triângulo ABC é dada pela fórmula:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|}$$

Justificativa:

Considere a figura abaixo:



A partir da figura, temos:

$$A_{\Delta ABC} = A_{retAMNP} - A_{\Delta 1} - A_{\Delta 2} - A_{\Delta 3} \text{ (I)}$$

$$A_{retAMNP} = (x_B - x_A)(y_C - y_A) \text{ (II)}$$

$$A_{\Delta 1} = \frac{(x_C - x_A)(y_C - y_A)}{2} \text{ (III)}$$

$$A_{\Delta 2} = \frac{(x_B - x_C)(y_C - y_B)}{2} \text{ (IV)}$$

$$A_{\Delta 3} = \frac{(x_B - x_A)(y_B - y_A)}{2} \text{ (V)}$$

Substituindo (II), (III), (IV), (V) em (I), vem:

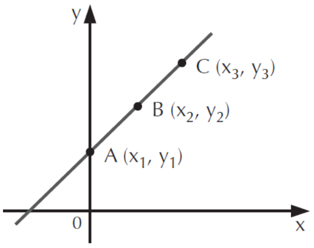
$$A_{\Delta ABC} = \frac{x_B y_C + x_C y_A + x_A y_B - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C}{2}$$

que pode ser escrito assim:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

OBSERVAÇÃO:

Se os pontos A, B e C estiverem alinhados, temos:



$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercícios

Nível 1

01) Os pontos A(2, 4), B(-6, 2) e C(0, -2) são os vértices de um triângulo ABC.

a) Determine as coordenadas do baricentro
b) Determine a área desse triângulo.

02) (PUC – RS) Em uma aula de Geometria Analítica, o professor salientava a importância do estudo de triângulos em Engenharia, e propôs a seguinte questão:

O triângulo determinado pelos pontos A (0,0), B (5,4) e C (3,8) do plano cartesiano tem área igual a _______.

Feitos os cálculos, os alunos concluíram que a resposta correta era:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 14
e) 28

03) Os pontos (1,3), (2,7) e (4,k) do plano cartesiano estão alinhados se e somente se

a) k = 15
b) k = 11
c) k = 14
d) k = 12
e) k = 13

Nível 2

04) Considere os pontos A(8, 3); B(4, 7); C(2, 1); D(6, 1) e E (k, 9). Determine:

a) A área do triângulo ABC
b) A área do quadrilátero ABCD
c) O valor de k de modos que os pontos A, B e E estejam alinhados.

05) (ESPM) Os pontos $O(0,0)$, $P(x,2)$ e $Q(1, x+1)$ do plano cartesiano são distintos e colineares. A área do quadrado de diagonal $\overline{PQ}$ vale:

Nível 3

06) Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:
01. Se (2,1), (3,3) e (6,2) são os pontos médios dos lados de um triângulo, então um dos vértices do triângulo é ponto (5, 0).
02. A distância da origem do sistema cartesiano ao ponto médio do segmento de extremos (-2,-7) e (-4,1) é $3\sqrt{2}$.
04. A área de um triângulo é 25/2 e os seus vértices são (0,1), (2,4) e (-7,k). O valor de k só pode ser 3.
08. A área do polígono, cujos vértices consecutivos são: A(10,4), B(9,7), C(6,10), D(-2,-4) e E(3,-5) em unidades de área, é 81.
16. A área, em unidades de área, do quadrilátero de vértices A(0,0), B(3,1), C(5,3), D(0,3), é 18.

07) Calcule as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC, sabendo que AD é uma de suas medianas e que A(-5, 8) e D(1, -1).
a) (0, 2)
b) (-1, 2)
c) (2, -1)
d) (-1, 1)
e) (2, -2)

GABARITO – AULA 02

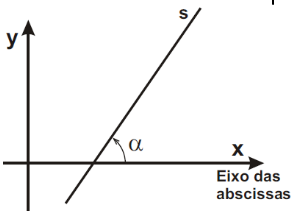
1) a) $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ b) 22 unidades de área
2) d **3)** a **4)** a) 16 b) 20 c) 2
5) 9 **6)** 11 **7)** b

AULAS 03 e 04

GEOMETRIA ANALÍTICA – RETA I

1. Coeficiente Angular da Reta

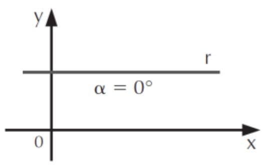
Denomina-se coeficiente angular da reta **s** ao número real **m** tal que $m = tg\alpha$, onde α é a inclinação da reta **s,** medida no sentido antihorário a partir do eixo das abscissas.



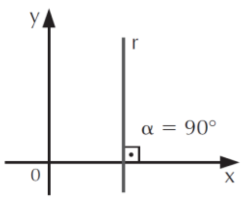
$\boxed{m = tg\alpha}$

Acompanhe os casos abaixo:

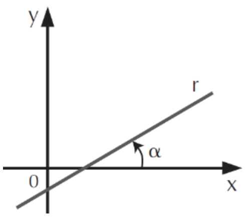
CASO I



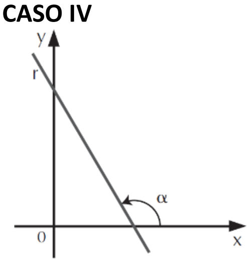
CASO II



CASO III



CASO IV



$\boxed{\text{CASO I: } \alpha = 0^\circ \Leftrightarrow tg0^\circ = 0 \Leftrightarrow m = 0}$

$\boxed{\text{CASO II: } \alpha = 90^\circ \Leftrightarrow tg90^\circ = 0 \Leftrightarrow m \text{ não está definida}}$

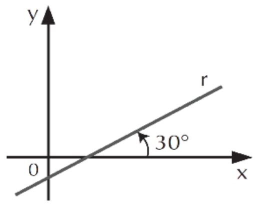
$\boxed{\text{CASO III: } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow tg\alpha > 0 \Leftrightarrow m > 0}$

$\boxed{\text{CASO IV: } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Leftrightarrow tg\alpha < 0 \Leftrightarrow m < 0}$

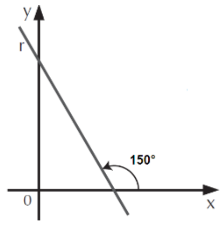
Exemplos:

Determine o coeficiente angular das retas indicadas abaixo:

a)



b)



Resolução:

a) $m = tg\alpha$

$m = tg30^\circ$

$m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

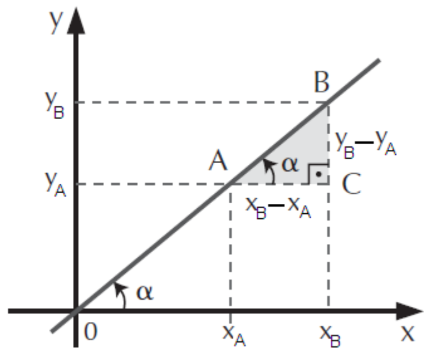
b) $m = tg\alpha$

$m = tg150^\circ$

$m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. Coeficiente Angular da Reta quando se conhecem dois de seus pontos

Considere uma reta não paralela ao eixo das ordenadas que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.



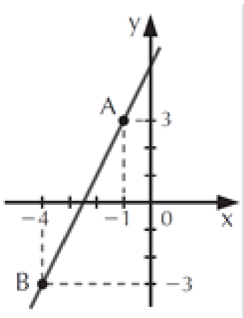
O triângulo ABC da figura acima é retângulo em C.Aplicando a tangente do ângulo α, temos:

$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo: $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$

Exemplo:

Determine o coeficiente angular das reta indicada abaixo:



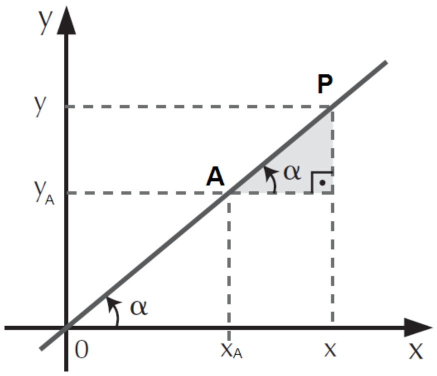
Resolução:

$$\begin{cases} A(-1,3) \\ B(-4,-3) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-3}{-4-(-1)} \Rightarrow m = 2$$

Observação: Dizer que o coeficiente angular da reta é igual a 2 é o mesmo que dizer que a "taxa de variação" da reta é 2, ou seja, "a cada aumento de uma unidade em x significa um aumento de 2 unidades em y".

3. Equação de uma reta conhecendo um ponto e sua inclinação

Podemos obter a equação de uma reta se conhecermos um de seus pontos e sua inclinação.



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$. Então:

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

Observação: No caso da reta ser paralela ao eixo das ordenadas, sua equação é: $\boxed{x = x_A}$

Exemplos:

1) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,4)$ e cujo coeficiente angular é igual a 2.

Resolução:

$$\begin{cases} A(2,4) \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = 2(x-2)$$

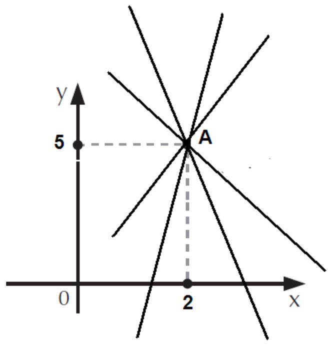
Portanto $2x - y = 0$ é a equação da reta procurada.

2) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$

Resolução:

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = m(x-2)$

Portanto $y - 5 = m(x-2)$ é a equação do feixe de retas que passam pelo ponto $A(2,5)$.



Observe que à medida que o coeficiente angular (m) varia vamos obtendo infinitas retas concorrentes em A, inclusive a reta vertical $x = 2$, para qual não definimos coeficiente angular.

4. Formas de escrever a equação da reta

4.1. Equação Geral

Recebe o nome equação geral de uma reta a toda equação colocada na forma $\boxed{ax + by + c = 0}$ com a e b não simultaneamente nulos.

Exemplo: Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(1,5)$ e $B(3,9)$.

Resolução:

$$\begin{cases} A(1,5) \\ B(3,9) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-5}{3-1} \Rightarrow m = 2$$

Usando o ponto A, temos:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y - 5 = 2(x-1)$$
$$2x - y + 3 = 0$$

Portanto a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $\boxed{2x - y + 3 = 0}$

__**Outro modo de resolução:**__

Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da reta que passa por A e B, podemos afirmar que P, A e B estão alinhados. Então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 3y + 9 - 15 - 9x - y = 0$$
$$\Rightarrow -4x + 2y - 6 = 0$$
$$\Rightarrow 2x - y + 3 = 0$$

Observação:

Considere dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, de coordenadas conhecidas e um ponto genérico de coordenadas (x, y), todos pertencentes à mesma reta.
Podemos definir a equação geral de uma reta através da condição de alinhamento:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante e agrupando os termos semelhantes, temos:

$$\underbrace{(y_A - y_B)}_{a}x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}y + \underbrace{(x_A y_B - x_B y_A)}_{c} = 0$$

ou

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

4.2. Equação Reduzida

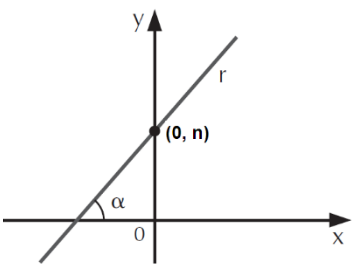
Considere a reta não vertical dada por $ax + by + c = 0$. Isolando y, temos:

$$by = -ax - c \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$, vem:

$$\boxed{y = mx + n}$$

onde **m** é o coeficiente angular da reta, enquanto **n** é o coeficiente linear da reta.
Observação: O coeficiente linear da reta **(n)** indica a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas.



Exercícios

Nível 1

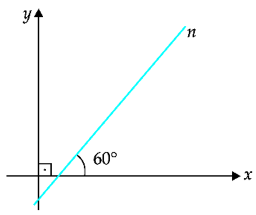
01) A equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(0, -4)$ pertencentes ao plano cartesiano pode ser representada por
a) $6x + y + 4 = 0$.
b) $-6x - y - 1 = 0$.
c) $x + 6y + 4 = 0$.
d) $6x + y - 4 = 0$.
e) $6x - y + 4 = 0$.

02) (UDESC – SC) A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos *A*(1,5) e *B*(4,14) é:

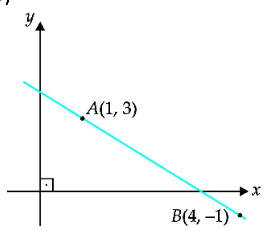
a) 4
b) – 5
c) 3
d) 2
e) 5

03) Determine o coeficiente angular das retas abaixo:

a) r: 2x + 3y + 1 = 0
b)

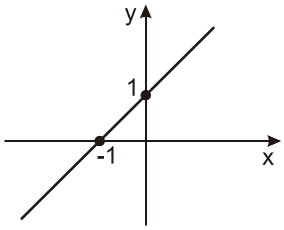


c)



04) Janeiro de 2003 foi um dos meses mais quentes dos últimos anos. Em um certo dia de janeiro, a temperatura da cidade de Joinville, às 10 horas da manhã, era de 25° C, continuou subindo **uniformemente** até às 15 horas, quando alcançou 40° C. Representando esta situação em um gráfico cartesiano na qual a abscissa representa os tempos (em horas) e na ordenada a temperatura (em °C), obtém-se um segmento de reta AB. A equação da reta que contém esse segmento é:
a) 3x + y + 5 = 0
b) 3x – y + 3 = 0
c) 3x + 4y + 3 = 0
d) 3x – y – 5 = 0
e) 5x – y – 3 = 0

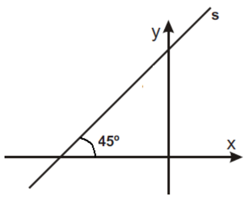
05) (PUC – RS) A equação que representa a reta na figura abaixo é __________.



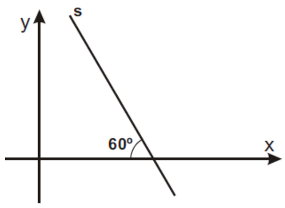
a) y = x
b) y = – x + 1
c) y = – x – 1
d) y = x – 1
e) y = x + 1

06) Determine o coeficiente angular das retas indicadas abaixo:

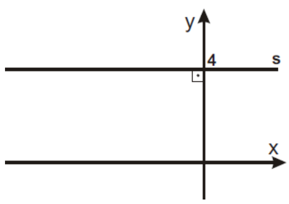
a)



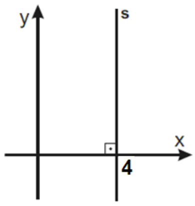
b)



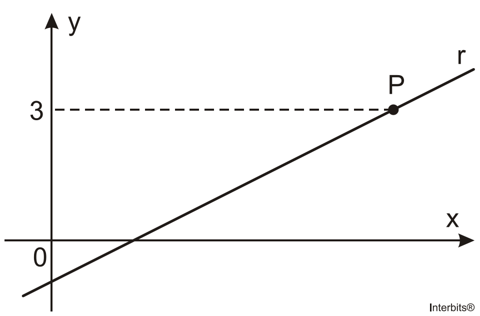
c)



d)



07) (UFPR – PR) A figura abaixo apresenta o gráfico da reta r: 2y – x + 2 = 0 no plano cartesiano.

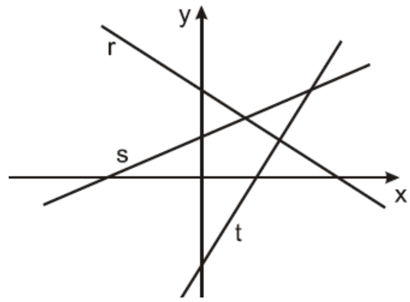


As coordenadas cartesianas do ponto P, indicado nessa figura, são:

a) (3,6).
b) (4,3).
c) (8,3).
d) (6,3).
e) (3,8).

Nível 2

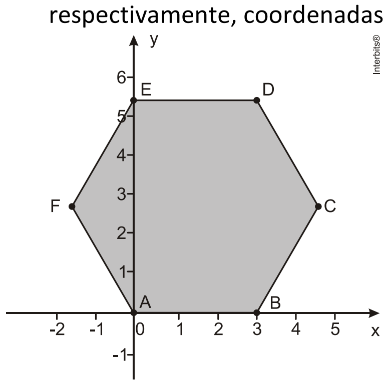
08) (UFRGS – RS) As equações das retas representadas no sistema de coordenadas cartesianas abaixo são 2x + y – 3 = 0, 5x – 4y – 8 = 0 e x – 3y + 3 = 0.



As equações de *r* e *s* são, respectivamente,

a) 2x + y – 3 = 0 e x – 3y + 3 = 0.
b) 2x + y – 3 = 0 e 5x – 4y – 8 = 0.
c) 5x – 4y – 8 = 0 e x – 3y + 3 = 0.
d) x – 3y + 3 = 0 e 2x + y – 3 = 0.
e) x – 3y + 3 = 0 e 5x – 4y – 8 = 0.

09) (UFRGS – RS) No hexágono regular representado na figura abaixo, os pontos A e B possuem, respectivamente, coordenadas (0, 0) e (3,0).

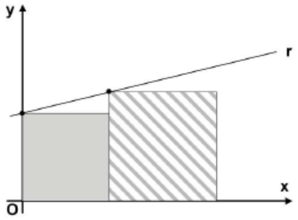


A reta que passa pelos pontos E e B é

a) $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
b) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$
c) $y = -3x + \sqrt{3}$
d) $y = -3x + 3\sqrt{3}$
e) $y = -3x + 3$.

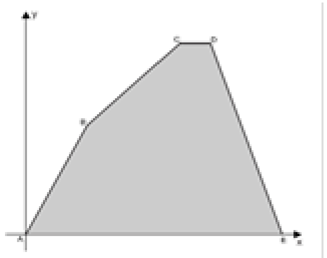
Nível 3

10) (UFPR – PR) Na figura ao lado estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:



a) $x - 2y = -4$
b) $4x - 9y = 0$
c) $2x + 3y = -1$
d) $x + y = 3$
e) $2x - y = 3$

11) (UDESC – SC) A região sombreada da Figura tem como limitantes as retas y = 0, y = 2x, y = x + 2, y = 7 e y = 25 – 3x.



A área da região sombreada é:

a) $\frac{152}{3}$

b) $\frac{319}{6}$

c) $\frac{107}{3}$

d) $\frac{214}{3}$

e) $\frac{86}{3}$

12) (UFPR – PR) Sabe-se que a reta r passa pelos pontos A = (–2,0) e P = (0,1) e que a reta s é paralela ao eixo das ordenadas e passa pelo ponto Q = (4,2). Se B é o ponto em que a reta s intercepta o eixo das abscissas e C é o ponto de interseção das retas r e s, então o perímetro do triângulo ABC é:

a) $3(3+\sqrt{5})$

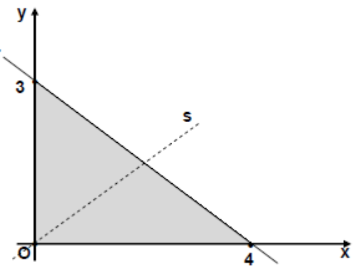
b) $3(5+\sqrt{3})$

c) $5(3+\sqrt{5})$

d) $3(3+\sqrt{3})$

e) $5(5+\sqrt{3})$

13) (UFPR – PR) Considere as retas r e s representadas no plano cartesiano ao lado.



a) Escreva a equação da reta r.
b) Qual deve ser o coeficiente angular da reta s, de modo que ela divida o triângulo cinza em dois triângulos com áreas iguais?

GABARITO – AULAS 03 e 04

1) a **2)** e
3) a) m = – 2/3 b) m = $\sqrt{3}$ c) – 4/3
4) d **5)** e
6) a) 3 b) 2 c) - 4 d) 0 e) não existe
7) c **8)** a **9)** a **10)** a **11)** c **12) a**
13) a) r: 3x + 4y -12 = 0 b) $\frac{3}{4}$

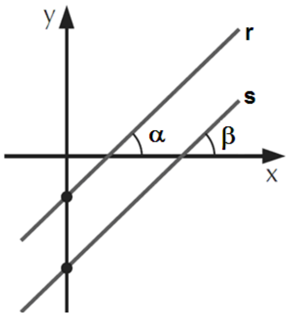
AULAS 05 e 06

GEOMETRIA ANALÍTICA – RETA II

1. Posição entre 2 retas

RETAS PARALELAS DISTINTAS (r//s)

Considere **r** e **s** duas retas não verticais, com inclinações α e β respectivamente.



Se as retas **r** e **s** são paralelas, temos:

$\alpha = \beta \rightarrow tg\alpha = tg\beta \rightarrow \boxed{m_r = m_s}$

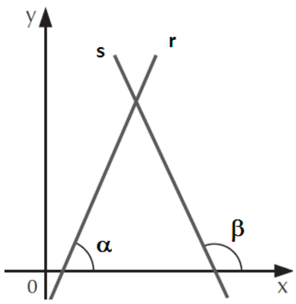
Ou seja:

Se duas retas não verticais são paralelas distintas, seus coeficientes angulares são iguais.

Observação: Se as retas **r** e **s** possuirem além dos mesmos coeficientes angulares, também os mesmos coeficientes lineares, elas serão ditas **retas coincidentes**.

RETAS CONCORRENTES (r x s)

Duas retas **r** e **s** que não possuem mesmo coeficiente angular não são paralelas; consequentemente são ditas **retas concorrentes**.



$\alpha \neq \beta \rightarrow tg\alpha \neq tg\beta \rightarrow \boxed{m_r \neq m_s}$

Caso Particular de Concorrência:

Duas retas r e s não verticais são perpendiculares se $\boxed{m_r . m_s = -1}$

Exercícios Resolvidos

1) Determine o valor de **k** para que a reta $r: 2x + 3y - 1 = 0$ seja paralela à reta $s: kx + 5y - 2 = 0$.

Resolução:

$$\begin{cases} r: 2x + 3y - 1 = 0 \rightarrow y = \dfrac{-2x+1}{3} \therefore m_r = -\dfrac{2}{3} \\ s: kx + 5y - 2 = 0 \rightarrow y = \dfrac{-kx+2}{5} \therefore m_s = -\dfrac{k}{5} \end{cases}$$

Devemos ter: $m_r = m_s$. Logo:

$$-\frac{2}{3} = -\frac{k}{5} \rightarrow -3k = -10 \rightarrow k = \frac{10}{3}$$

Portanto, para que as retas r e s sejam paralelas, devemos ter: $k = \dfrac{10}{3}$.

2) Obter a equação da reta **r,** que passa por $A(2,4)$ e é paralela à reta **s** de equação $3x + y - 1 = 0$

Resolução:

$$\begin{cases} s: 3x + y - 1 = 0 \rightarrow y = -3x + 1 \therefore m_s = -3 \\ r//s \rightarrow m_r = m_s \rightarrow m_r = -3 \end{cases}$$

A reta r passa pelo ponto $A(2,4)$. Então:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y - 4 = -3(x - 2)$$
$$y = -3x + 10$$

Portanto, a equação da reta r é dada por: $y = -3x + 10$

3) Determine o valor de **k** para que a reta $r: 2x + 3y - 1 = 0$ seja perpendicular à reta $s: kx + 5y - 2 = 0$.

Resolução:

$$\begin{cases} r: 2x + 3y - 1 = 0 \rightarrow y = \dfrac{-2x+1}{3} \therefore m_r = -\dfrac{2}{3} \\ s: kx + 5y - 2 = 0 \rightarrow y = \dfrac{-kx+2}{5} \therefore m_s = -\dfrac{k}{5} \end{cases}$$

Devemos ter: $m_r . m_s = -1$. Logo:

$$-\frac{2}{3} . \left(-\frac{k}{5}\right) = -1$$
$$\frac{2k}{15} = -1 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$$

Portanto, para que as retas r e s sejam perpendiculares, devemos ter: $k = -\dfrac{15}{2}$.

Exercícios

Nível 1

01) O valor de k para que as retas 2x + ky = 3 e x + y = 1 sejam paralelas é:

02) As retas 2x + 3y = 1 e 6x – *k*y = 1 são perpendiculares. Então, *k* vale:

03) (UNIOESTE – PR) Os valores de k para que as retas 2x + ky = 3 e x + y = 1 sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são

a) $-\frac{3}{2}$ e 1. b) −1 e 1. c) 1 e −1.
d) −2 e 2. e) 2 e −2.

Nível 2

04) A reta s que passa por $P(1, 6)$ e é perpendicular a $r: y = \frac{2}{3}x + 3$ é

a) $y = \frac{3}{2}x$
b) $y = x + 5$
c) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$
d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

05) Num sistema de coordenadas cartesianas, as retas paralelas r e s têm equações $4x + 10y + 13 = 0$ e $6x + ky + 11 = 0$, respectivamente. O valor real de k que cumpre essas condições é

a) 13. b) 12. c) 15. d) –13. e) –11.

06) (UFPR – PR) Considere a reta r de equação $y = 2x + 1$. Qual das retas abaixo é perpendicular à reta r e passa pelo ponto $P = (4, 2)$?

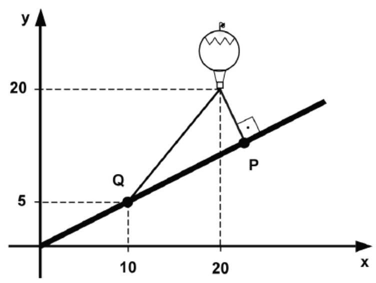
a) $y = \frac{1}{2}x$
b) $y = -2x + 10$
c) $y = -\frac{1}{2}x + 5$
d) $y = -2x$
e) $y = -\frac{1}{2}x + 4$

Nível 3

07) Considerando a reta **r** que passa pelos pontos (1; 2) e (2; –1), é correto afirmar que:

01. A equação da reta **r** é 3x + y – 5 = 0.
02. A reta **r** é paralela à reta que passa pelos pontos (2; 4) e (3; 1).
04. A reta **r** é perpendicular à reta de equação x + 3y – 5 = 0.
08. A reta **r** e a reta de equação 2x + y = 3 se interceptam num único ponto.

08) (UFPR – PR) Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura ao lado descreve a situação de maneira simplificada. Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. As coordenadas do ponto P, indicado na figura, são, então:



a) (21,7).
b) (22,8).
c) (24,12).
d) (25,13).
e) (26,15).

09) (MACK – SP) A equação da mediatriz do segmento que une os pontos $P = (1, -2)$ e $Q = (5, 4)$ é

a) $2x + 3y - 9 = 0$
b) $2x - 3y + 9 = 0$
c) $2x - 3y - 3 = 0$
d) $3x - 2y - 7 = 0$
e) $3x + 2y - 11 = 0$

10) (FGV – SP) No plano cartesiano, considere o triângulo de vértices $A(1,4)$, $B(4,5)$ e $C(6,2)$.

A reta suporte da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ intercepta o eixo x no ponto de abscissa

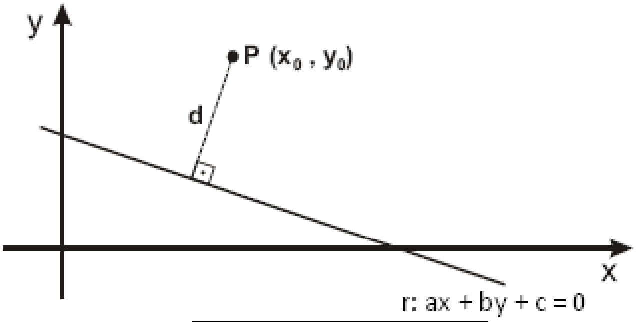
GABARITO – AULAS 05 e 06

1) 2	**2)** 4	**3)** e	**4)** d	**5)** c	**6)** e
7) 11	**8)** c	**9)** a	**10)** 2		

AULA 07
GEOMETRIA ANALÍTICA – RETA III

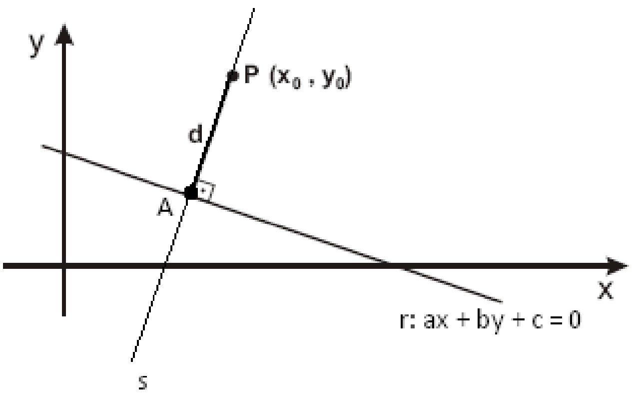
Distância entre ponto e reta

Considere um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r: ax + by + c = 0, a distância do ponto P a reta r pode ser calculada pela expressão:



$$\boxed{d_{(P,r)} = \left|\frac{a.x_0 + b.y_0 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|}$$

Justificativa da fórmula:



Considere a reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r.

$$\boxed{r \perp s \rightarrow m_r.m_s = -1 \rightarrow m_s = \frac{b}{a}}$$

A equação da reta s é dada por:

$$y - y_o = \frac{b}{a}(x - x_o)$$

$$ay - ay_o = bx - bx_o$$

$$-bx + ay + bx_o - ay_o = 0$$

As coordenadas do ponto A, intersecção das retas **r** e **s**, podem ser obtidas através de um sistema de equações:

$$\begin{cases} r:\ ax + by + c = 0 \\ s:\ -bx + ay + bx_o - ay_o = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$\Rightarrow x = \frac{-ac + b(bx_o - ay_o)}{a^2+b^2} \text{ e } y = \frac{-bc - a(bx_o - ay_o)}{a^2+b^2}$$

Portanto, as coordenadas do ponto A são:

$$\left(\frac{-ac + b(bx_o - ay_o)}{a^2+b^2}, \frac{-bc - a(bx_o - ay_o)}{a^2+b^2}\right)$$

Finalmente fazendo a distância entre dois pontos (P e A), vem:

$$d_{PA} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2}$$

$$d_{PA} = \sqrt{\left(\frac{-ac + b(bx_o - ay_o)}{a^2+b^2} - x_o\right)^2 + \left(\frac{-bc - a(bx_o - ay_o)}{a^2+b^2} - y_o\right)^2}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$d_{PA} = \sqrt{\frac{(a.x_o + b.y_o + c)^2}{a^2+b^2}} \rightarrow d_{PA} = d_{p,r} = \frac{|a.x_o + b.y_o + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercício Resolvido

Calcular a distância entre o ponto P(2, 1) e a reta r de equação 4x + 3y – 6 = 0.

Resolução: $d = \frac{|4.2 + 3.1 - 6|}{\sqrt{4^2+3^2}} \Rightarrow d = \frac{5}{5} \Rightarrow d = 1$

Exercícios

Nível 1

01) Dada a reta $r: 2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto $P(5, 6)$, a distância de P à reta r é

a) $\sqrt{91}$
b) $30\sqrt{13}$
c) $\frac{3\sqrt{91}}{91}$
d) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

02) (UFSC – SC – Adaptado) Em um mapa de um deserto, localizado sobre um sistema de eixos cartesianos ortogonal, o faminto Coiote, cuja posição é dada pelo ponto *P(1,2)*, vai tentar capturar o Papa-léguas, que se aproxima do Coiote descrevendo uma trajetória retilínea segundo a equação *3x + 4y = 31*. A menor distância que o Coiote deve percorrer para capturar o Papa-léguas é de:

03) Determine a distância do ponto A (5, 6) à reta r: y = 3x + 2.

Nível 2

04) (UFSC) Dados os pontos A(1, –1), B(–1, 3) e C(2, 7), determine a medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado BC.

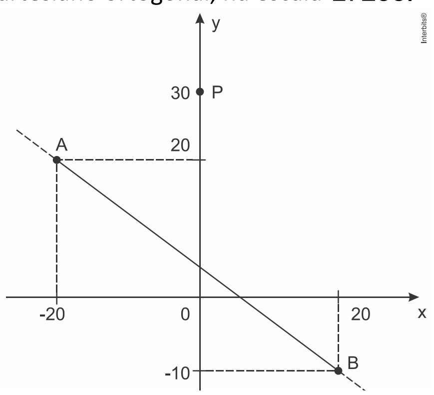
05) (FGV – RJ) A distância entre duas retas paralelas é o comprimento do segmento de perpendicular às retas que tem uma extremidade em uma reta e a outra extremidade na outra reta. No plano cartesiano, a distância entre as retas de equações $3x+4y=0$ e $3x+4y+10=0$ é:

06) (UFJF – MG) Dados os pontos $A=(1,2)$, $B=(3,5)$, $C=(1,1)$ e $D=(2,3)$, considere as afirmações:

I. Os pontos A, B e D são colineares.
II. Uma reta perpendicular à reta determinada pelos pontos A e B tem coeficiente angular $m=-\frac{2}{3}$.
III. A distância do ponto A à reta determinada pelos pontos B e C é 10 unidades de comprimento.

É **CORRETO** afirmar que:
a) Apenas a afirmação II é verdadeira.
b) Apenas a afirmação III é verdadeira.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

07) (FAC ALBERT EINSTEIN) A figura abaixo ilustra as localizações de um Posto de Saúde (P) e de um trecho retilíneo de uma rodovia (AB) em um plano cartesiano ortogonal, na escala $1:200$.



Pretende-se construir uma estrada ligando o Posto à rodovia, de modo que a distância entre eles seja a menor possível. Se a unidade de medida real é o metro, a distância entre o Posto e a rodovia deverá ser igual a:

a) 600 m b) 800 m c) 2 km d) 4 km

Nível 3

08) (UEPB – PB) As retas r, s de equações cartesianas $3x-4y-8=0$ e $4y-3x-12=0$ respectivamente, são tangentes a um círculo C. O perímetro de C em cm é:

a) 4π
b) 2π
c) 8π
d) 4
e) 16π

09) (UDESC – SC) A prefeitura de uma cidade planeja construir um terminal rodoviário em um ponto estratégico da cidade. Para isso será necessário construir duas novas estradas, uma ligando o novo terminal ao aeroporto e outra à principal rodovia de acesso à cidade. Sabe-se que o aeroporto está localizado 8 km a oeste e 6 km ao sul do novo terminal, enquanto que em um trecho sem curvas da rodovia são conhecidos dois pontos de referência A e B. O ponto A dista 2 km a leste e 14 km ao norte do terminal a ser construído, enquanto o ponto B está localizado 8 km a leste e 4 km ao sul do mesmo terminal. Nessas condições, a quantidade mínima x em km de estradas a ser construída pertence ao intervalo:

a) $9,5<x<10,5$
b) $16,5<x<17,5$
c) $15,5<x<16,5$
d) $30<x<31$
e) $31<x<32$

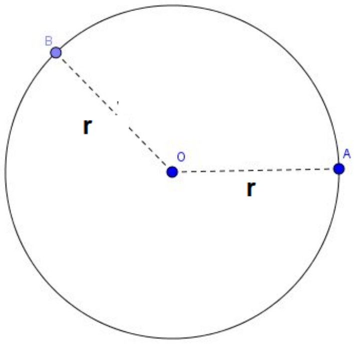
GABARITO – AULA 07					
1) d	**2)** 04	**3)** e	**4)** 04	**5)** 2	**6)** a
6) a	**7)** d	**8)** a	**9)** c		

AULAS 08 e 09

GEOMETRIA ANALÍTICA – CIRCUNFERÊNCIA

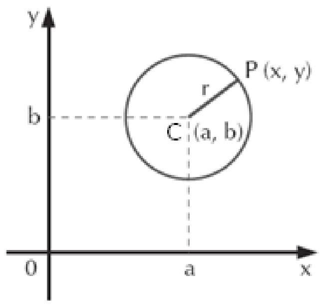
1. Definição

Circunferência é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto O, denominado centro da circunferência, é constante. Essa constante é denominada raio da circunferência (r).



Nesse módulo estaremos estudando a circunferência sob o ponto de vista analítico.

2. Equação Reduzida da Circunferência



Sejam C(a, b) o centro e P(x, y) um ponto da circunferência no plano cartesiano. Observe que a distância de C a P é o raio da circunferência, ou seja:

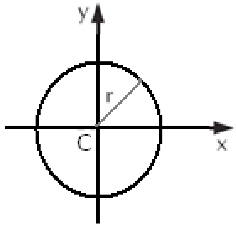
$$\boxed{d_{C,P} = r}$$

Logo: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Portanto: $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

Essa igualdade é dita *equação da circunferência na forma reduzida.*

Observação: Caso a circunferência esteja centrada na origem do sistema cartesiano, sua equação se reduz a:



$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

3. Equação Geral da Circunferência

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência vamos obter:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = r^2$$

Logo:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Fazendo $-2a = A$, $-2b = B$ e $a^2 + b^2 - r^2 = C$, temos:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

Essa igualdade é dita *equação da circunferência na forma geral.*

4. Identificação do centro e do raio de um circunferência

<u>**Quando a equação vem na forma reduzida:**</u>

Neste caso as coordenadas do centro e a medida do raio vem diretamente pela comparação com a equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exemplo:

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 36$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \begin{cases} a = 2 \;\text{ e }\; b = 5 \rightarrow C(2, 5) \\ r^2 = 36 \rightarrow r = 6 \end{cases}$$

<u>**Quando a equação vem na forma geral:**</u>

Neste caso as coordenadas do centro e a medida do raio vem por dois modos:

Exemplo: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$

Modo 1: A equação da circunferência na forma geral é dada por: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$. Fazendo a comparação com $x^2+y^2-6x-4y-12=0$, temos:

$$\begin{array}{ccccc} x^2+y^2 & -2a\,x & -2b\,y & +\underbrace{a^2+b^2-r^2} & =0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ x^2+y^2 & -6x & -4y & -12 & =0 \end{array}$$

Daí :

$$\begin{cases} -2a=-6\to a=3 \\ -2b=-4\to a=2 \\ a^2+b^2-r^2=-12 \\ 3^2+2^2-r^2=-12\to r=5 \end{cases}$$

Portanto, o centro da circunferência é o ponto (3, 2) e o raio é 5..

Modo 2: No ensino fundamental você estudou que:

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

A nossa ideia é colocar a equação $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ na forma reduzida para que as coordenadas do centro e a medida do raio venham diretamente por comparação.

Podemos escrever a equação $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ assim:

$$\underbrace{(x^2-6x+...)}_{\text{I}}+\underbrace{(y^2-4y+...)}_{\text{II}}=12$$

Para que a expressão I seja um trinômio quadrado perfeito devemos substituir as reticências por 9 e na expressão II por 4. Daí para que a igualdade seja mantida devemos somar ao segundo membro 9 e 4.

Assim:

$$\underbrace{(x^2-6x+...)}_{\text{I}}+\underbrace{(y^2-4y+...)}_{\text{II}}=12$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=12+9+4$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25$$

Logo, a equação $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ representa um circunferência de centro C(3, 2) e raio 5.

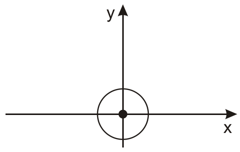
Exercícios

Nível 1

01) Determine as coordenadas do centro e o raio das seguintes circunferências dadas pelas equações abaixo:

a) $(x-2)^2+(y-1)^2=16$
b) $(x+2)^2+y^2=25$
c) $x^2+(y-1)^2=81$
d) $x^2+y^2=9$
e) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$
f) $2x^2+2y^2-12x+8y-6=0$
g) $x^2+y^2-8x-2y+1=0$
h) $x^2+y^2-8x-4y+15=0$

02) (PUC – RS) Resolver a questão com base na regra 2 da FIFA, segundo a qual a bola oficial de futebol deve ter sua maior circunferência medindo de 68cm a 70cm. Considerando essa maior circunferência com 70cm e usando um referencial cartesiano para representá-la, como no desenho abaixo, poderíamos apresentar sua equação como



a) $x^2+y^2=\dfrac{35}{\pi}$

b) $x^2+y^2=\left(\dfrac{35}{\pi}\right)^2$

c) $x^2+y^2=\dfrac{70}{\pi}$

d) $x^2+y^2=\left(\dfrac{70}{\pi}\right)^2$

e) $x^2+y^2=70^2$

03) (UFSM – RS) Uma antena de telefone celular rural cobre uma região circular de área igual a $900\pi\,km^2$. Essa antena está localizada no centro da região circular e sua posição no sistema cartesiano, com medidas em quilômetros, é o ponto (0,10).

Assim, a equação da circunferência que delimita a região circular é

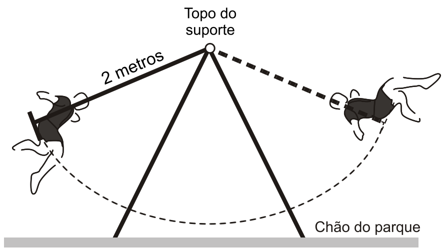
a) $x^2+y^2-20y-800=0.$
b) $x^2+y^2-20y+70=0.$
c) $x^2+y^2-20x-800=0.$
d) $x^2+y^2-20y-70=0.$
e) $x^2+y^2=900.$

Nível 2

04) (UERN – RN) O raio da circunferência determinada pela equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ é, em unidades de medida:
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

05) A equação da circunferência que tem um dos diâmetros com extremidades nos pontos $A(-1, 3)$ e $B(3, -5)$ é dada por:
a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 20.$
b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 20.$
c) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 80.$
d) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 80.$
e) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 20.$

09) (ENEM) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.

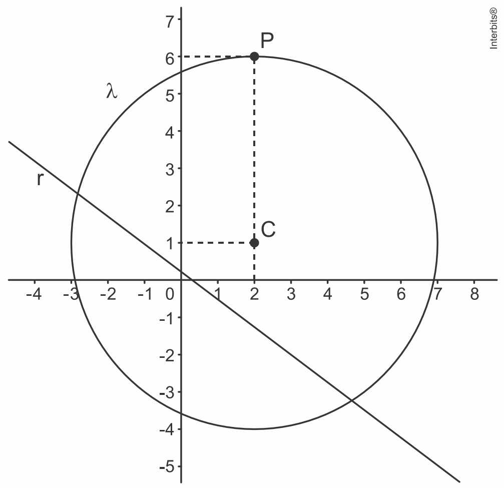


Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.
A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função
a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
c) $f(x) = x^2 - 2$
d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Nível 3

07) (UFJF – MG) Determine a distância entre o centro da circunferência $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$ e a reta $3y = -4x - 1.$
a) $\frac{12}{5}$
b) $\frac{4}{5}$
c) 5
d) 1
e) $\frac{1}{5}$

08) (ACAFE – SC) Na figura a seguir a reta $(r): 3x + 4y - 1 = 0$ é secante à circunferência λ que passa pelo ponto P e tem centro no ponto C. As retas $s_1: 3x + 4y + c' = 0$ e $s_2: 3x + 4y + c'' = 0$ são secantes à circunferência λ de modo que cada reta forma uma corda cujo comprimento é igual a 8 unidades de comprimento.



Se as retas s_1, s_2 e r são paralelas, o valor da soma $c' + c''$ é:
a) 0
b) -20
c) 5
d) -25

GABARITO – AULAS 08 e 09

1) a) C(2, 1) R = 4 b) C(-2, 0) R = 5 c) C(0, 1) R = 9
d) C(0, 0) R = 3 e) C(2, 3) R = 5 f) C(3, -2) R = 4
g) C(4,1) R = 4 h) C(4, 2) R = $\sqrt{5}$
2) b **3)** a **4)** d **5)** a **6)** d **7)** b
8) b

AULA 10

GEOMETRIA ANALÍTICA – CIRCUNFERÊNCIA - COMPLEMENTOS

1. Condição de existência

Vamos comparar a equação de uma circunferência com uma equação do 2º grau completa.
$x^2 + y^2 + Kxy + Ax + By + C = 0$

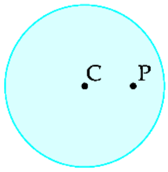
Sendo assim essa equação só irá representar a equação de uma circunferência se e só se:

- Os coeficientes de x^2 e y^2 forem iguais e diferentes de zero.
- Não existir termo em xy, ou seja ter K = 0.
- $A^2 + B^2 > 4C$

2. Posições relativas - Ponto e Circunferência

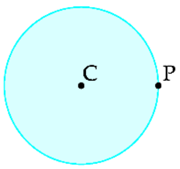
Considere um ponto $P(x_o, y_o)$ do plano e uma circunferência de equação $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
Em relação a circunferência, o ponto P pode assumir as seguintes posições:

1) Interior à circunferência



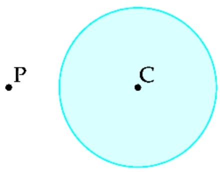
$$\boxed{d_{C,P} < r \leftrightarrow (x_o-a)^2+(y_o-b)^2 < r^2}$$

2) Pertence à circunferência



$$\boxed{d_{C,P} = r \leftrightarrow (x_o-a)^2+(y_o-b)^2 = r^2}$$

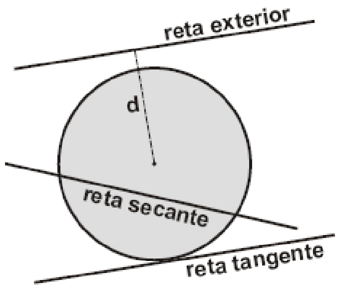
3) Exterior à circunferência



$$\boxed{d_{C,P} > r \leftrightarrow (x_o-a)^2+(y_o-b)^2 > r^2}$$

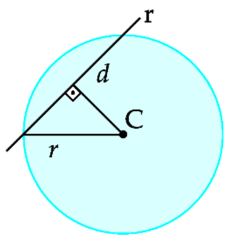
2. Posições relativas – Reta e Circunferência

Dada uma reta $r: ax+by+c=0$ do plano, e uma circunferência $\lambda: (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Em relação à circunferência, a reta pode assumir as seguintes posições:



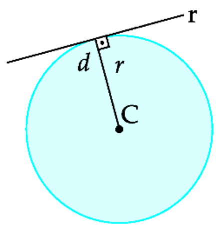
Para conhecermos a posição relativa entre reta e circunferência, basta compararmos a distância do centro C à reta r com o raio da circunferência.

SECANTE



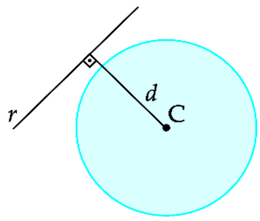
$$\boxed{d_{C,r} < R}$$

TANGENTE



$$\boxed{d_{C,r} = R}$$

EXTERNA



$$\boxed{d_{C,r} > R}$$

Outro Método:
Outro modo para determinar a posição da reta em relação à circunferência é substituir a equação da reta na equação da circunferência. Assim, teremos uma equação do 2º Grau com discriminante Δ. Se:

$\Delta < 0 \Rightarrow$ reta externa (não existe ponto de intersecção)
$\Delta = 0 \Rightarrow$ reta tangente (existe um ponto de intersecção)
$\Delta > 0 \Rightarrow$ reta secante (existe dois pontos de intersecção)

Exercícios Resolvidos

1) Verifique a posição da reta $r: 3x + 4y + 4 = 0$ em relação à circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Resolução: A circunferência dada tem centro $C(1,2)$ e raio $R = 5$.

$$d_{C,r} = \frac{|3.1 + 4.2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

Temos que $d_{C,r} < R$, logo a reta r é **secante** à circunferência.

2) Verifique a posição da reta $r: 12x + 5y - 4 = 0$ em relação à circunferência $\lambda: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$.

Resolução: A circunferência dada tem centro $C(3,4)$ e raio $R = 4$.

$$d_{C,r} = \frac{|12.3 + 5.4 - 4|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = 4$$

Temos que $d_{C,r} = R$, logo a reta r é **tangente** à circunferência.

3) Verifique a posição da reta $r: 6x + 8y + 4 = 0$ em relação à circunferência $\lambda: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Resolução: A circunferência dada tem centro $C(3,1)$ e raio $R = 2$.

$$d_{C,r} = \frac{|6.3 + 8.1 + 4|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 3$$

Temos que $d_{C,r} > R$, logo a reta r é **externa** à circunferência.

Exercícios

Nível 1

01) Determinar a posição dos pontos $A(-2,3)$; $B(-4;6)$ e $C(4,2)$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$.

02) Considere a reta de equação $4x + 3y - 1 = 0$, e a circunferência, de equação $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Qual a posição relativa da reta em relação à circunferência:

03) (UFPR – PR) Considerando a circunferência C de equação $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$, avalie as seguintes afirmativas:

1. O ponto P(4,2) pertence a C.
2. O raio de C é 5.
3. A reta $y = \frac{4}{3}x$ passa pelo centro de C.

Assinale a alternativa correta.

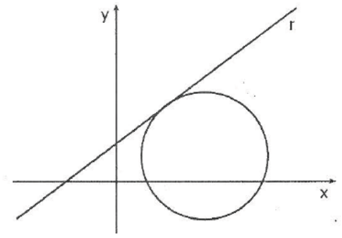
a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira
b) Somente a afirmativa 2 é verdadeira
c) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras
d) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras
e) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras

04) Em qual das alternativas a seguir, o ponto P pertence à circunferência β?

a) $P(5, 6); \beta: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4$
b) $P(1, 2); \beta: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$
c) $P(1, 5); \beta: x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$
d) $P(1, 3); \beta: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$
e) $P(3, 1); \beta: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$

Nível 2

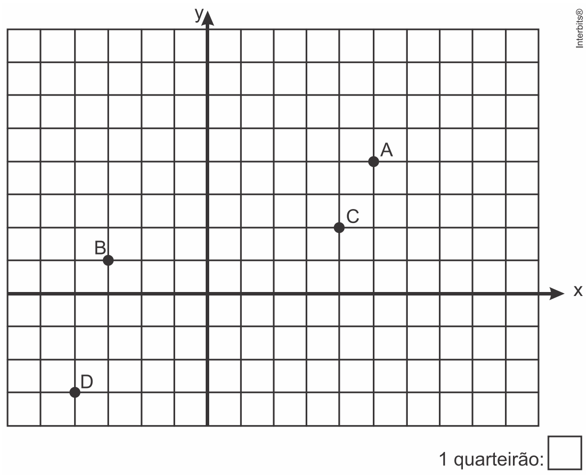
05) (UFRGS – RS) Um círculo tangencia a reta r, como na figura abaixo.



O centro do círculo é o ponto (7, 2) e a reta r é definida pela equação $3x - 4y + 12 = 0$.
A equação do círculo é:

a) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 25$
b) $(x + 7)^2 + (y + 2)^2 = 25$
c) $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 36$
d) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 36$
e) $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 = 36$

06) (ENEM) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.
A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos *A*, *B*, *C* e *D* representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \le 0$.
A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas
a) A e C.
b) B e C.
c) B e D.
d) A, B e C.
e) B, C e D.

Nível 3

07) (ACAFE – SC) A circunferência λ passa pelos pontos $A(-1, -1)$, $B(1, 5)$ e $C(3, 1)$. A reta $r: x + 3y - 6 = 0$ e a circunferência λ são secantes. A área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e os pontos de intersecção entre a reta r e a circunferência λ, tem medida igual a:
a) 6 unidades de área.
b) 12 unidades de área.
c) 4 unidades de jrea.
d) 10 unidades de área.

08) (ACAFE – SC) Considere a circunferência que passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(-7, 0)$ e que tem como centro um ponto da reta r de equação $y = 2x - 1$, representadas no plano cartesiano.

Assim, analise as seguintes proposições:

I. A equação da circunferência é dada por: $x^2 + y^2 + 5x - 3y - 14 = 0$.
II. A menor distância entre a circunferência e o ponto $Q(4, 7)$ é igual a $2\sqrt{5}$.
III. A área do quadrado inscrito na circunferência é 45 u.a.
IV. As retas de equação $2y - x + k = 0$ são tangentes à circunferência. Portanto, a soma dos possíveis valores de k é igual a 10.

Está(ao) **correta(s)** apenas a(s) afirmação(ões):
a) I e III.
b) II e IV.
c) I, II e III.
d) IV.

09) (UFPR – PR) Uma reta passando pelo ponto $P(16,-3)$ é tangente ao círculo $x^2+y^2=r^2$ em um ponto Q. Sabendo que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é de 12 unidades calcule:

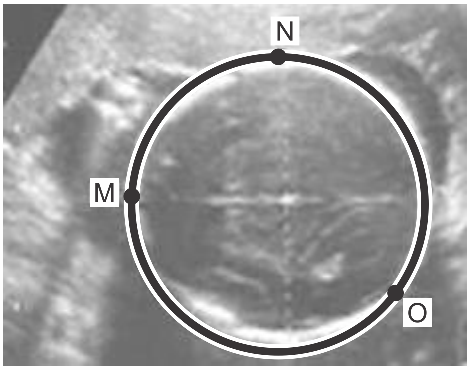
a) a distância do ponto P à origem do sistema cartesiano;
b) a medida do raio r da circunferência.

10) (UFSC – SC) Duas retas r e s, perpendiculares, interceptam-se no interior de uma circunferência γ, de centro $C\,(1,3)$. Os pontos de intersecção da reta r com a circunferência γ são $A\,(1,-2)$ e $B\,(5,6)$. O ponto $D\,(-4,3)$ é intersecção da reta s com a circunferência γ.

01) A equação da circunferência γ é $x^2+y^2-2x-6y-15=0$.
02) A equação da reta s é $x+2y-2=0$.
04) O ponto $E\,(4,1)$ também é ponto de intersecção da reta s com a circunferência γ.
08) O ponto $P(0,2)$ é ponto de intersecção das retas r e s.

11) (ACAFE – SC) Analise o caso e responda: Qual a medida do perímetro cefálico do bebê se $\pi=3{,}14$.

O ultrassom morfológico é um exame muito utilizado para identificar doenças de um bebê que ainda está no ventre da mãe. O formato, a estrutura e a medida da cabeça do bebê podem ser analisados e comparados com medidas de referência.



A figura representa a cabeça de um bebê num exame desse tipo. Através de recursos computacionais, define-se uma circunferência num sistema de coordenadas cartesianas através de três pontos:
$M(-3,3)$, $N(2,8)$ e $O(6,0)$.
O comprimento dessa circunferência corresponde ao que os médicos chamam de perímetro cefálico. No caso indicado na figura acima, por um problema técnico, o computador não indicou o comprimento da circunferência. Sabe-se que cada unidade linear do plano cartesiano que contém a figura corresponde a $1\,\text{cm}$ *na medida real.*

a) Superior a $40\,\text{cm}$.
b) Entre $30\,\text{cm}$ e $35\,\text{cm}$.
c) Inferior a $30\,\text{cm}$.
d) Entre $35\,\text{cm}$ e $40\,\text{cm}$.

GABARITO – AULAS 08 e 09
1) A é interno, B pertence e C é externo à circunferência.
2) secante. **3)** e **4)** a **5)** a **6)** d
7) a **8)** b **9)** * **10)** 03 **11)** b

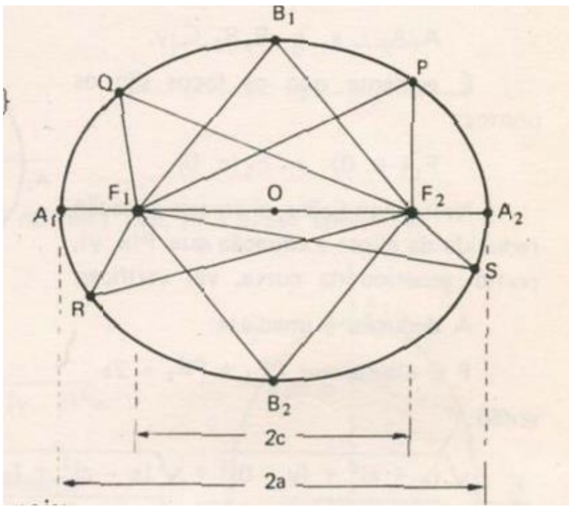
9) a) $d_{P,O}=\sqrt{16^2+(-3)^2}=\sqrt{265}$. b) $r=\overline{OQ}=11\text{u.c.}$

AS CÔNICAS
GEOMETRIA ANALÍTICA – ELIPSE

1. Elipse

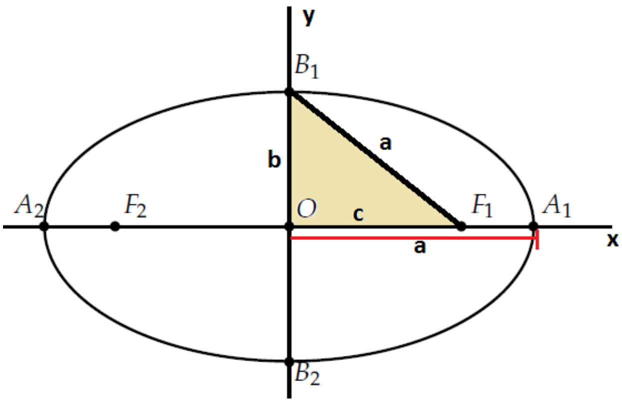
Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 de um plano α (denominados focos), com 2c a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (2a > 2c).

$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} PF_1 + PF_2 = 2a \\ B_1F_1 + B_1F_2 = 2a \\ \vdots \\ RF_1 + RF_2 = 2a \end{array}}$$

Elementos de uma elipse



- O é o centro da elipse
- $A_1A_2 = 2a$ é a medida do eixo maior
- $B_1B_2 = 2b$ é a medida do eixo menor
- $F_1F_2 = 2c$ é a medida da distância focal

- **Relação Auxiliar**

No triângulo OF_1B_1 é fácil perceber que:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

- **Excentricidade**

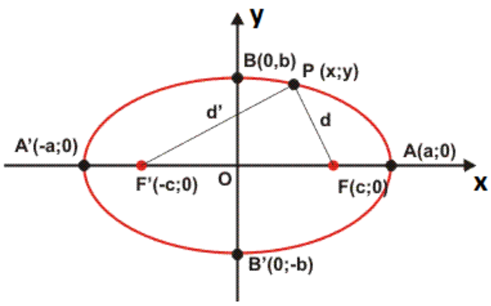
Denomina-se excentricidade na elipse à razão:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

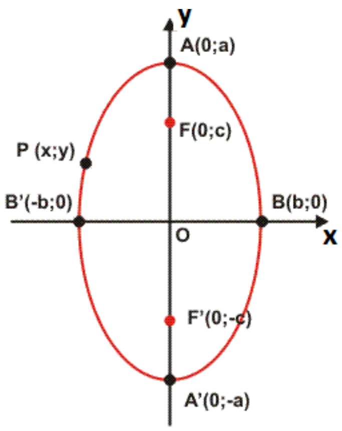
Como $a > c > 0$ segue que: $0 < e < 1$
A excentricidade mede a abertura da figura (mais achatada ou mais arredondada). Nesse caso, quanto mais próximo de 1 estiver a excentricidade, mais achatada é a elipse e, quanto mais próximo de zero, mais arredondada ela será.

Equações da elipse

1º Caso: Focos sobre o eixo x: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

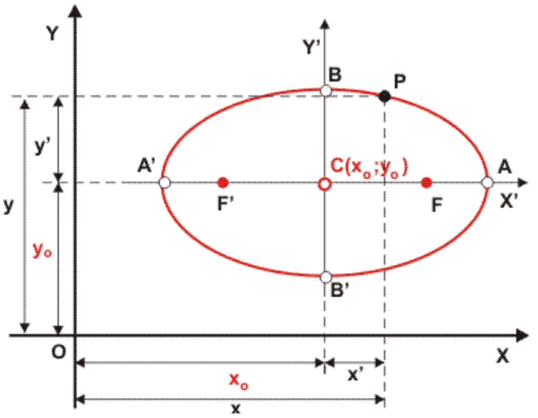


2º Caso: Focos sobre o eixo y: $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$



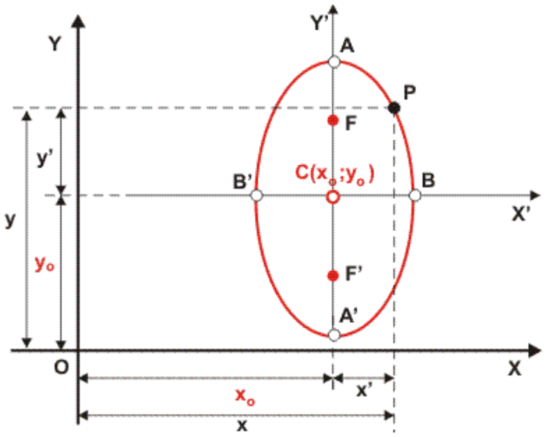
Observação: Elipse com centro deslocado:

1º Caso: Eixo maior paralelo ao eixo x



$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}+\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$

2º Caso: Eixo maior paralelo ao eixo y



$$\frac{(x-x_o)^2}{b^2}+\frac{(y-y_o)^2}{a^2}=1$$

Exercícios

Nível 1

01) As coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 25y^2 = 225$ são:

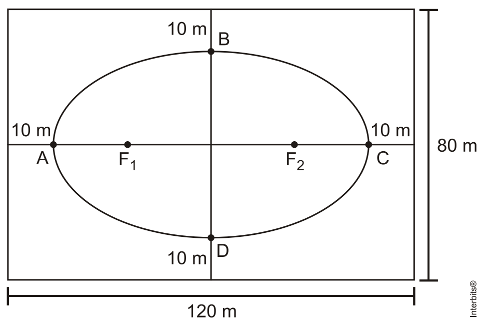
a) (-3, 0) e (3, 0)
b) (-2, 0) e (2, 0)
c) (-4, 0) e (4, 0)
d) (-5, 0) e (5, 0)
e) (-6, 0) e (6, 0)

02) O valor da excentricidade da elipse de equação $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$, é:

03) A equação $\frac{x^2}{144}+\frac{x^2}{225}=1$ representa uma

a) elipse com focos em $(0, 9)$ e $(0, -9)$.
b) circunferência de raio igual 9.
c) circunferência de raio igual 8.
d) hipérbole.
e) elipse com centro em (12, 15)

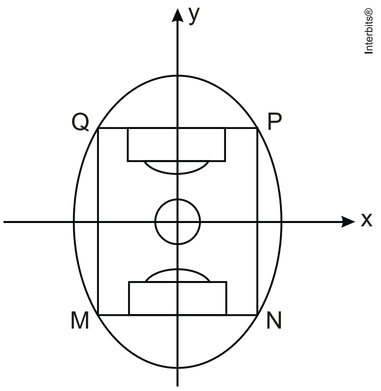
04) (UFPB – PB) A secretaria de infraestrutura de um município contratou um arquiteto para fazer o projeto de uma praça. Na figura a seguir, está o esboço do projeto proposto pelo arquiteto: uma praça em formato retangular medindo 80 m x 120 m, onde deverá ser construído um jardim em forma de elipse na parte central.



Estão destacados na figura os segmentos AC e BD que são, respectivamente, o eixo maior e o menor da elipse, bem como os pontos F_1 e F_2, que são os focos da elipse onde deverão ser colocados dois postes de iluminação.
Com base nessas informações, conclui-se que a distância entre os postes de iluminação será, aproximadamente, de:

Nível 2

05) (ESPCEX) Num estádio de futebol em forma de elipse, o gramado é o retângulo MNPQ, inscrito na cônica, conforme mostra a figura. Escolhendo o sistema de coordenadas cartesianas indicado e tomando o metro como unidade, a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{36^2}+\frac{y^2}{60^2}=1.$ Sabe-se também que os focos da elipse estão situados em lados do retângulo MNPQ.



Assim, a distância entre as retas MN e PQ é

a) 48 m
b) 68 m
c) 84 m
d) 92 m
e) 96 m

06) (ACAFE – SC) Se a elipse de equação $3x^2+2y^2-12=0$ intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B, e o eixo das ordenadas nos pontos C e D, então a área do quadrilátero de vértices A, B, C e D é:

a) $8\sqrt{6}$ unidades de área.
b) $\sqrt{6}$ unidades de área.
c) $2\sqrt{6}$ unidades de área.
d) $4\sqrt{6}$ unidades de área.

Nível 3

07) (EPCAR) No plano cartesiano, os pontos $P(x, y)$ satisfazem a equação $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ da curva $\lambda.$

Se F_1 e F_2 são os focos de $\lambda,$ tais que a abscissa de F_1 é menor que a abscissa de $F_2,$ é INCORRETO afirmar que

a) a soma das distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é igual a $10.$
b) F_1 coincide com o centro da curva $x^2+y^2+6x-4y=0.$
c) F_2 é exterior a $x^2+y^2=25.$
d) o ponto de abscissa máxima de λ pertence à reta $y=x-8.$

08) (UECE – CE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, os pontos $P(5, 0)$ e $Q(0, y)$ estão sobre o gráfico da elipse cujos focos são os pontos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0).$ Nessas condições, o perímetro do triângulo $QF_1F_2,$ em u.c., é

u.c. $\equiv$ unidade de comprimento

a) $20.$
b) $18.$
c) $22.$
d) $16.$

09) (ESPCEX) Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.

a) Seu centro é (– 2,1).
b) A medida do seu eixo maior é 25.
c) A medida do seu eixo menor é 9.
d) A distância focal é 4.
e) Sua excentricidade é 0,8.

GABARITO – ELIPSE

1) c **2)** 0,6 **3)** 68m **4)** d **5)** e **6)** d **7)** b
8) d **9)** e

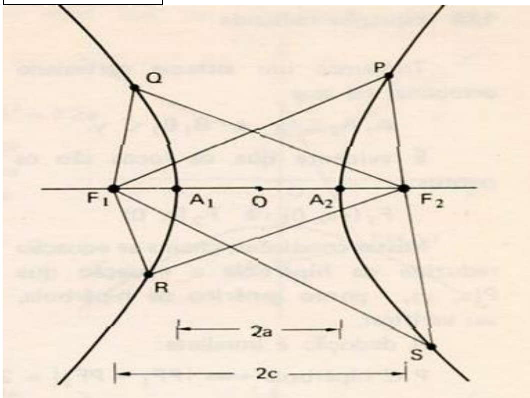
AS CÔNICAS

GEOMETRIA ANALÍTICA – HIPÉRBOLE

Hipérbole

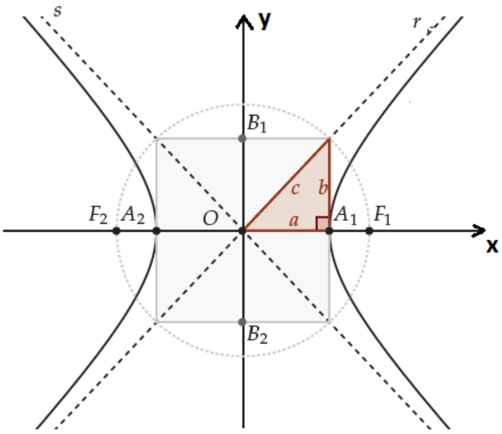
Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 de um plano α (denominados focos), com 2c a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos P de α cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é a constante 2a (2c > 2a).

$$\boxed{|PF_1 - PF_2| = 2a}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} |PF_1 - PF_2| = 2a \\ |QF_1 - QF_2| = 2a \\ \vdots \\ |RF_1 - RF_2| = 2a \end{array}}$$

Elementos de uma hipérbole



- O é o centro da hipérbole
- $A_1A_2 = 2a$ é a medida do real ou eixo transverso.
- $B_1B_2 = 2b$ é a medida do eixo imaginário ou eixo conjugado.
- $F_1F_2 = 2c$ é a medida da distância focal

- **Relação Auxiliar**

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

- **Excentricidade**

Denomina-se excentricidade na hipérbole à razão:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

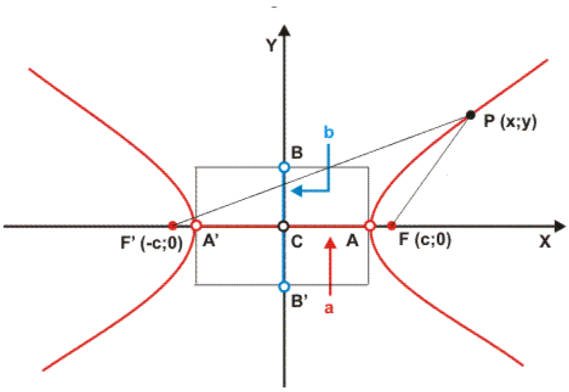
Como $c > a > 0$ segue que: $e > 1$

- **Hipérbole equilátera**

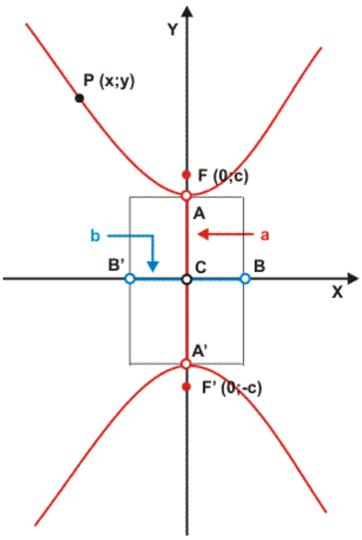
Se a = b, dizemos que a hipérbole é equilátera.

Equações da hipérbole

1º Caso: Focos sobre o eixo x: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

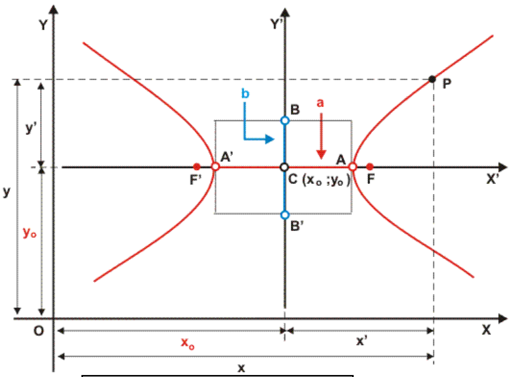


2º Caso: Focos sobre o eixo y: $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$



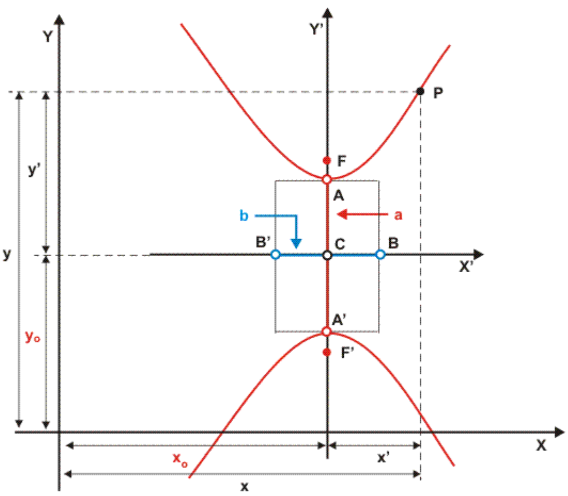
Observação: Hipérbole com centro deslocado:

1º Caso: Eixo transverso paralelo ao eixo x



$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2}-\frac{(y-y_o)^2}{b^2}=1$$

2º Caso: Eixo transverso paralelo ao eixo y



$$\frac{(y-y_o)^2}{a^2}-\frac{(x-x_o)^2}{b^2}=1$$

Exercícios

Nível 1

01) O valor da excentricidade da hipérbole de equação $9x^2-25y^2=225$ é:

a) 23

b) $\frac{\sqrt{34}}{5}$

c) $\sqrt{23}$

d) $\frac{\sqrt{14}}{3}$

e) 34

02) Qual das equações abaixo representa a equação de uma hipérbole de eixo real horizontal medindo 10, centro na origem e foco $F_1(-7,0)$

a) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{14}=1$

b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

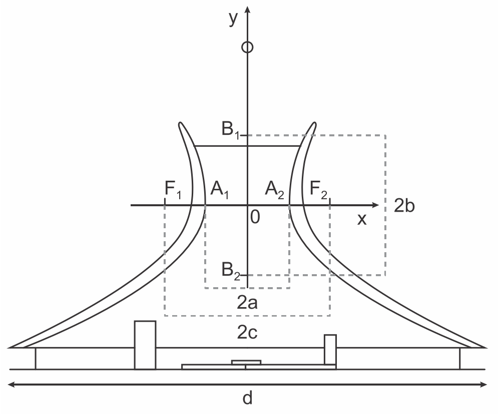
c) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$

d) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{24}=1$

e) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

Nível 2

03) (UFSC adaptada) A catedral de Brasília foi projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer. Sua estrutura se destaca pela beleza e pela forma, um hiperboloide de rotação. A figura abaixo destaca os principais elementos da hipérbole associada à forma da catedral e é possível perceber que ela tem como base um círculo de diâmetro d. Supondo que a equação dessa hipérbole seja $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{400}=1$ e que a medida do diâmetro tenha 10 metros a mais que a distância focal, então a medida d será igual a:



04) (UEM – PR) Um aluno desenhou, em um plano cartesiano, duas cônicas (elipse ou hipérbole), uma de excentricidade 0,8 e outra de excentricidade 2,4, tendo ambas como foco o par de pontos (−12,0) e (12,0).
Assinale o que for **correto**.

01) A cônica de excentricidade 0,8 é uma hipérbole.
02) A cônica de excentricidade 2,4 passa pelo ponto (5,0).
04) As cônicas descritas possuem quatro pontos em comum.
08) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{81}=1$ é uma equação para a cônica de excentricidade 0,8.
16) A cônica de excentricidade 0,8 passa pelo ponto (0,9).

Nível 3

05) Em relação a hipérbole de equação $5x^2-4y^2-20x-8y-4=0$, podemos afirmar:

a) o centro possui coordenadas C(3, −2).
b) seu eixo real mede 6.
c) seu eixo imaginário mede $\sqrt{5}$.
d) um dos focos possui coordenadas $(5,-1)$.
e) A hipérbole possui centro na origem.

06) (ESPCEX) Uma hipérbole tem focos $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$ e passa pelos pontos $P(3,0)$ e $Q(4,y)$, com $y>0$. O triângulo com vértices em F_1, P e Q tem área igual a

GABARITO – HIPÉRBOLE

1) b **2)** c **3)** 60m **4)** 30 **5)** d **6)** $\frac{16\sqrt{7}}{3}$.

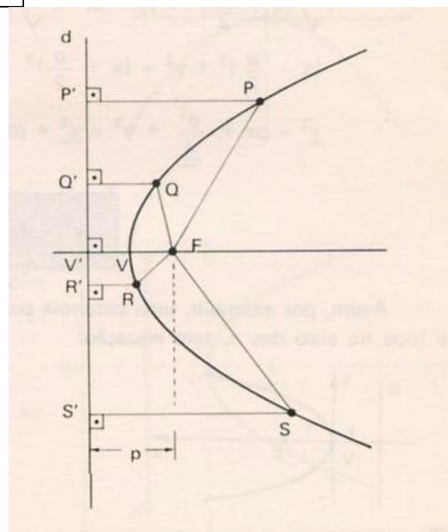
AS CÔNICAS

GEOMETRIA ANALÍTICA – PARÁBOLA

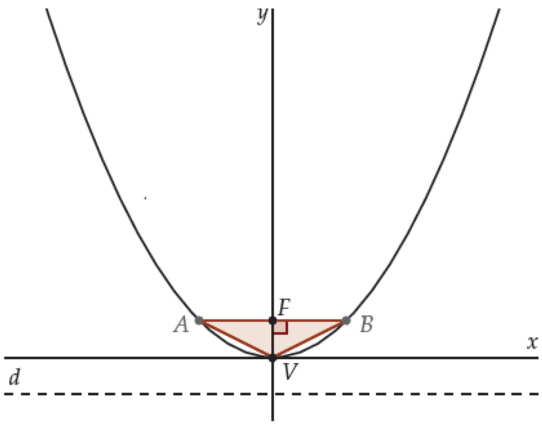
Parábola

Dados um ponto **F**, chamado foco e uma reta **d** chamada diretriz com $F \notin d$, pertencentes a um plano α, chama-se parábola o lugar geométrico dos pontos P do plano equidistante do ponto **F** e da reta **d**.

$$\boxed{\begin{array}{l} PF = PP' \\ QF = QQ' \\ \vdots \\ SF = SS' \end{array}}$$



Elementos de uma parábola

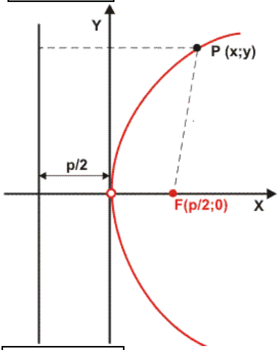


- F é o foco da parábola
- d é a diretriz
- V é o vértice
- $VF=\frac{p}{2}$ onde p é um parâmetro
- $\overleftrightarrow{VF}$ é o eixo de simetria

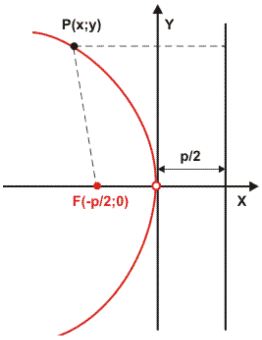
Equações da parábola

1º Caso: Eixo de simetria contido de eixo x e vértice na origem.

$\boxed{y^2 = 2px}$

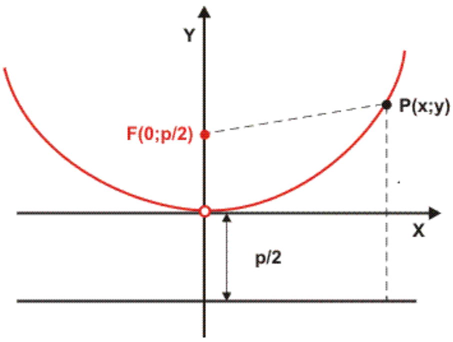


$\boxed{y^2 = -2px}$

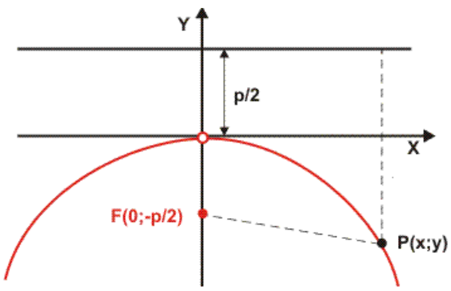


2º Caso: Eixo de simetria contido de eixo y e vértice na origem.

$\boxed{x^2 = 2py}$

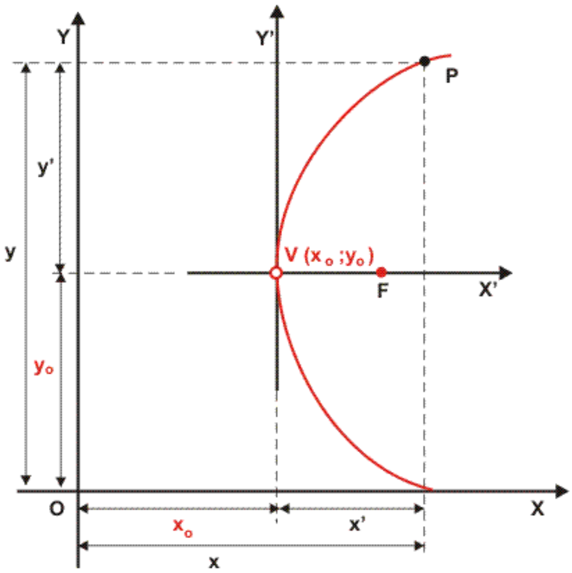


$\boxed{x^2 = -2py}$



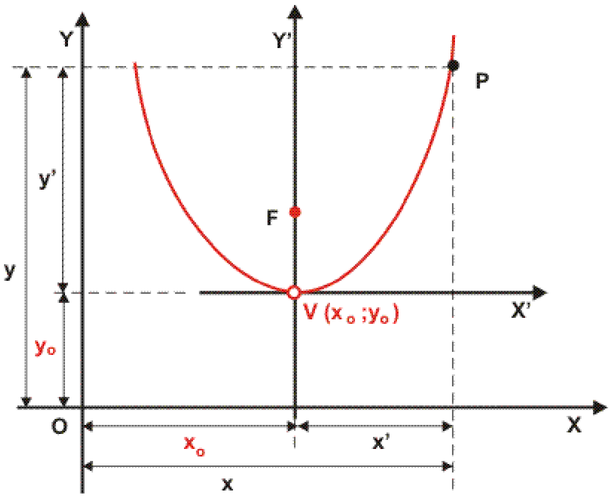
Observação:

Eixo de simetria paralelo ao eixo x, vértice no ponto de coordenadas (x_o, y_o)



$$\boxed{(y - y_o)^2 = 2p(x - x_o)}$$

Eixo de simetria paralelo ao eixo y, vértice no ponto de coordenadas (x_o, y_o)



$$\boxed{(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o)}$$

Exercícios

Nível 1

01) Dada a parábola de equação $y^2 = 64x$, determine as coordenadas do foco dessa parábola.

a) (3,0)
b) (4,0)
c) (2,0)
d) (16,0)
e) (8,0)

02) Dada uma parábola de equação $x^2 = 20y$, determine a equação da diretriz dessa parábola.

a) x = 3
b) y = – 5
c) y = 20
d) x = – 20
e) x = 5

Nível 2

03) Considere a parábola de equação $x^2 = -3y$. A reta diretriz dessa parábola possui equação:

a) y = 3
b) $y = \frac{3}{4}$
c) $y = \frac{1}{4}$
d) $x = \frac{3}{4}$
e) x = 3

04) Considere a parábola de equação $3y^2 - 2x - 12y + 12 = 0$. As coordenadas do foco dessa parábola são:

a) (6, 2)
b) $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$
c) (1, 6)
d) (0, 4)
e) $\left(\frac{1}{6}, 2\right)$

Nível 2

05) (UEM – PR) Considere um sistema cartesiano ortogonal de origem $O = (0, 0)$. Um ponto nesse sistema é representado por um par ordenado $P = (x, y)$, onde a coordenada x é chamada de abscissa e a coordenada y, de ordenada.

Assinale o que for **correto**.

01) A parábola de reta diretriz $x = -2$ e foco $(2, 0)$ tem equação $y^2 = 2x$.
02) A equação da elipse com centro na origem, extremidades do eixo maior nos pontos $A_1 = (-1, 0)$ e $A_2 = (1, 0)$ e extremidades do eixo menor nos pontos $B_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $B_2 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$, é $x^2 + 4y^2 = 1$.
04) Os pontos $F_1 = (3, 0)$ e $F_2 = (-3, 0)$ são focos da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.
08) A hipérbole de equação $4x^2 - 25y^2 = 100$ tem seus focos sobre o eixo y.
16) A excentricidade da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ é $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Nível 3

06) (UNICAMP – SP) No plano cartesiano, considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ e a parábola de equação $3x^2 - y + 1 = 0$. Essas duas curvas se interceptam em

a) um ponto.
b) dois pontos.
c) três pontos.
d) quatro pontos.

07) (ESPECEX) Considere as afirmações:

I. Uma elipse tem como focos os pontos $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$ e a medida do eixo maior é 8. Sua equação é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

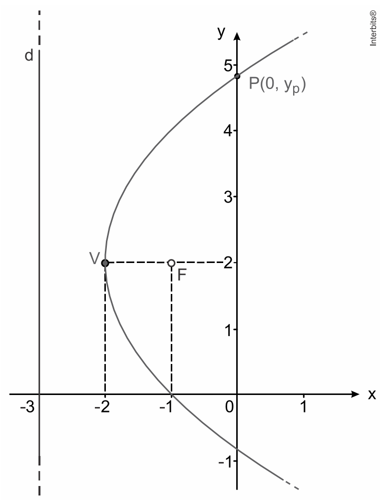
II. Os focos de uma hipérbole são $F_1(-10, 0)$, $F_2(10, 0)$ e sua excentricidade é $\frac{5}{3}$. Sua equação é $16x^2 - 9y^2 = 576.$

III. A parábola $8x = -y^2 + 6y - 9$ tem como vértice o ponto $V(3, 0)$.

Com base nessas afirmações, assinale a alternativa correta.

a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações I e III são falsas.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas a afirmação III é verdadeira.

08) (UNESP – SP) Em um plano cartesiano ortogonal são dadas uma reta d, de equação $x = -3$, e um ponto F, de coordenadas $(-1, 2)$. Nesse plano, o conjunto dos pontos que estão à mesma distância do ponto F e da reta d forma uma parábola. Na figura, estão nomeados dois pontos dessa parábola: o vértice V, de coordenadas $(-2, 2)$, e o ponto P, de coordenadas $(0, y_p)$.



Determine as coordenadas de dois pontos quaisquer dessa parábola que sejam diferentes de V e de P. Em seguida, calcule y_p.

GABARITO – PARÁBOLA

1) d **2)** d **3)** b **4)** e **5)** 22 **6)** c **7)** c
8) *

Sendo $V = (-2, 2)$ e $p = 2$, tem-se que a equação da parábola é

$$(y-2)^2 = 2 \cdot 2(x-(-2)) \Leftrightarrow (y-2)^2 = 4(x+2).$$

Tomando arbitrariamente $x = -1$, encontramos

$$(y-2)^2 = 4(-1+2) \Leftrightarrow y - 2 = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = 4.$$

Logo, segue que $(-1, 0)$ e $(-1, 4)$ são pontos da parábola.

Desde que $y_p > 0$, temos

$$(y_p - 2)^2 = 4(0+2) \Rightarrow y_p - 2 = \sqrt{8} \Rightarrow y_p = 2(1+\sqrt{2}).$$

Exercícios de Revisão

Assista no site à aula de Revisão antes de resolver os exercícios.
Ao final do tópico se encontram as resolução dos exercícios abaixo

1. (Eear 2019) Sejam $A(-3, 3), B(3, 1), C(5, -3)$ e $D(-1, -2)$ vértices de um quadrilátero convexo. A medida de uma de suas diagonais é

a) 15
b) 13
c) 12
d) 10

2. (Upe-ssa 3 2018) Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são $A(2, 3); B(1, 0); C(0, 3)$ e $D(1, 6)$?

Utilize $\sqrt{10} \cong 3,2$
a) Área $= 6$ e perímetro $= 12,8$
b) Área $= 6$ e perímetro $= 10,4$
c) Área $= 12$ e perímetro $= 22,3$
d) Área $= 12$ e perímetro $= 25,9$
e) Área $= 18$ e perímetro $= 27,1$

3. (Acafe 2018) Analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa que contém todas as corretas.

I. A distância entre as retas paralelas $r: x - 3y + 6 = 0$ e $s: 2x - 6y + 7 = 0$ é $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.
II. Para que os pontos $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$ e $C(7, k)$ sejam colineares, o valor de k é 2.
III. Numa confeitaria existem apenas quatro tipos diferentes de doces. Uma pessoa que deseja comprar cinco doces nessa confeitaria poderá fazê-lo de, exatamente, 1.024 modos distintos.
IV. A soma de dois números irracionais pode resultar em um número racional.
V. A soma das coordenadas do baricentro do triângulo ABC em que $M(-1, 5)$, $N(2, 1)$ e $P(5, 6)$ são os pontos médios dos seus lados é 6.
a) IV - V
b) III - V
c) I - IV - V
d) I - II - III

4. (Eear 2017) O triângulo ABC formado pelos pontos $A(7, 3)$, $B(-4, 3)$ e $C(-4, -2)$ é
a) escaleno
b) isósceles
c) equiângulo
d) obtusângulo

5. (G1 - ifal 2017) Dados os pontos $A(-1, 2)$ e $B(0, 4)$, pertencentes a um sistema de eixos ortogonais num plano, podemos afirmar que:

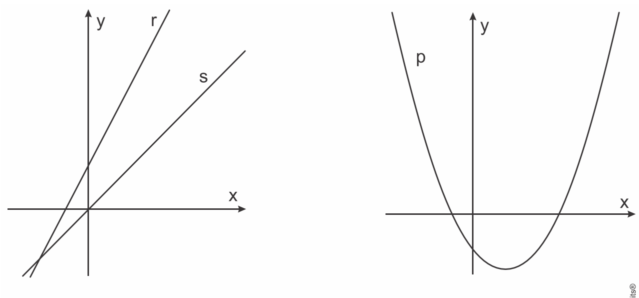
I. A distância entre esses pontos é 5.
II. A equação da reta que passa por esses pontos é $2x - y = -4$.
III. A equação da circunferência que tem centro em A e passa por B é $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Das afirmativas anteriores, é(são) verdadeira(s)
a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas III.
d) I e II.
e) II e III.

6. (Eear 2017) Seja ABC um triângulo tal que $A(1, 1)$, $B(3, -1)$ e $C(5, 3)$. O ponto _____ é o baricentro desse triângulo.
a) $(2, 1)$.
b) $(3, 3)$.
c) $(1, 3)$.
d) $(3, 1)$.

7. (Ufsc 2019) Na figura a seguir, estão representadas as retas r e s e a parábola p, tais que s coincide com a bissetriz dos quadrantes ímpares e o eixo de simetria de p é paralelo ao eixo das ordenadas.

Considere que as funções de domínio real indicadas por $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são representadas, respectivamente, por r, s e p.



Representações das retas *r* e *s* e da parábola *p*.

01) A parábola indicada por p pode ser representada pela equação $y = ax^2 + bx + c,$ tal que $a > 0,$ $b < 0,$ $c > 0$ e $\Delta > 0.$
02) A reta indicada por r pode ser representada pela equação $y = ax + b,$ tal que $a > 1$ e $b < 0.$
04) A reta indicada por s pode ser representada pela equação $y = ax + b,$ tal que $a = 1$ e $b = 0.$
08) A função indicada por $i(x) = f(x) + g(x)$ é representada, no sistema cartesiano, por uma reta que intersecta o eixo x num ponto de abscissa positiva.
16) Se a reta t é perpendicular à reta s e intersecta o eixo y no ponto $(0; 3),$ então a equação geral de t é $x + y - 3 = 0.$

8. (Eear 2019) Para que os pontos $A(x, 3), B(-2x, 0)$ e $C(1, 1)$ sejam colineares, é necessário que x seja

a) -2 b) -1 c) 2 d) 3

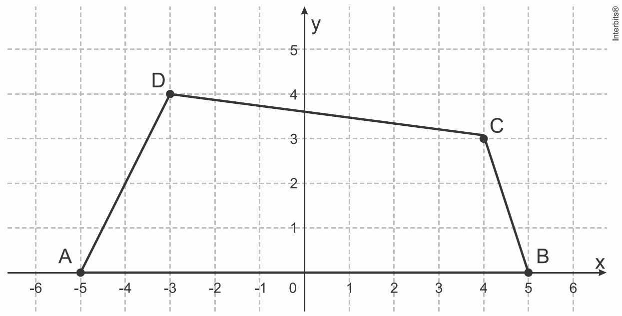
9. (Ufsc 2019) Duas retas r e $s,$ perpendiculares, interceptam-se no interior de uma circunferência $\gamma,$ de centro $C\,(1, 3).$ Os pontos de intersecção da reta r com a circunferência γ são $A\,(1, -2)$ e $B\,(5, 6).$ O ponto $D\,(-4, 3)$ é intersecção da reta s com a circunferência $\gamma.$
01) A equação da circunferência γ é $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0.$
02) A equação da reta s é $x + 2y - 2 = 0.$
04) O ponto $E\,(4, 1)$ também é ponto de intersecção da reta s com a circunferência $\gamma.$
08) O ponto $P(0, 2)$ é ponto de intersecção das retas r e $s.$

10. (Uem 2018) Considerando as retas $r: x - y = 1,$ $s: 2x - 2y - 4 = 0$ e $t: y = -x + 3,$ assinale o que for **correto**.
01) As retas s e t são perpendiculares.
02) As retas s e r se interceptam em um único ponto.
04) O ponto $(4, 3)$ pertence à reta $r,$ mas não pertence às outras retas.
08) As retas r e t se interceptam em $(2, 1).$
16) As retas s e r têm o mesmo coeficiente angular.

11. (Ufjf-pism 3 2018) Determine a distância entre o centro da circunferência $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$ e a reta $3y = -4x - 1.$

a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 5 d) 1 e) $\frac{1}{5}$

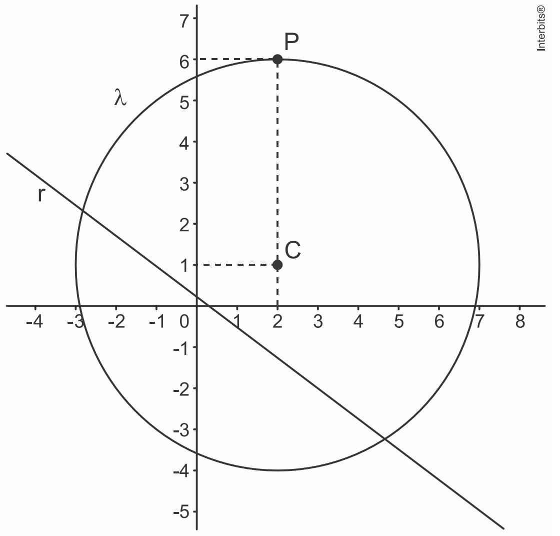
12. (Unicamp 2018) A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, um quadrilátero com vértices situados nos pontos de coordenadas $A = (-5, 0), B(5, 0), C(4, 3)$ e $D = (-3, 4).$



a) Determine a área desse quadrilátero.
b) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta que passa pelos pontos B e $C.$

13. (Upe-ssa 3 2018) Qual é a razão entre a medida da área e do comprimento da circunferência que, no plano cartesiano, passa pelos pontos $A(-4, 1), B(-1, -2)$ e $C(2, 1)$?
a) $0{,}5$
b) 1
c) $1{,}5$
d) 2
e) $2{,}5$

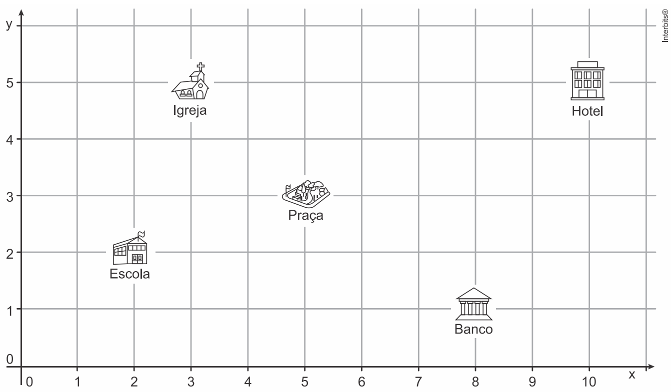
14. (Acafe 2018) Na figura a seguir a reta $(r): 3x + 4y - 1 = 0$ é secante à circunferência λ que passa pelo ponto P e tem centro no ponto $C.$ As retas $s_1: 3x + 4y + c' = 0$ e $s_2: 3x + 4y + c'' = 0$ são secantes à circunferência λ de modo que cada reta forma uma corda cujo comprimento é igual a 8 unidades de comprimento.



Se as retas s_1, s_2 e r são paralelas, o valor da soma $c' + c''$ é:

a) 0
b) -20
c) 5
d) -25

15. (Ufsc 2017) A figura abaixo representa parte do mapa de uma cidade em que uma unidade linear do plano cartesiano corresponde a $1\,\text{km}$.



Com base nos dados da figura, é correto afirmar que:

01) A equação da reta que passa pela praça e pela igreja também passa pelo banco.
02) A reta que passa pelo banco e é perpendicular à reta que passa pela igreja e pelo hotel tem equação $y = 8$.
04) A equação da circunferência com centro na praça e que passa pela escola é $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$.
08) A distância da escola ao hotel é de $\sqrt{73}\,\text{km}$.
16) A área do quadrilátero convexo formado pela escola, pelo banco, pelo hotel e pela igreja tem $23{,}5\,\text{km}^2$.
32) O ponto da circunferência, com centro na praça e que passa pela escola, que fica mais próximo da igreja é $(3, 4)$.

Gabarito dos exercícios de revisão

Resposta da questão 1:
[D]

Supondo que o quadrilátero convexo seja o quadrilátero $ABCD$, as diagonais são AC e BD.

$$AC = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (-3-3)^2}$$
$$AC = 10$$

$$BD = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-1)^2}$$
$$BD = 5$$

Assim, uma das medidas de suas diagonais é 10.

Resposta da questão 2:
[A]

A área é dada por
$$\frac{1}{2} \cdot (x_A - x_C) \cdot (y_D - y_B) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6.$$

Por outro lado, como
$$d(B, C) = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \cong 3{,}2,$$

segue que o perímetro mede $4 \cdot 3{,}2 \cong 12{,}8$.

Resposta da questão 3:
[C]

[I] Verdadeira. Com efeito, reescrevendo a equação de s, obtemos $x - 3y + \frac{7}{2} = 0$. Daí, segue que a distância entre r e s é

$$\frac{\left|6 - \frac{7}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

[II] Falsa. Na verdade, o valor de k para que os pontos A, B e C sejam colineares é tal que

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & k & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1 + 3k + 14 - 6 - 7 + k = 0$$
$$\Leftrightarrow k = 0$$

[III] Falsa. Sejam a, b, c e d as quantidades de cada um dos quatro tipos de doces que serão comprados. O resultado pedido corresponde ao número de soluções inteiras e não negativas da equação $a + b + c + d = 5$.

Logo, como esse número é dado por

$$CR_4^5 = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = 56,$$

segue o resultado.

[IV] Verdadeira. De fato, os números $\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$ são irracionais, mas sua soma é igual a $2,$ um número racional.

[V] Verdadeira. Podemos escrever

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_A + x_C}{2} = 5 \\ \dfrac{x_A + x_B}{2} = -1 \\ \dfrac{x_B + x_C}{2} = 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A + x_C = 10 \\ x_A + x_B = -2 \\ x_B + x_C = 4 \end{vmatrix}.$$

Logo, somando ordenadamente as equações e simplificando, encontramos $x_A + x_B + x_C = 6.$

Analogamente, vem

$$\begin{vmatrix} \dfrac{y_A + y_C}{2} = 6 \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = 5 \\ \dfrac{y_B + y_C}{2} = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_A + y_C = 12 \\ y_A + y_B = 10 \\ y_B + y_C = 2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow y_A + y_B + y_C = 12.$$

Portanto, a soma das coordenadas do baricentro é

$$\frac{x_A + x_B + x_C}{3} + \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{6}{3} + \frac{12}{3} = 6.$$

Resposta da questão 4:
[A]

Calculando os quadrados das medidas dos lados do triângulo $ABC,$ encontramos

$$d^2(A, B) = (-4-7)^2 + (3-3)^2 = 121,$$

$$d^2(A, C) = (-4-7)^2 + (-2-3)^2 = 146$$

e

$$d^2(B, C) = (-4+4)^2 + (-2-3)^2 = 25$$

Portanto, sendo

$$d^2(A, C) = d^2(A, B) + d^2(B, C),$$

podemos concluir que o triângulo ABC é retângulo escaleno.

Resposta da questão 5:
[E]

[I] Incorreta. Calculando a distância:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

[II] Correta. A equação da reta utilizando o primeiro ponto é:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x+1) \Rightarrow y - 2 = \frac{4-2}{0+1}(x+1)$$
$$y - 2 = 2(x+1) \Rightarrow 2x - y = -4$$

[III] Correta. Pois o ponto B pertence ao circunferência pois:

Seu raio vale $5,$ pois a distância entre A e B é $\sqrt{5}$ e mais,

$$(m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (0+1)^2 + (4-2)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 1+4 = 5$$

Resposta da questão 6:
[D]

Sabendo que as coordenadas do baricentro correspondem à média aritmética simples das coordenadas dos vértices do triângulo, vem

$$\left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{1-1+3}{3}\right) = (3, 1).$$

Resposta da questão 7:
04 + 16 = 20.

[01] Falsa. É imediato que p intersecta o eixo das ordenadas num ponto abaixo do eixo das abscissas. Logo, temos $c < 0.$

[02] Falsa. Tem-se que r intersecta o eixo das ordenadas num ponto acima do eixo das abscissas. Assim, vem $b > 0.$

[04] Verdadeira. De fato, pois se s coincide com a bissetriz dos quadrantes ímpares, então sua equação é $y = x.$ Portanto, segue que $a = 1$ e $b = 0.$

[08] Falsa. É imediato que

$$\begin{aligned} i(x) &= f(x) + g(x) \\ &= ax + b + x \\ &= (a+1)x + b, \end{aligned}$$

com $a > 1$ e $b > 0$.

Em consequência, o zero da função i é $x = -\dfrac{b}{a+1} < 0$, para quaisquer $a > 1$ e $b > 0$.

[16] Verdadeira. Com efeito, pois se t é perpendicular a s, então o coeficiente angular de t é igual a -1. Ademais, como t intersecta o eixo y em $(0, 3)$, temos $y = (-1)\cdot x + 3 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.

Resposta da questão 8:
[B]

Para que os pontos A, B e C sejam colineares, basta que:

$$\frac{0-3}{-2x-x} = \frac{1-0}{1-(-2x)}$$
$$\frac{-3}{-3x} = \frac{1}{1+2x}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+2x}$$
$$1+2x = x$$
$$x = -1$$

Resposta da questão 9:
01 + 02 = 03.

Como r passa por $A = (1, -2)$ e $B = (5, 6)$, segue que seu coeficiente angular é igual a

$$m_r = \frac{6-(-2)}{5-1} = 2.$$

Logo, sendo r e s perpendiculares, vem

$$m_s = -\frac{1}{2}.$$

O raio de γ é dado por

$$d(A, C) = \sqrt{(1-1)^2 + (3-(-2)^2} = 5.$$

[01] Verdadeira. Com efeito, a equação de γ é
$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.

[02] Verdadeira. De fato, pois a reta s passa por $D(-4, 3)$ e $m_s = -\dfrac{1}{2}$, o que implica em

$$y - 3 = -\frac{1}{2}\cdot(x-(-4)) \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0.$$

[04] Falsa. Desde que $4 + 2\cdot 1 - 2 = 4 \neq 0$ podemos afirmar que o ponto $E(4, 1)$ não pertence a s. Portanto, não pode ser uma interseção de s com γ.

[08] Falsa. Sendo $0 + 2\cdot 2 - 2 = 2 \neq 0$, podemos concluir que o ponto $P(0, 2)$ não pertence a s. Desse modo, não pode ser a interseção de r e s.

Resposta da questão 10:
01 + 04 + 08 + 16 = 29.

[01] CORRETA. Calculando:

$$s: 2x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow m_s = 1$$
$$t: y = -x + 3 \Rightarrow m_t = -1$$
$$m_s \cdot m_t = -1 \Rightarrow \text{perpendiculares}$$

[02] INCORRETA. As retas s e r são paralelas e não se interceptam.

[04] CORRETA. Calculando:

$$r: x - y = 1 \Rightarrow 4 - 3 = 1$$
$$s: x - y - 2 = 0 \Rightarrow 4 - 3 - 2 \neq 0$$
$$t: y = -x + 3 \Rightarrow 3 \neq -4 + 3$$

[08] CORRETA. Calculando:

$$r: x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$$
$$t: y = -x + 3$$
$$x - 1 = -x + 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$$

[16] CORRETA. O coeficiente da reta r e da reta s são iguais e de valor 1.

Resposta da questão 11:
[B]

De $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$, temos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 6 = 0 + 1 + 9$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$$

$C(1, -3)$ é o centro da circunferência.

De $3y = -4x - 1$, temos:

$$4x + 3y + 1 = 0$$

Daí, sendo d a medida da distância pedida, temos:

$$d = \frac{|4\cdot 1 + 3\cdot(-3) + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$
$$d = \frac{4}{5}$$

Resposta da questão 12:
a) A área do quadrilátero $ABCD$ é dada por

$$\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}-5 & 5 & 4 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot(15+16+9+20)$$
$$= 30 \text{ u.a.}$$

b) Desde que o coeficiente angular da reta que passa por B e C é

$$\frac{3-0}{4-5} = -3,$$

podemos concluir que a resposta é dada por

$$y-0 = -\frac{1}{-3}\cdot(x-(-5)) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}.$$

Resposta da questão 13:
[C]

Tem-se que

$$d(A, B) = \sqrt{(-1+4)^2+(-2-1)^2} = 3\sqrt{2},$$
$$d(A, C) = 2+4 = 6$$

e

$$d(B, C) = \sqrt{(2+1)^2+(1+2)^2} = 3\sqrt{2}.$$

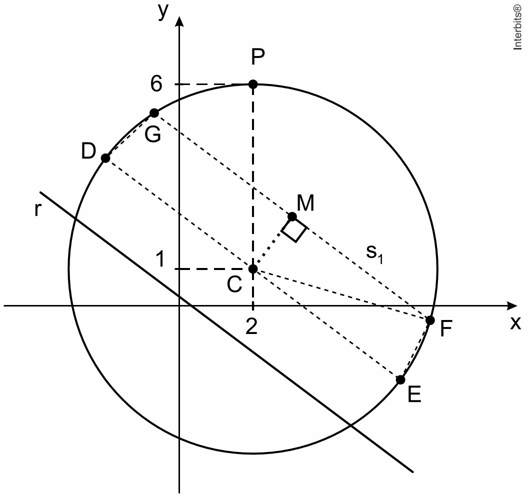
Logo, o triângulo ABC é retângulo e sua hipotenusa mede $6.$ Em consequência, a circunferência circunscrita a ABC tem raio igual a $r = \frac{6}{2} = 3.$

A resposta é

$$\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Resposta da questão 14:
[B]

Considere a figura, em que DE é um diâmetro de λ paralelo à reta r e FG é a corda pertencente a s_1.



É fácil ver que o raio de λ mede 5 unidades de comprimento. Logo, se M é o ponto médio de $FG,$ então $\overline{FM} = 4$ unidades de comprimento. Donde segue que $\overline{CM} = 3$ unidades de comprimento, pois $\overline{CF} = 5$ unidades de comprimento.
Em consequência, tomando a distância do ponto $C = (2, 1)$ à reta $s_1,$ vem

$$3 = \frac{|3\cdot 2+4\cdot 1+c'|}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow |10+c'| = 15$$
$$\Leftrightarrow c' = -25 \text{ ou } c' = 5.$$

Portanto, sabendo que s_1 e s_2 são necessariamente simétricas em relação à reta $\overleftrightarrow{DE},$ podemos afirmar que a resposta é $-25+5 = -20.$

Resposta da questão 15:
04 + 08 + 16 = 28.

[01] Falsa. Tem-se que

$$\begin{vmatrix}5 & 3 & 8 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 3\end{vmatrix} = 25+3+24-9-40-5 = -2.$$

Portanto, a reta não passa pelos três pontos.

[02] Falsa. A reta que passa pela igreja e pelo hotel tem por equação $y = 5.$ Por outro lado, a reta que passa pelo banco e é perpendicular à reta $y = 5$ é a reta de equação $x = 8.$

[04] Verdadeira. O quadrado da distância entre a praça e a escola é igual a

$$d^2(P, E) = (5-2)^2+(3-2)^2 = 10\text{km}^2.$$

Desse modo, a equação da circunferência com centro na praça e que passa pela escola é

$$(x-5)^2+(y-3)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2+y^2-10x-6y+24 = 0.$$

[08] Verdadeira. De fato, temos
$d(E, H) = \sqrt{(10-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{73}\,\text{km}.$

[16] Verdadeira. Com efeito, segue que

$$\begin{aligned}(EBHI) &= \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 8 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \end{matrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |\, 2 + 40 + 50 + 6 - 16 - 10 - 15 - 10 \,| \\ &= 23{,}5\,\text{km}^2.\end{aligned}$$

[32] Falsa. O ponto que está mais próximo da igreja corresponde ao ponto de interseção da reta que passa por $P(5, 3)$ e $I(3, 5)$ com a circunferência de equação $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10,$ de tal sorte que a abscissa desse ponto seja um número real menor do que $3.$
Portanto, não pode ser $(3, 4).$