ESTUDO DAS FUNÇÕES

PROFESSOR RICARDINHO

MATEMÁTICA X

Nesse caderno, temos:

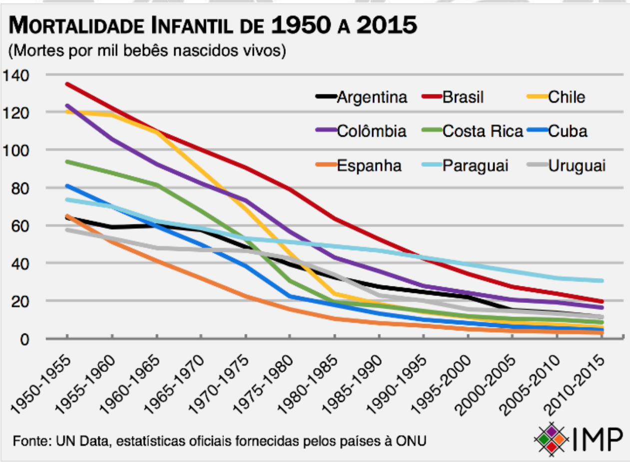
VÍDEO AULA 01

ESTUDO DAS FUNÇÕES ELEMENTARES

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

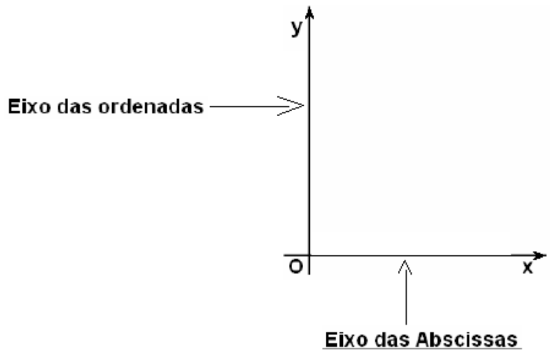
Introdução

É muito comum nos depararmos com situações na qual duas grandezas se associam através de uma relação de dependência. Essas relações podem ser mostradas de diversos modos como: tabelas, gráficos, diagrama de flechas, sentenças matemáticas. O fato é que em qualquer uma desses modos formaremos um conjunto de pares ordenados.

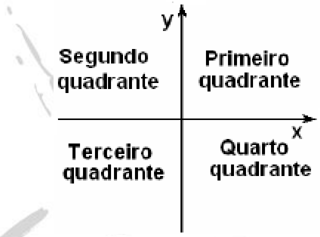


1. Plano Cartesiano

O plano cartesiano ortogonal é constituído por dois eixos x e y perpendiculares entre si que se cruzam no ponto O, o qual é a origem de ambos os eixos. O eixo horizontal é denominado eixo das abscissas (eixo Ox) e o eixo vertical é denominado eixo das ordenadas (eixo Oy).



O termo ortogonal refere-se ao perpendicularismo entre os eixos.
Os dois eixos separam o plano em quatro regiões denominadas quadrantes. Os quadrantes são indicados no sentido anti-horário, conforme a figura abaixo:



Cada ponto do plano cartesiano é identificado por um par de números reais chamado par ordenado.

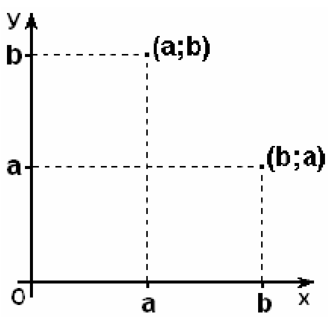
2.Par Ordenado

Par Ordenado é um conceito primitivo. A cada elemento **a** e a cada elemento **b** está associado um único elemento representado por (**a, b**) e denominado de par ordenado, de modo que se tenha:

$$\boxed{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mathbf{d}}$$

Os números **a** e **b** que formam o par ordenado serão chamados de coordenadas do ponto; **a** é chamado abscissa do ponto e **b** é chamado de ordenada do ponto.

Representação:

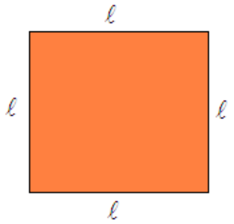


Observe que para **a** $\neq$ **b**, (**a**, **b**) e (**b**, **a**) representam pontos diferentes.

No plano cartesiano ortogonal há uma relação biunívoca, ou seja, cada ponto é representado por um único par ordenado e de modo reciproco, cada par ordenado representa um único ponto.

3. A ideia de função

O conceito de função está presente sempre que fizemos a relação de duas grandezas variáveis. Observe o exemplo abaixo:
A tabela abaixo relaciona a medida do lado (em cm) de uma região quadrada e seu perímetro.



Lado(cm)	1	2	3	4	ℓ
Perímetro(cm)	4	8	12	16	4ℓ

Observe que o perímetro da região quadrada é dada em *função* da medida do seu lado, ou seja, o perímetro *depende* da medida do lado. Observe, ainda, que a cada valor dado para o lado existe um único valor correspondente para o perímetro.
Na situação apresentada, o perímetro é a variável dependente, e a medida do lado é a variável independente.

Observe abaixo mais algumas relações de dependência:

1) Tempo e Espaço

Um automóvel percorre uma rodovia com velocidade constante e são feitas as seguintes marcações:

Instante (horas)	Distância Percorrida (km)
1	**80**
2	**160**
3	**240**
4	**320**

A cada instante (x) corresponde uma única distância percorrida (y). Dizemos, então, que a distância percorrida é uma função do instante. Essa relação pode explícita de forma geral por:

$$\boxed{y = 80.x}$$

2) Corrida de Taxi – Preço por quilômetro rodado

O valor da corrida depende da distância percorrida e do tempo que o carro fica parado. A cobrança da corrida do táxi começa no instante em que o passageiro entra no carro. Nesse momento, o taxímetro é ligado e exibe, no visor, o valor da tarifa inicial, que, no Brasil, é chamada "bandeirada".

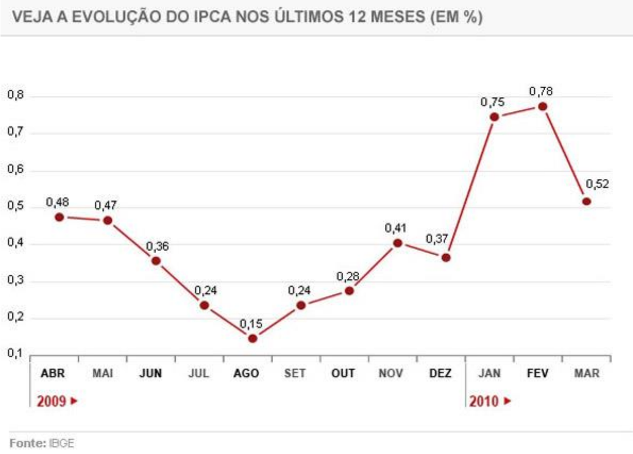
Supondo que numa determinada cidade a "bandeirada" custe R$ 3,00 e a cada quilômetro rodado custe R$ 0,85. Podemos relacionar essas duas grandezas através da tabela abaixo:

Quilômetros	Preço (R$)
1	**3,85**
2	**4,70**
3	**5,55**
4	**6,40**
x	**y = 3 + 0,85x**

4. Gráficos

Gráfico é uma tentativa de se representar visualmente relações entre duas grandezas, facilitando por vezes a compreensão dessas relações. Observe o exemplo abaixo:

O **IPCA** é um índice criado para medir a variação de preços do mercado para o consumidor final, e representa o índice oficial da inflação no Brasil. IPCA significa **Índice de Preços ao Consumidor** e é medido mês a mês pelo IBGE.



A seguir, apresentamos dois conceitos fundamentais:

- Dados dois conjuntos não vazio, A e B, denomina-se **<u>relação de A em B</u>** a qualquer conjunto de pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$.
- Dois conjuntos não vazios, A e B, denomina-se **<u>função ou aplicação de A em B</u>** a qualquer relação em que para todo elemento de A existir um único correspondente em B.

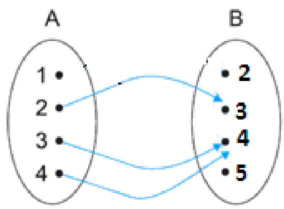
Com isso, fique atento às palavras empregadas na definição de função.

"....para todo elemento de A existir um único correspondente em B".

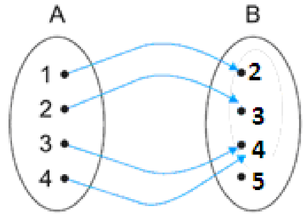
Então:
1°) Todos elementos de A tem de estar associados a algum elemento de B.
2°) Um mesmo elemento de A não pode estar associado a dois elementos de B;
3°) Elementos distintos de A podem estar associados a um mesmo elemento de B e podem "sobrar" elementos de B.

Observe os seguintes exemplos:

a) A relação de A em B não é função de A em B, pois o elemento 1 não está associado a qualquer elemento de B

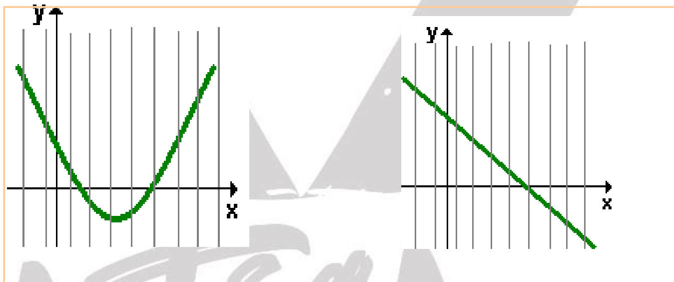


B) A relação de A em B é função de A em B, pois todo elemento de A está associado a um único elemento de B.

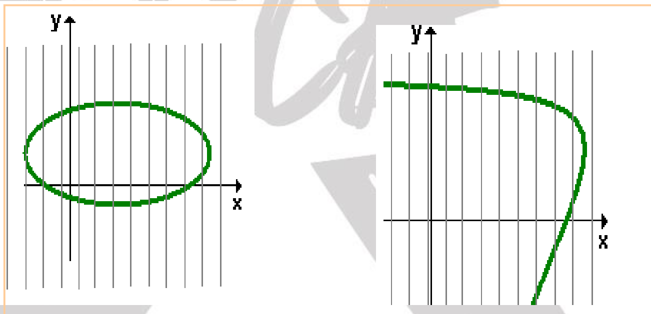


Observação: Podemos reconhecer através do gráfico de uma relação, se essa relação é ou não função. Para isso, deve-se traçar paralelas ao eixo y. Se cada paralela interceptar o gráfico em apenas um ponto, teremos uma função.
Exemplos:

Gráficos que representam Função



Gráficos que não representam Função



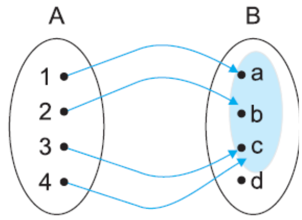
5. Definição de Função

Sejam **A** e **B** dois conjuntos não vazios e uma relação R de A em B, essa relação será chamada de função quando para todo e qualquer elemento de **A** estiver associado a um único elemento em B.

$$\boxed{\textbf{f é função de A em B} \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists|\ y \in B \,|\, (x, y) \in f)}$$

Domínio, contradomínio e imagem

Dada uma função de **A** em **B**, o conjunto **A** é chamado de **domínio** da função e será representado por D(f) e o conjunto **B**, **contradomínio** da função, representado por CD(f). O conjunto de todos os elementos de $y \in B$ que são imagens de pelo menos um elemento $x \in A$ é chamado conjunto imagem da função e será representado por Im(f). Observe o exemplo abaixo:



D(f) = A = {1, 2, 3, 4}
CD(f) = B = {a, b, c, d}
Im(f) = {a, b, c}

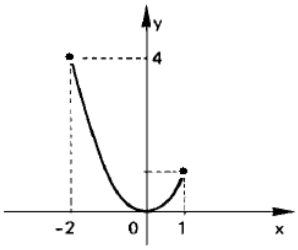
A notação f: A $\rightarrow$ B será utilizada para informar que **f** é uma função de A em B

Observação:

- Graficamente o domínio de uma função é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo das abscissas. E a imagem é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo y.

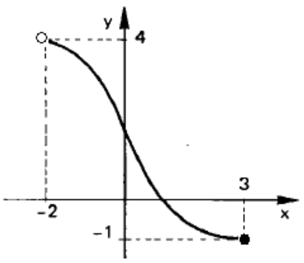
Exemplos:

a)



$D(f) = [-2, 1] = \{x \in \Re \mid -2 \leq x \leq 1\}$
$Im(f) = [0, 4] = \{y \in \Re \mid 0 \leq x \leq 4\}$

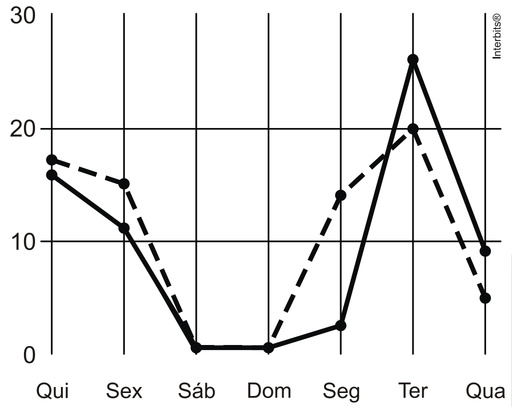
b)



$D(f) =]-2, 1] = \{x \in \Re \mid -2 < x \leq 3\}$
$Im(f) = [-1, 4[= \{y \in \Re \mid -1 \leq x < 4\}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) (ENEM) A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha continua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



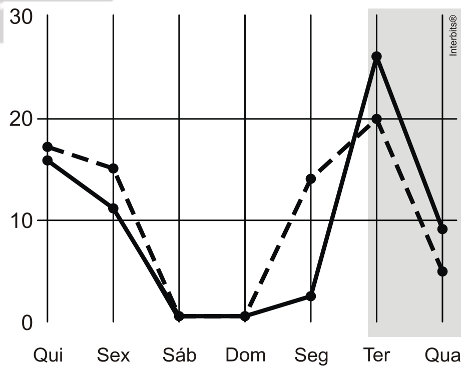
O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: http://bibliotecaunix.org. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na

a) segunda e na terça-feira.
b) terça e na quarta-feira.
c) terça e na quinta-feira.
d) quinta-feira, no sábado e no domingo.
e) segunda, na quinta e na sexta-feira.

Solução:

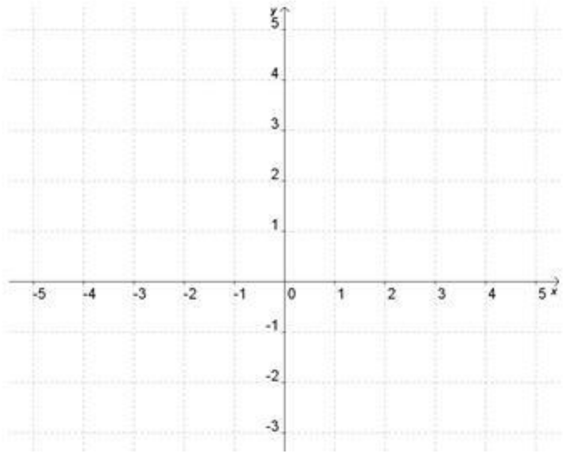


Observando os gráficos é fácil verificar que o nível de eficiência foi muito bom na terça e na quarta-feira. Logo, a alternativa correta é a [B].

EXERCÍCIOS

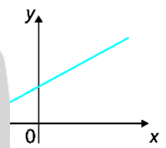
Nível 1

01) Localize no sistema cartesiano os seguintes pontos:
A(1, 3); B(4, 2); C(3, 0); D(2, –3); E(0, –1); F(–1, –2); G(–2, 0) e H(–1, 2).

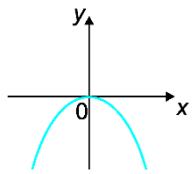


02) Qual dos seguintes gráficos não representa uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

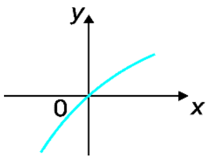
a)



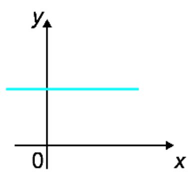
b)



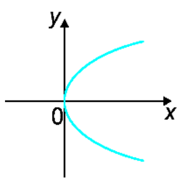
c)



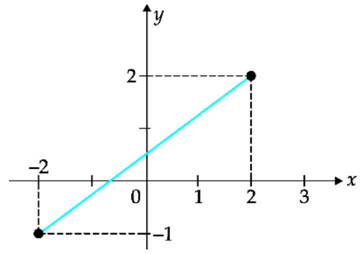
d)



e)



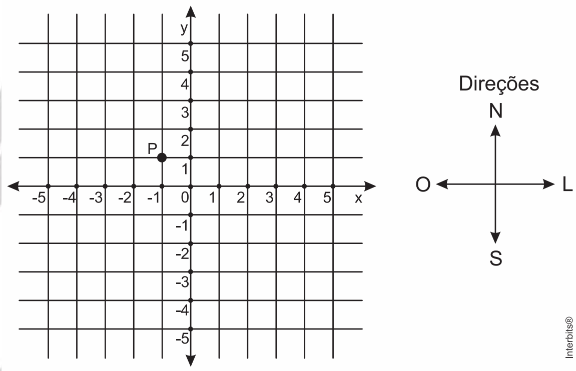
03) Assinale a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:



01. O domínio da função f é $\{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$
02. A imagem da função f é $\{y \in R \mid -1 \leq y \leq 2\}$
04. para x = -2 , tem-se y = -1
08. para x = 2, tem-se y = 2
16. A função é crescente em todo seu domínio

Nível 2

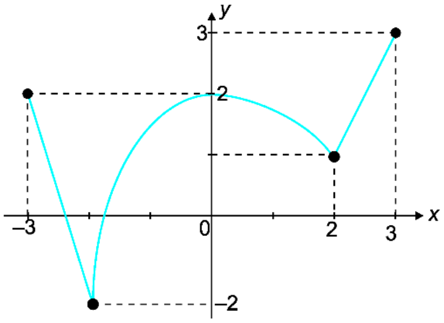
04) (ENEM) Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração.



A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção leste-oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x.
Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano.
Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será

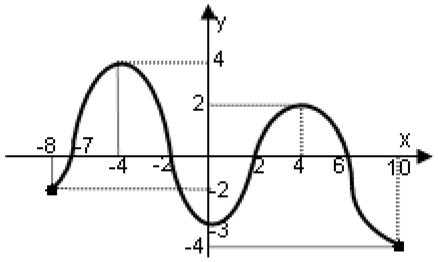
a) (0; 2).
b) (0; 3).
c) (1; 2).
d) (1; 4).
e) (2; 1).

05) Seja o gráfico abaixo da função f, determinar a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:



01. O domínio da função f é $\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\}$
02. A imagem da função f é $\{y \in R \mid -2 \leq y \leq 3\}$
04. para x = 3, tem-se y = 3
08. para x = 0, tem-se y = 2
16. para x = – 3, tem-se y = 0
32. A função é decrescente em todo seu domínio.
64. O valor máximo da função ocorre quando x for 2.

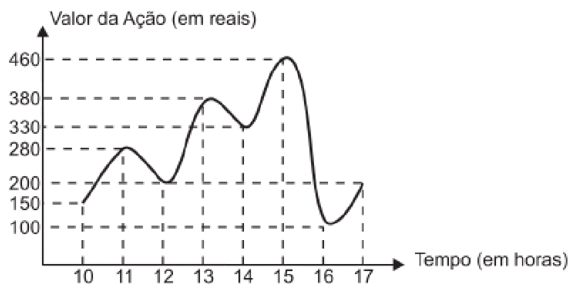
06) Considere a função y = f(x), cujo gráfico está, representado na figura abaixo.



Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. O domínio da função é o intervalo [-8, 10]
02. O conjunto imagem da função é o intervalo [-4, 4]
04. A equação y = 2 só tem uma solução no intervalo dado.
08. Para x = - 4, tem-se y = 4.

07) (ENEM) O gráfico fornece os valores das ações da empresa *XPN*, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo. Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

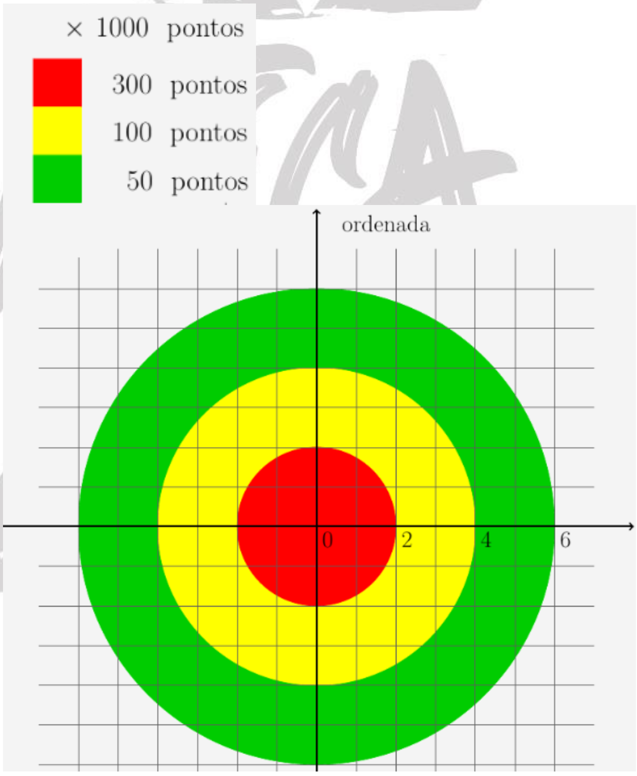


Investidor	Hora da compra	Hora da venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

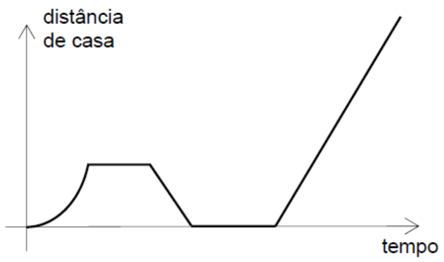
08) (OBMEP) Manoel testa sua pontaria lançando cinco flechas que atingiram o alvo nos pontos A, B, C, D e E, de coordenadas A = (1, -1), B = (2,5; 1), C = (-1, 4) D = (-4, -4) e E = (6,5). A tabela mostra quantos pontos se ganha quando a flecha acerta um ponto dentro de cada uma das três regiões, conforme mostra a figura.



a) Marque os pontos A, B, C, D, e E.
b) Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo?
c) Ao todo, quantos pontos Manoel fez?

Nível 3

09) (UFPR – PR) Assinale a alternativa que apresenta a história que melhor se adapta ao gráfico.



a) Assim que saí de casa lembrei que deveria ter enviado um documento para um cliente por *e-mail*. Resolvi voltar e cumprir essa tarefa. Aproveitei para responder mais algumas mensagens e, quando me dei conta, já havia passado mais de uma hora. Saí apressada e tomei um táxi para o escritório.

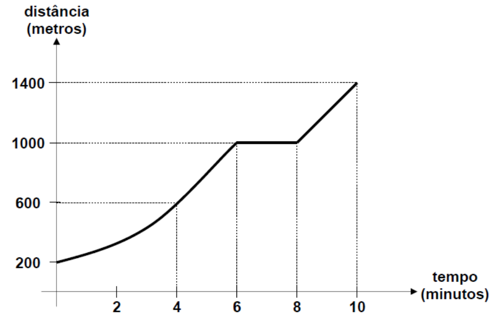
b) Saí de casa e quando vi o ônibus parado no ponto corri para pegá-lo. Infelizmente o motorista não me viu e partiu. Após esperar algum tempo no ponto, resolvi voltar para casa e chamar um táxi. Passado algum tempo, o táxi me pegou na porta de casa e me deixou no escritório.

c) Eu tinha acabado de sair de casa quando tocou o celular e parei para atendê-lo. Era meu chefe, dizendo que eu estava atrasado para uma reunião. Minha sorte é que nesse momento estava passando um táxi. Acenei para ele e poucos minutos depois eu já estava no escritório.

d) Tinha acabado de sair de casa quando o pneu furou. Desci do carro, troquei o pneu e finalmente pude ir para o trabalho.

e) Saí de casa sem destino – estava apenas com vontade de andar. Após ter dado umas dez voltas na quadra, cansei e resolvi entrar novamente em casa.

10) (UFPR – PR) Num teste de esforço físico, o movimento de um indivíduo caminhando em uma esteira foi registrado por um computador. A partir dos dados coletados, foi gerado o gráfico da distância percorrida, em metros, em função do tempo, em minutos, mostrado ao lado:



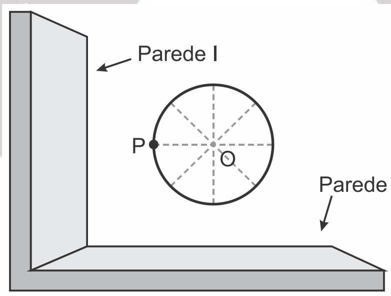
De acordo com esse gráfico, considere as seguintes afirmativas:

1. A velocidade média nos primeiros 4 minutos foi de 6 km/h.
2. Durante o teste, a esteira permaneceu parada durante 2 minutos.
3. Durante o teste, a distância total percorrida foi de 1200 m.

Assinale a alternativa correta.

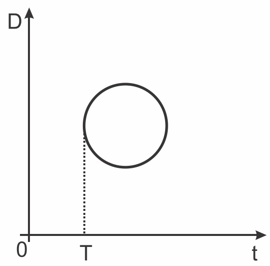
a) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

11) (ENEM) A figura ilustra a vista superior de um brinquedo gira-gira em um parque de diversões, no qual a linha contínua, em formato circular tendo O como seu centro, indica o assento onde as crianças se posicionam no brinquedo. O ponto P indica a posição ocupada por uma criança,em um instante de tempo T, quando o brinquedo está girando continuamente no sentido anti-horário (com O fixo), e velocidade constante por várias voltas.

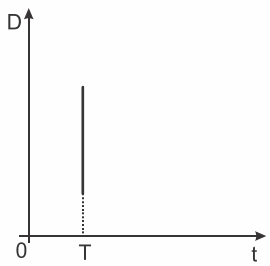


O brinquedo está situado nas proximidades de duas paredes verticais e perpendiculares entre si. Seja D a distância de P até a parede I.

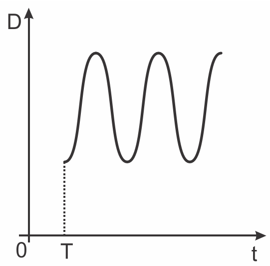
O gráfico que melhor representa, em função do tempo t a partir do instante T, a distância D é a)



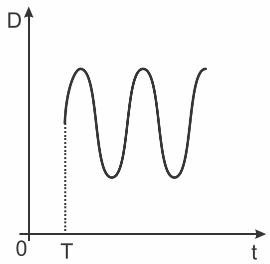
b)



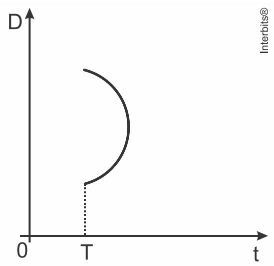
c)



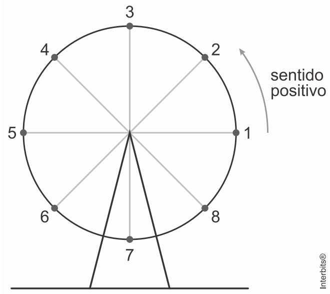
d)



e)

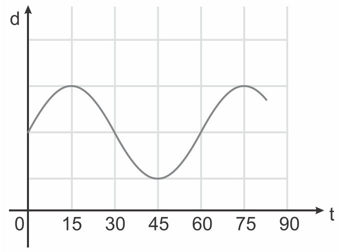


11) (UPF – RS) Na figura, está representada uma roda gigante de um parque de diversões. Um grupo de amigos foi andar nessa roda. Depois de todos estarem sentados nas cadeiras, a roda começou a girar. Uma das meninas sentou na cadeira número 1, que estava na posição indicada na figura, quando a roda começou a girar. A roda gira no sentido contrário ao dos ponteiros dos relógios e leva um minuto para dar uma volta completa.

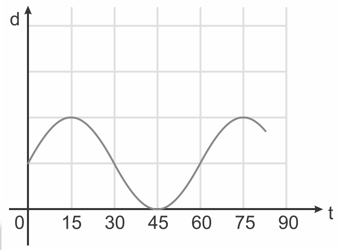


Seja d a função que expressa a distância da cadeira 1 ao solo, t minutos depois que a roda começou a girar. O gráfico que representa parte da função d é:

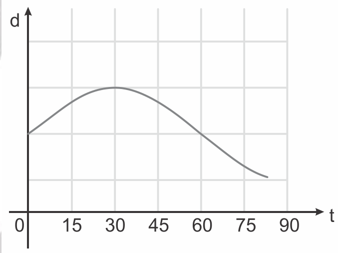
a)



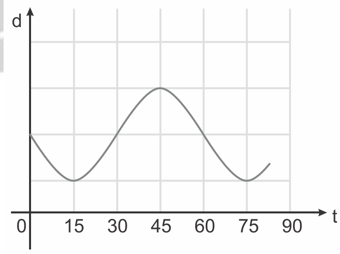
b)



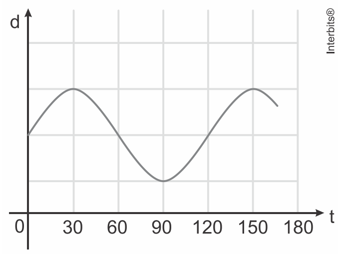
c)



d)



e)

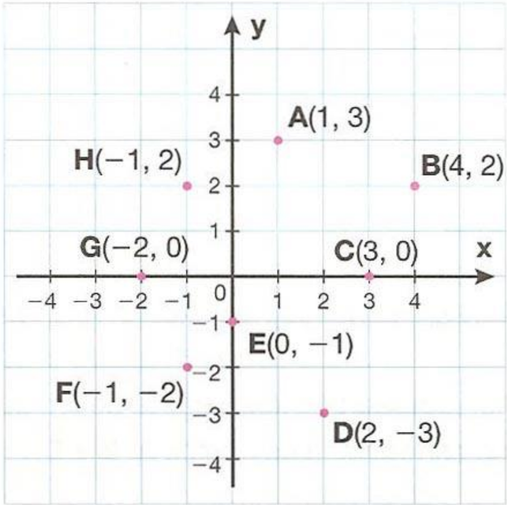


GABARITO – VÍDEO AULA 01

1) *	**2)** e	**3)** 31	**4)** c	**5)** 15	**6)** 11
7) a	**8)** *	**9)** b	**10)** e	**11)** c	**12)** a

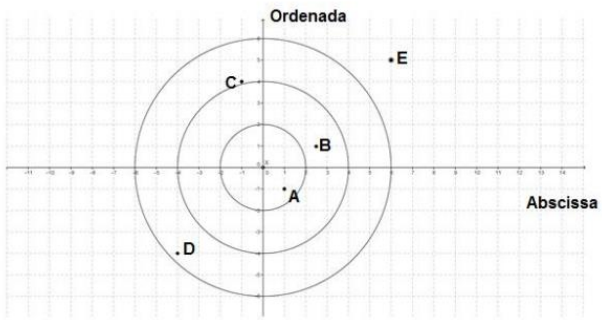
Resposta:

*1)



***8)**

a)



b) Apenas uma flecha.

c) Ponto A = 300 pontos, ponto B = 100 pontos, ponto C = 50 pontos e ponto D = 50 pontos, totalizando 500 pontos.

VÍDEO AULA 02

NOTAÇÃO f(x)

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

Valor de uma Função

Dados os conjuntos A e B e uma função f: A em B. Denomina-se valor numérico de uma função f(x) o valor que a variável **y** assume quando a variável **x** é substituída por um valor que lhe é atribuído.

Por exemplo: Considere a relação $y = x^2 + 1$, onde cada valor de x corresponde um único valor de y. Assim se x = 3, então y = 10. Podemos descrever essa situação como: f(3) = 10

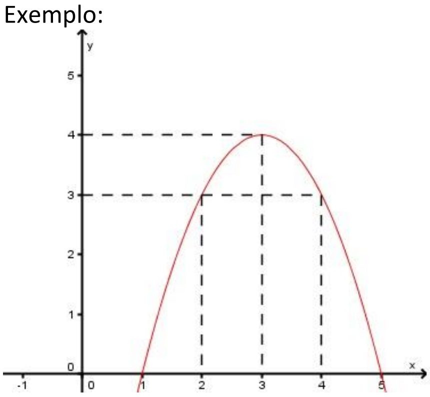
Resumindo:

Sendo (x, y) um elemento da função **f**, usaremos a notação f(x) = y (lê-se **f** de **x** igual a **y**)

Zeros ou raízes de uma função

Dada uma função y = f(x), denomina-se raízes ou zeros da função os valores de x para os quais f(x) = 0. Graficamente as raízes da função são as abscissas dos pontos onde o gráfico de f(x) intercepta o eixo x.

Exemplo:



No gráfico observamos que f(1) = f(5) = 0. Portanto, os números 1 e 5 são as raízes ou zeros da função.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01) Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R$ 45,00. Cada panela é vendida por R$ 65,00.

Seja x a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita. Determine o valor de x

Solução:

O custo total é dado por $45x + 9800$, enquanto que a receita é igual a $65x$. Desse modo, temos

$$0,2 \cdot 65x = 65x - (45x + 9800) \Leftrightarrow 13x = 20x - 9800$$
$$\Leftrightarrow x = 1400.$$

02) Uma estudante oferece serviços de tradução de textos em língua inglesa. O preço a ser pago pela tradução inclui uma parcela fixa de R$ 20,00 mais R$ 3,00 por página traduzida. Em determinado dia, ela traduziu um texto e recebeu R$ 80,00 pelo serviço Calcule a quantidade de páginas que foi traduzida.

Solução:

Considerando que x é o número de páginas e y o valor recebido pela tradução, temos:

y = 20 + 3x, fazendo y = 80 temos a seguinte equação:
80 = 30 + 3x
60 = 3x
x = 20

Resposta: 20 páginas.

03) Os ambientalistas estimam que em uma cidade a concentração média diária de monóxido de carbono no ar será $c(p) = 0,5p + 1$ partes por milhão quando a cidade tiver uma população de p mil habitantes. Um estudo demográfico indica que a população da cidade dentro de t anos será $p(t) = 10 + 0,1t^2$ mil habitantes.

Daqui a quanto tempo a concentração de monóxido de carbono atingirá o valor de $6,8$ partes por milhão?

a) 1 ano
b) 2 anos
c) 3 anos
d) 4 anos
e) 5 anos

Solução:

Queremos saber o valor de t para o qual se tem $c(p) = 6,8.$ Ora, segue que

$6,8 = 0,5p + 1 \Leftrightarrow p = 11,6.$
Portanto, o resultado pedido é tal que
$$11,6 = 10 + 0,1t^2 \Leftrightarrow t^2 = 16$$
$$\Rightarrow t = 4.$$

Logo, a resposta correta é o item [D]

04) Considere a função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3.$

a) Calcule os valores de $f(-1)$, $f(1)$ e $f(3)$.
b) Fatore a função dada.
c) Determine as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo OX.

Solução:

b) Fatorando, obtemos
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 - x + 3 \\ &= x^2(x-3) - (x-3) \\ &= (x-3)(x^2-1) \\ &= (x-3)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

a) De (b), vem $f(-1) = f(1) = f(3) = 0.$

c) De (a), temos $(-1, 0), (1, 0)$ e $(3, 0)$.

05) Um estudo das condições ambientais na região central de uma grande cidade indicou que a taxa média diária (C) de monóxido de carbono presente no ar é de $C(p) = 0{,}5p + 1$ partes por milhão, para uma quantidade de (p) milhares de habitantes. Estima-se que, daqui a *t* anos, a população nessa região será de $p(t) = 2t^2 - t + 110$ milhares de habitantes. Nesse contexto, para que a taxa média diária de *monóxido de carbono* ultrapasse o valor de 61 partes por milhão, é necessário que tenham sido transcorridos no mínimo:

a) 2 anos
b) 2 anos e 6 meses
c) 3 anos
d) 3 anos e 6 meses
e) 4 anos

Solução:

De acordo com as informações do problema, podemos escrever:
61=0,5 p + 1 $\Leftrightarrow$ p = 120 mil habitantes.

Fazendo p(t) = 120 na segunda função, temos:
120 = $2t^2 - t + 110 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2{,}5$ ou t = - 2 (não convém).

Logo, t é, no mínimo, 2 anos e 6 meses.

Logo, a resposta correta é o item [B]

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) (UFPR – PR) Sabe-se que a velocidade do som no ar depende da temperatura. Uma equação que relaciona essa velocidade v (em metros por segundo) com a temperatura t (em graus Celsius) de maneira aproximada é $V = 20\sqrt{t + 273}$. Com base nessas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a velocidade do som à temperatura de 27 ºC? (Sugestão: use $\sqrt{3}$ = 1,73)
b) Costuma-se assumir que a velocidade do som é de 340 m/s (metros por segundo). Isso ocorre a que temperatura?

02) (UFSC) Considere a função f: R $\to$ R dada por $f(x) = \begin{cases} -4x + 3, \text{se}: x \le 0 \\ x + 5, \text{se}: x > 0 \end{cases}$.

O valor de $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ + f(0) + f(3), é:

03) Considere a função f: R $\to$ R dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, \text{se } x \le 1 \\ 2x + 5, \text{se } x > 1 \end{cases}$. O valor de $f(-2) + f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ é:

Nível 2

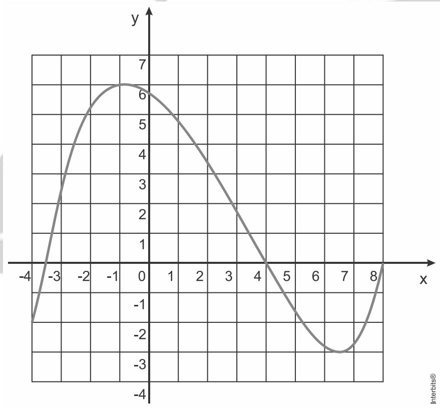
04) Dado que f(1) = 2 e, para todo x, f(x) = 5 f(x – 1), obtenha:

a) f(2)
b) f(3)
c) f(0)
d) f(– 1)

05) (UEPB - PB) Uma função f definida de R em R satisfaz à condição $f(5x) = 5f(x)$ para todo x real. Se $f(25) = 125$, $f(1)$ é:

a) 6 b) 1 c) 25 d) 5 e) 4

06) (UPF – RS) Observe a figura:

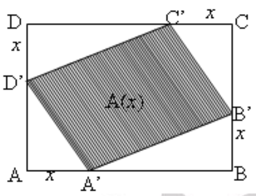


Ela representa o gráfico da função $y = f(x)$, que está definida no intervalo $[-4, 8]$. A respeito dessa função, é **correto** afirmar que
a) $f(3) > f(1)$
b) $f(f(2)) > 2$
c) $\text{Im}(f) = [-2, 6]$
d) $f(x) = 0$, para $x = 8$
e) O conjunto $\{-4 \le x \le 8 \mid f(x) = -1{,}2\}$ tem exatamente 2 elementos

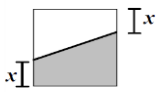
Nível 3

07) Determine a soma dos números associados às proposições verdadeiras:

01. Considere a função f: R → R tal que para todo x real se tem f(5x) = 5f(x). Se f(15) = 20, então o valor de f(75) é igual a 100.
02. A função f(x) que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é f(x) 0,03x.
04. Considere o retângulo *ABCD* cujos lados *AB* e *BC* medem, respectivamente, *4 cm* e *3 cm*. Seja *A'* um ponto do lado *AB*; *B'* um ponto do lado *BC*; *C'* um ponto do lado *CD* e *D'* um ponto do lado *DA*, tal que *AA' = BB' = CC' = DD' = x* (ver figura). A área do quadrilátero *A'B'C'D'* em função de x é dada por: *A*(*x*) = $2x^2 - 7x + 12$.



08. Considere *f*(*x*) uma função real que satisfaz as seguintes condições: *f*(–3) = 15 e *f*(*x* –3) = 3*f*(*x*) – 6, então o valor de *f*(0) é 7.
16. Considere a função f(x) real, definida por f(1) = 43 e f(x + 1) = 2 f(x) – 15. O valor de f(0) é 29.
32. Observe o quadrado de lado *10 cm* da figura abaixo. A área da parte colorida será sempre a metade da área do quadrado, independentemente do valor escolhido para *x*.



08) (UEPG – PR) Sendo $f: N \to Z$ uma função definida por $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e $f(n+1) = 3f(n) - f(n-1)$, assinale o que for correto.

01. $f(5) < -20$
02. $f(2) = -1$
04. $f(6) > -60$
08. $f(3) = 3$
16. $f(4) = -10$

09) (UFRGS – RS) Considere as funções f e g tais que $f(x) = 4x - 2x^2 - 1$ e $g(x) = 3 - 2x$. A soma dos valores de f(x) que satisfazem a igualdade f(x) = g(x) é

a) – 4
b) – 2
c) 0
d) 3
e) 4

10) (FUVEST – SP) Considere a função $f(x) = 1 - \dfrac{4x}{(x+1)^2}$, a qual está definida para $x \neq -1$. Então, para todo $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o produto $f(x)f(-x)$ é igual a

a) -1
b) 1
c) $x+1$
d) x^2+1
e) $(x-1)^2$

GABARITO – VÍDEO AULA 02

1) *	**2)** 16	**3)** 15	**4)** a) 10	b) 50	c) 2/5	d) 2/25
5) d	**6)** d	**7)** 61	**8)** 07	**9)** c	**10)** B	

1)

a) v(27) = $20\sqrt{27+273} = 20.\sqrt{300} = 200\sqrt{3} \approx 346 m/s$

b). $340 = 20\sqrt{t+273} \Leftrightarrow 17 = \sqrt{t+273} \Leftrightarrow$
$t + 273 = 289 \Leftrightarrow t = 16^{\circ}C$

VÍDEO AULA 03

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

1. Introdução

Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1200,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 5% $\left(\frac{5}{100} = 0{,}05\right)$ sobre o total de vendas que ele faz durante o mês. Podemos dizer, então, que:

salário mensal = 1200 + 0,05.total das vendas.

Observe que o salário mensal do vendedor é dado em função do total de vendas que ele faz durante o mês, ou seja:

$y = 0{,}05x + 1200$ ou $f(x) = 0{,}05x + 1200$
em que x é o total de vendas do mês y é o salário mensal do vendedor.
A função descrita acima é um exemplo de função da forma y = f(x) = ax + b.

2. Função Afim

Uma função f: $\Re \to \Re$ é denominada função afim quando a cada x $\in$ R associa o elemento (**ax + b**) $\in \Re$ em que **a** e **b** são números reais com **a** $\neq$ 0.

$\boxed{\mathbf{f(x) = ax + b}}$ **com a $\neq$ 0.**

Exemplos:

- f(x) = 2x + 3 (a = 2, b = 3)
- f(x) = − x + 2 (a = −1, b = 2)
- f(x) = 2x (a = 2, b = 0)

Gráfico da Função Afim

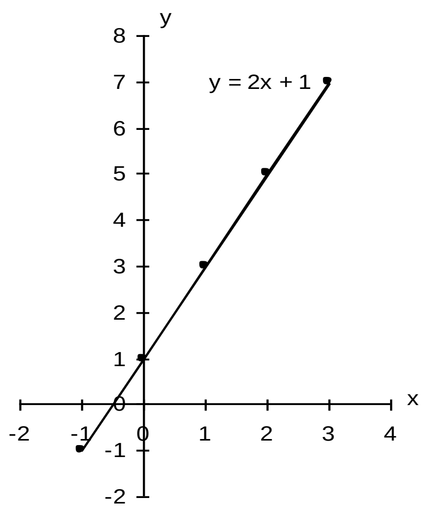
O gráfico cartesiano da função f(x) = ax + b é uma reta.
O gráfico pode ser construído atribuindo-se valores à variável x e calculando as imagens correspondentes. Observe os exemplos:

Exemplo 1: Construir o gráfico da função f: $\Re \to \Re$ definida por y = 2x + 1

Resolução:

x	y = 2x + 1	(x, ; y)
−1	y = 2(−1) + 1 = −1	(−1; −1)
0	y = 2.0 + 1 = 1	(0;1)
1	y = 2.1 + 1 = 3	(1; 3)
2	y = 2.2 + 1 = 5	(2;5)
3	y = 2.3 + 1 = 7	(3;7)

Localizando os pontos obtidos e ligando-os, vem:

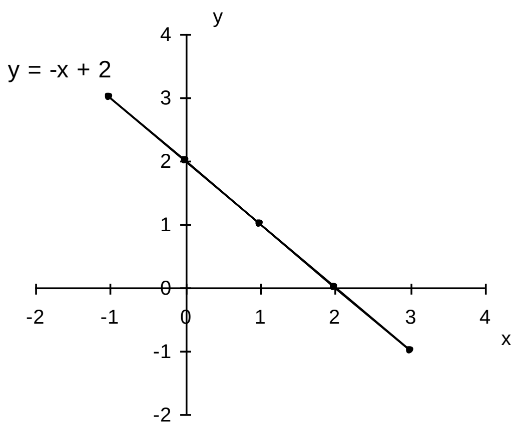


Exemplo 2: Construir o gráfico da função f: $\Re \to \Re$ definida por y = – x + 2

Resolução:

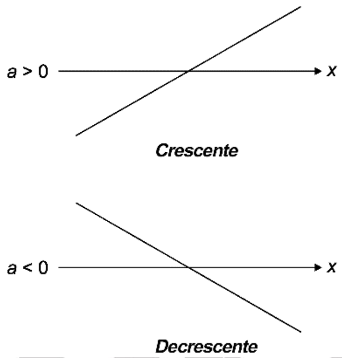
x	y = – x + 2	(x, ; y)
−1	y = −(−1) + 2 = 3	(−1;3)
0	y = −0 + 2 = 2	(0;2)
1	y = −1 + 2 = 1	(1, 1)
2	y = −2 + 2 = 0	(2;0)
3	y = −3 + 2 = −1	(3, −1)

Localizando os pontos obtidos e ligando-os, vem:



Conclusão:

O gráfico será uma reta crescente se **a** for positivo e decrescente se **a** for negativo.

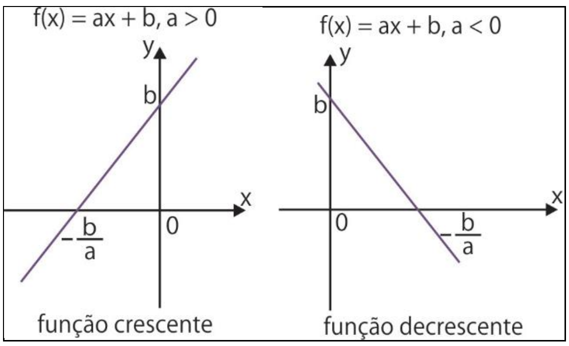


Observação:

<u>Interceptos:</u> Como o gráfico de uma função afim é uma reta basta definir apenas dois pontos.

- Ponto que o Gráfico corta o eixo y: deve-se fazer x = 0. Logo o ponto que o gráfico intercepta o eixo y tem coordenadas (0,b).
- Ponto que o Gráfico corta o eixo x: deve-se fazer y = 0. Logo o ponto que o gráfico intercepta o eixo x tem coordenadas $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. O número $-\frac{b}{a}$ é chamado raiz ou zero da função.

Assim:



Coeficientes da Função Afim

O coeficiente **a** na função f(x) = **a**x + **b** é chamado *coeficiente angular* da reta. O coeficiente **b** é chamado *coeficiente linear*.

O *coeficiente angular* da reta indica a inclinação da reta.

- Se **a** > 0, o gráfico será uma reta crescente no seu domínio, ou seja:
  $x_1 > x_2 \rightarrow y_1 > y_2$
- Se **a** < 0, o gráfico será uma reta decrescente no seu domínio, ou seja:
  $x_1 > x_2 \rightarrow y_1 < y_2$

O *coeficiente linear* indicará a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo y.

Exemplo:

Esboçar o gráfico da função da função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por f(x) = – 3x + 1.

Resolução:

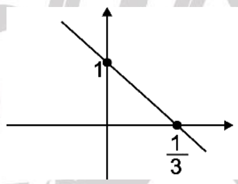
1°) A reta intercepta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2°) Cálculo da raiz de f(x)

f(x) = 0.

$-3x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

A reta intercepta o eixo x no ponto de abscissa $\frac{1}{3}$.



Determinação de uma função afim conhecendo seus valores em dois pontos distintos

Uma função f(x) = ax + b fica totalmente determinada quando conhecemos dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$. Observe os exemplos:

1) Dada a função f(x) = ax + b, sabe-se que f(1) = 5 e f(3) = 7. Escrever a função **f(x)** .

Resolução:

- Se f(1) = 5 então:
  f(1) = a(1) + b
  5 = a(1) + b
  a + b = 5 (1)

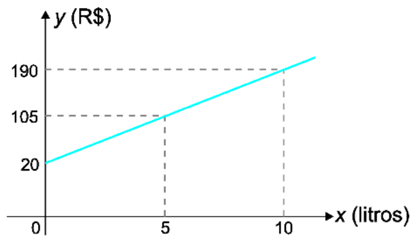
- Se f(3) = 7 então:
  f(3) = a(3) + b
  7 = a(3) + b
  3a + b = 7 (2)

Encontraremos **a** e **b** resolvendo um sistema.

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 3a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ -3a-b=-7 \end{cases}$$

Daí vem: **a** = 1 e **b** = 4.
Logo: **f(x) = x + 4**

2) O gráfico mostra como o dinheiro gasto (y) por uma empresa de cosméticos, na produção de perfume, varia com a quantidade de perfume produzida (x). Assim, podemos afirmar:



a) Quando a empresa não produz, não gasta.
b) Para produzir 3 litros de perfume, a empresa gasta R$ 76,00.
c) Para produzir 2 litros de perfume, a empresa gasta R$ 54,00.
d) Se a empresa gastar R$ 170,00, então ela produzirá 5 litros de perfume.
e) Para fabricar o terceiro litro de perfume, a empresa gasta menos do que para fabricar o quinto litro.

Resolução:
Temos f(*x*) = ax +b, com f(0) = 20 e f(10) = 190.

$$\begin{cases} f(0)=20 \Rightarrow a.0+b=20 \Rightarrow \ b=20 \\ f(10)=190 \Rightarrow a.10+20=190 \Rightarrow \ a=17 \end{cases} \Rightarrow y=17x+20$$

Para *x* = 2, temos *y* = 54.
Note que, para fabricar o terceiro litro de perfume, a empresa já terá fabricado o segundo; da mesma forma, para fabricar o quinto litro, o quarto já terá sido fabricado. Assim o custo de fabricação do terceiro litro é o mesmo custo de fabricação do quinto litro.

Resposta: c

3. Funções da forma f(x) = ax

função da quantidade de litros colocada no tanque.
Indicando por *x* os valores relativos à quantidade de litros e por *y* os valores relaticos ao preço total a pagar, podemos estabelecer a seguinte relação entre y e x:

$\boxed{y = P.x}$

onde P é o preço do litro de combustível.

Perceba que *y* está em **função** de *x*

Vamos construir uma tabela, supondo o preço do litro do combustível R$2,85, ou seja P = 2,85;

x (quantidade de litros)	Y (preço total) em R$
1	2,85
2	5,70
3	8,55
4	11,40

Podemos descrever a função acima por meio da equação: y = 2,85.x.

A função descrita acima é um exemplo de função linear da forma y = f(x) = ax .

Definição

Uma função f: $\Re \rightarrow \Re$ recebe a denominação *função linear* quando a cada x $\in \Re$ associa o elemento **ax** $\in \Re$ em que **a** é um número real diferente de zero.

$\boxed{f(x) = \mathbf{ax}}$ $(a \neq 0)$

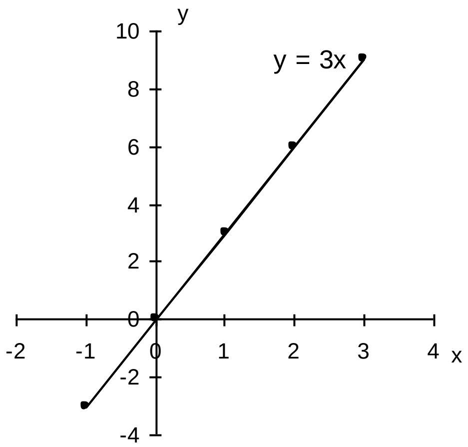
Gráfico da Função Linear

Observe que a função linear é um caso particular da função afim f(x) = ax + b, em que b = 0. Com isso, o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.
Observe o exemplo:

Construir o gráfico da função f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por y = 3x

x	y = 3x	(x, ; y)
–1	y = 3(–1) = –3	(–1; –3)
0	y = 3.0 = 0	(0;0)
1	y = 3.1 = 3	(1; 3)
2	y = 3.2 = 6	(2;6)
3	y = 3.3 = 9	(3;9)

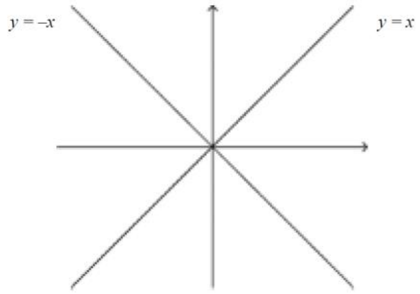
Localizando os pontos obtidos e ligando-os, vem:



Dentre as funções lineares, destacamos estas duas:

1) y = x e 2) y = – x

O gráfico da primeira é a reta bissetriz dos quadrantes I e III e o gráfico da segunda é a bissetriz dos quadrantes II e IV;



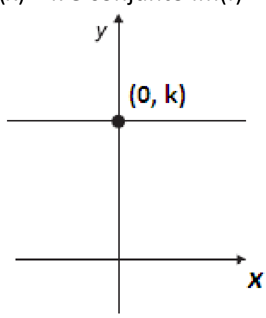
A função f: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ definida por y = x é chamada de *função identidade.*

4. Função Constante

Uma função f: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ recebe a denominação *função constante* quando a cada x $\in \mathfrak{R}$ associa sempre o mesmo elemento k $\in \mathfrak{R}$.

$\boxed{f(x) = k}$

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto (0, k). Com isso, a imagem da função f(x) = k é conjunto Im(f) = {k}.

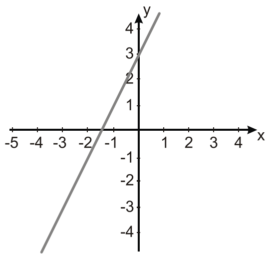


EXERCÍCIOS

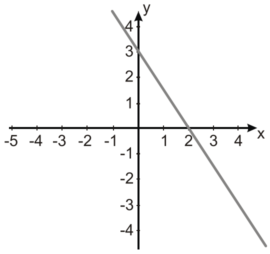
Nível 1

01) (UNISINOS – RS) Qual dos gráficos abaixo representa a reta de equação y = 2x + 3?

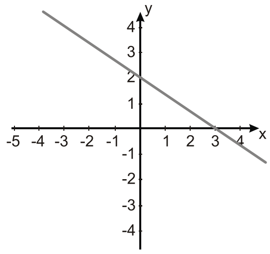
a)



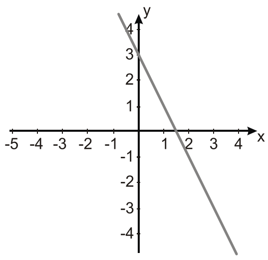
b)



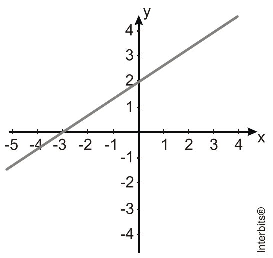
c)



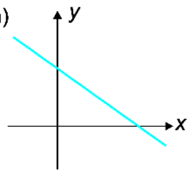
d)

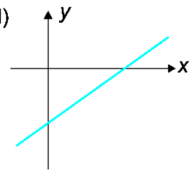


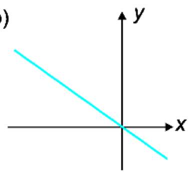
e)

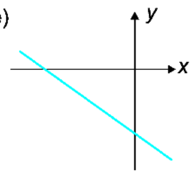


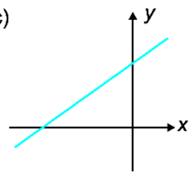
02) (UFMG – MG) Sendo a < 0 e b > 0, a única representação gráfica correta para a função f(x) = ax + b é:

a)


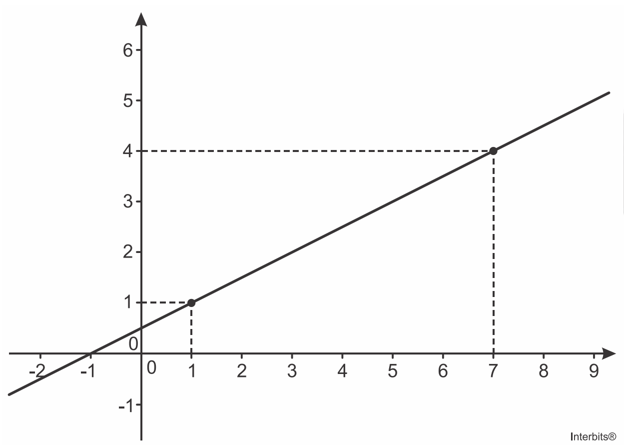
d)


b)


e)


c)


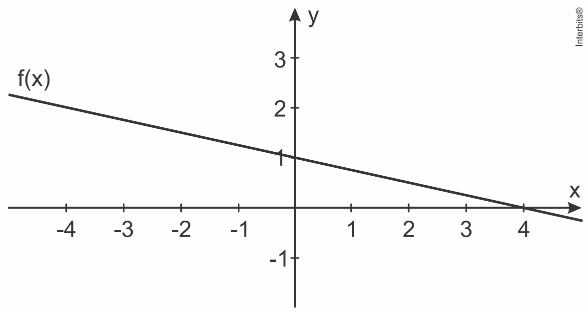
03) (IFSUL – RS) Uma função do 1º grau $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ possui o gráfico abaixo.



A lei da função f é

a) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$
b) $f(x)=x+1$
c) $f(x)=2x+\frac{1}{2}$
d) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

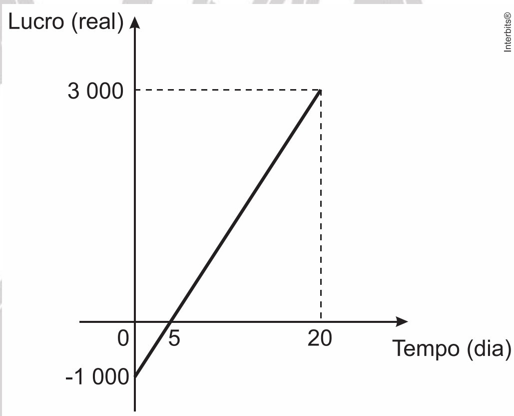
04) (UEG – GO) Considere o gráfico a seguir de uma função real afim $f(x)$.



A função afim $f(x)$ é dada por

a) $f(x)=-4x+1$
b) $f(x)=-0{,}25x+1$
c) $f(x)=-4x+4$
d) $f(x)=-0{,}25x-3$

05) Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30.



A representação algébrica do lucro (L) em função do tempo (t) é

a) $L(t)=20t+3.000$
b) $L(t)=20t+4.000$
c) $L(t)=200t$
d) $L(t)=200t-1.000$
e) $L(t)=200t+3.000$

Nível 2

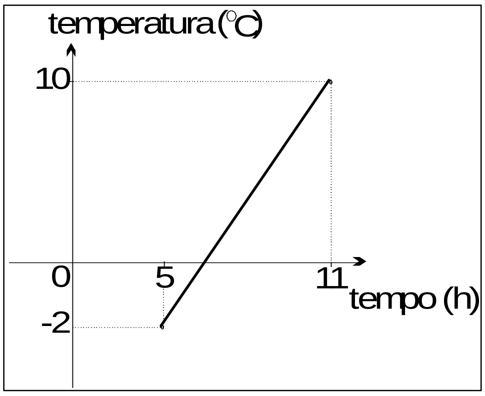
06) (PUC – PR) Seja a uma função afim $f(x)$, cuja forma é $f(x) = ax + b$, com a e b números reais. Se $f(-3) = 3$ e $f(3) = -1$, os valores de a e b, são respectivamente:

a) 2 e 9
b) 1 e -4
c) $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{5}$
d) 2 e -7
e) $-\frac{2}{3}$ e 1

07) (ENEM) As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:
QO = –20 + 4P QD = 46 – 2P
em que QO é quantidade de oferta, QD é a quantidade de demanda e P é o preço do produto. A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando QO e QD se igualam. Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5
b) 11
c) 13
d) 23
e) 33

08) (ACAFE – SC) O gráfico abaixo mostra a temperatura de uma região de Santa Catarina, das 5 horas até as 11 horas.



Pela análise do gráfico, é **FALSO** afirmar que:

a) a temperatura atingiu 0^0C às 6h
b) a temperatura esteve negativa durante 5 horas
c) o período em que a temperatura esteve negativa foi no intervalo [5, 6 [horas
d) o período em que a temperatura esteve positiva foi no intervalo] 6, 11] horas
e) a temperatura esteve positiva durante 5 horas

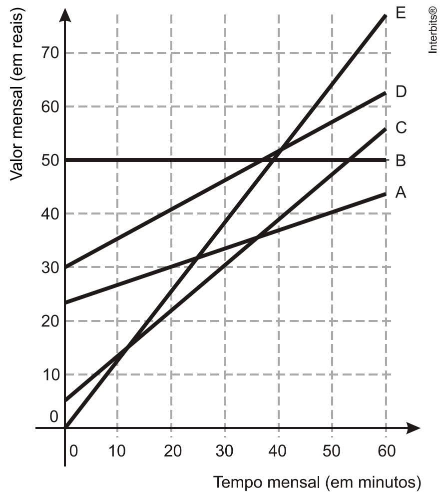
09) (UFSM – RS) De acordo com dados da UNEP - Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente, a emissão de gases do efeito estufa foi de 45 bilhões de toneladas de CO_2 em 2005 e de 49 bilhões de toneladas em 2010. Se as emissões continuarem crescendo no mesmo ritmo atual, a emissão projetada para 2020 é de 58 bilhões de toneladas. Porém, para garantir que a temperatura do planeta não suba mais que $2°C$ até 2020, a meta é reduzir as emissões para 44 bilhões de toneladas.

Suponha que a meta estabelecida para 2020 seja atingida e considere que Q e t representam, respectivamente, a quantidade de gases do efeito estufa (em bilhões de toneladas) e o tempo (em anos), com $t = 0$ correspondendo a 2010, com $t = 1$ correspondendo a 2011 e assim por diante, sendo Q uma função afim de t.

A expressão algébrica que relaciona essas quantidades é

a) $Q = -\frac{9}{10}t + 45.$
b) $Q = -\frac{1}{2}t + 49.$
c) $Q = -5t + 49.$
d) $Q = \frac{1}{2}t + 45.$
e) $Q = \frac{9}{10}t + 49.$

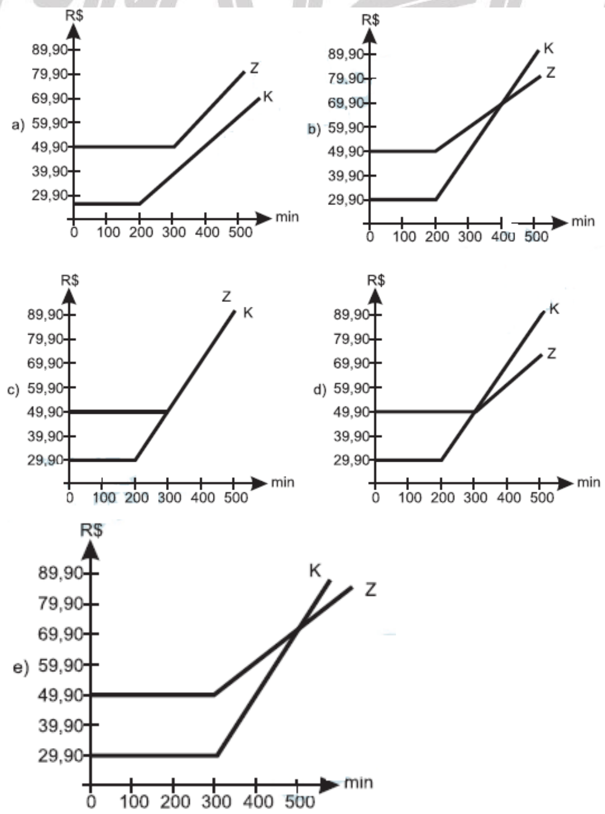
10) (ENEM) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$30,00 por mês com telefone.
Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

a) A b) B c) C d) D e) E

11) (ENEM) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente. O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é

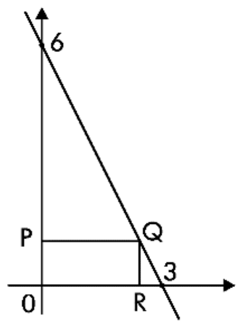


Nível 3

12) (IFSC – SC) Para organizar um jantar para 80 convidados, solicitaram-se a dois restaurantes (A e B) orçamentos de um mesmo cardápio. O restaurante A cobra R$ 20,00 por convidado presente e uma taxa de R$ 15,00 por convidado que faltar ao jantar. Já o restaurante B cobra R$ 25,00 por convidado presente e uma taxa de R$ 12,00 por convidado faltante. Sobre os possíveis valores a serem pagos, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

01. O valor $V_A(p)$ pago se p convidados estiverem presentes no restaurante A pode ser representado pela função $V_A(p) = 5p + 1200$, $p \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 80$.
02. Caso faltem 22 convidados, a conta será maior no restaurante A.
04. Se nenhum convidado faltar, o valor da conta será o mesmo em ambos os restaurantes.
08. Caso faltem 15 convidados, a conta ficará menor no restaurante B.
16. O valor $V_B(p)$ pago se p convidados estiverem presentes no restaurante B pode ser representado pela $V_B(p) = 23p + 960$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 80$.

13) (UFRGS – RS) Considere o retângulo OPQR da figura abaixo. A área do retângulo em função da abscissa x do ponto R é:



a) $A = x^2 – 3x$
b) $A = - 3x^2 + 9x$
c) $A = 3x^2 – 9x$
d) $A = - 2x^2 + 6x$
e) $A = 2x^2 – 6x$

14) (ENEM) O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as da janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada. Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) y = 4 300x
b) y = 884 905 x
c) y = 872 005 + 4 300x
d) y = 876 305 + 4 300x
e) y = 880 605 + 4 300x

15) (UFSC – SC) Dois líquidos diferentes encontram-se em recipientes idênticos e têm taxas de evaporação constantes. O líquido *I* encontra-se inicialmente em um nível de *100 mm* e evapora-se completamente no quadragésimo dia. O líquido *II*, inicialmente com nível de *80 mm*, evapora-se completamente no quadragésimo oitavo dia. Determinar, antes da evaporação completa de ambos, ao final de qual dia os líquidos terão o mesmo nível (em *mm*) nesses mesmos recipientes.

GABARITO – VÍDEO AULA 03

1) a	**2)** a	**3)** d	**4)** b	**5)** d	**6)** e
7) b	**8)** b	**9)** b	**10)** c	**11)** d	
12) 01	**13)** d	**14)** c	**15)** 24		

VÍDEO AULA 04

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU PARTE I

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

1. Definição

Uma função f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é polinomiail do 2º grau se a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

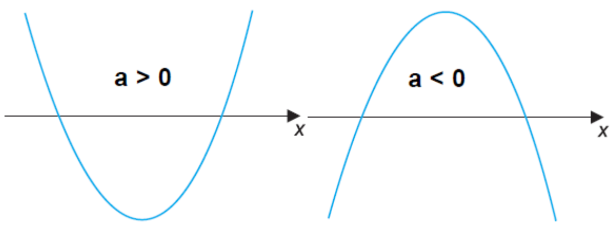
Observe alguns exemplos:

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 9$, onde a = 3, b = – 7 e c = 9
b) $f(x) = -2x^2 + 7x$, onde a = – 2, b = 7 e c = 0
c) $f(x) = x^2 - 8$, onde a = 1, b = 0 e c = – 8.

2. Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º Grau de R em R é uma parábola. A concavidade da parábola é determinada pelo sinal do coeficiente **a** (coeficiente de x^2). Assim quando:

- **a > 0** tem-se a parábola com concavidade para cima
- **a < 0** tem-se parábola com concavidade para baixo



3. Pontos Notáveis da Parábola

Considere a função f(x) = $ax^2 + bx + c$, com a, b, c $\in \Re$ e $a \neq 0$. A parábola que representa a função descrita possui alguns interceptos notáveis.

- <u>INTERCEPTO COM EIXO y</u>

O ponto que o gráfico intercepta o eixo y possui coordenadas (0,c)

- <u>INTERCEPTO COM EIXO x (RAÍZES OU ZEROS DA FUNÇÃO)</u>

Para determinar o(s) ponto(s) em que o gráfico intercepta o eixo x, deve-se fazer f(x) = 0.
Determinam-se, então, as raízes ou zeros da função resolvendo-se a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde:

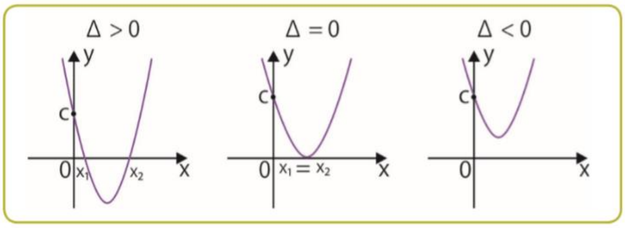
$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{onde } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Lembre-se que $\Delta = b^2 - 4ac$ é denominado discriminante.

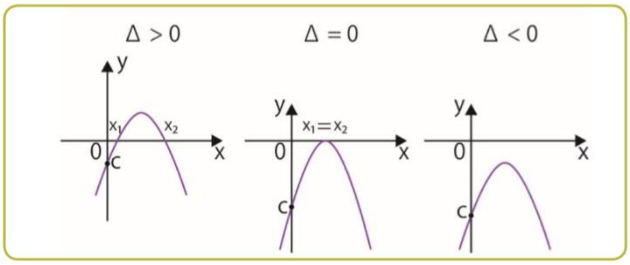
Se $\Delta > 0$, tem-se duas raízes reais e diferentes Se $\Delta = 0$, tem-se duas raízes reais e iguais Se $\Delta < 0$, não há raízes reais

A parábola que representa a função polinomial do 2º grau pode se "comportar" de seis modos possíveis, conforme os valores do coeficiente **a** e de Δ . Observe o quadro abaixo:

a > 0



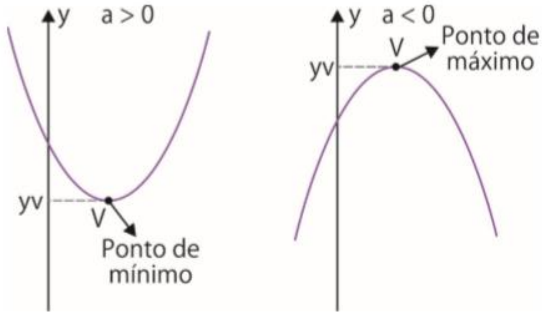
a < 0



4. Estudo do vértice da parábola

O vértice da parábola é o ponto que corresponde à ordenada máxima ou mínima, e indicaremos por $V(x_V, y_V)$.

- O vértice é o ponto de máximo da função se a < 0.
- O vértice é o ponto de mínimo da função se a > 0.



Coordenadas do vértice

O vértice é um ponto de coordenadas $V(x_V, y_V)$, onde

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Justificativa:

- Cálculo da abscissa do vértive (x_V)

Dada a função f(x) = $ax^2 + bx + c$, sendo x_V a abscissa do vértice da parábola correspondente, os pontos de abscissas $x_V - k$ e $x_V + k$ possuem ordenadas iguais, para qualquer valor de k. Então:

$$a.(x_V - k)^2 + b.(x_V - k) + c = a.(x_V + k)^2 + b.(x_V + k) + c$$

$$a.x_V^2 - 2.a.x_V.k + k^2 + b.x_V - b.k + c = a.x_V^2 + 2.a.x_V.k + k^2 + b.x_V + b.k + c$$

$$-4.a.x_V.k = 2.b.k$$

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

- Cálculo da ordenada do vértive (y_V)

Substituindo x por $x_V = -\frac{b}{2a}$ na função f(x) = $ax^2 + bx + c$, temos:

$$f(x_V) = y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$f(x_V) = y_V = a.\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x_V) = y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x_V) = y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x_V) = y_V = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

5. Imagem da função quadrática

O conjunto – imagem da função polinomial do 2º grau é obtido pela projeção da parábola sobre o eixo y.
Observe que o conjunto – imagem da função polinomial do 2º grau depende diretamente da ordenada do vértice (y_V).

Assim:

- Se a > 0, então Im = $\{y \in R \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$
- Se a < 0, então Im = $\{y \in R \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$

Exercícios Resolvidos:

1) Determine as raízes, o gráfico, as coordenadas do vértice e a imagem da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Resolução:

Para determinar as raízes de f(x) fizemos:
$f(x) = 0$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
logo vem que $\mathbf{x_1 = 1}$ $\mathbf{x_2 = 3}$

- O vértice da parábola possui coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$

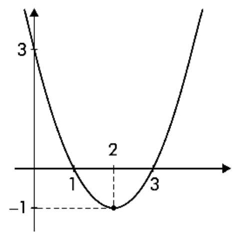
$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.1.3$

$x_v = -\frac{b}{2a}$ $\qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

$x_v = -\frac{(-4)}{2.1}$ $\qquad y_v = -\frac{4}{4.1}$

$\mathbf{x_v = 2}$ $\qquad \mathbf{y_v = -1}$

- A parabola intercepta o eixo y no ponto de coordenadas (0, c), logo em (0, 3)

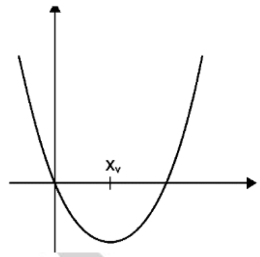


A imagem da função é dada pelo conjunto
Im (f) = $\{y \in R \mid y \geq -1\}$

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) A parábola abaixo é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Assinale a alternativa correta:



a) a < 0, b = 0, c = 0
b) a > 0, b = 0, c < 0
c) a > 0, b < 0, c = 0
d) a < 0, b < 0, c > 0
e) a > 0, b > 0, c > 0

02) Em relação ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$ definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determine:

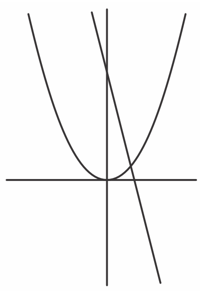
a) a intersecção com o eixo y
b) a intersecção com o eixo x
c) as coordenadas do vértice
d) Imagem da função

03) Seja a função f de R em R, definida por $f(x) = -x^2 + 3x - 4$. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o vértice da parábola que representa f localiza-se:

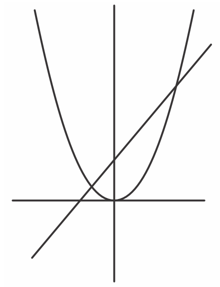
a) no primeiro quadrante.
b) no segundo quadrante.
c) no terceiro quadrante.
d) no quarto quadrante.
e) sobre o eixo das abscissas.

04) Qual das alternativas a seguir representa, conjuntamente, os esboços dos gráficos das funções reais $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x - 4$?

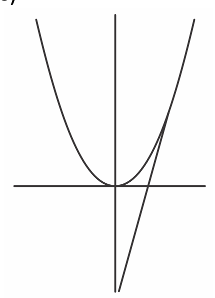
a)



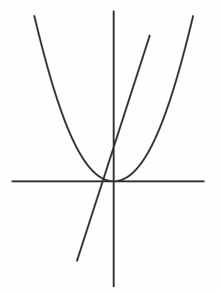
b)



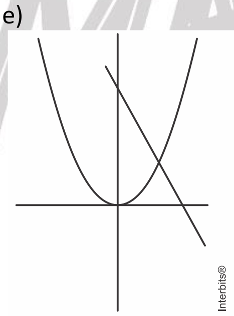
c)



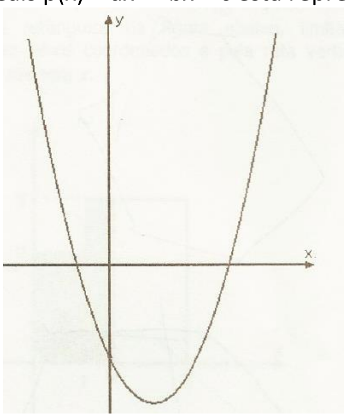
d)



e)



05) (UFRGS – RS) O gráfico do polinômio de coeficientes reais $p(x) = ax^2 + bx + c$ está representado abaixo.



Com base nos dados desse gráfico, é correto afirmar que os coeficientes a, b e c satisfazem as desigualdades

a) $a > 0$; $b < 0$; $c < 0$
b) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$
c) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$
d) $a > 0$; $b > 0$; $c < 0$
e) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$

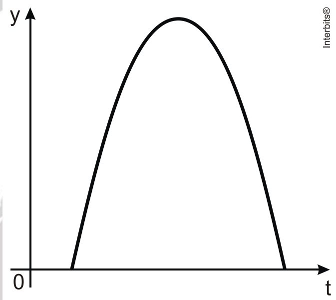
06) Considere a função real definida por $f(x) = 2x^2 - 16x$. Obtenha:

a) As coordenadas dos pontos em que a parábola correspondente intercepta o eixo das abscissas.
b) As coordenadas do vértice da correspondente parábola.
c) conjunto-imagem da função

07) Determine as raízes, o gráfico, as coordenadas do vértice e a imagem de cada função.

a) $f: \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$
b) $f: \Re \to \Re$, $f(x) = (x + 2)(x - 4)$
c) $f: \Re \to \Re$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
d) $f: \Re \to \Re$, $f(x) = x^2 - 3x$

08) (UFSM – RS) Uma pessoa ingere uma certa substância que se concentra em seu cérebro. O gráfico a seguir mostra essa concentração em função do tempo t.

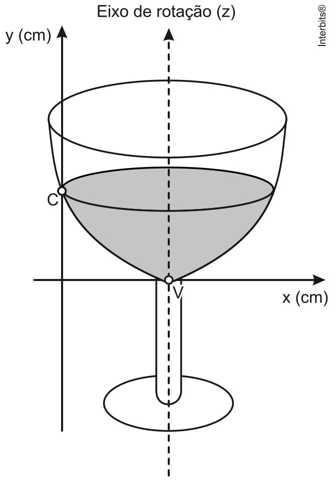


Admitindo que a concentração y seja dada por uma função quadrática $y=at^2 +bt + c$, é correto afirmar que

a) $a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$.
b) $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$.
c) $a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$.
d) $a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$.
e) $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac = 0$.

Nível 2

09) (ENEM) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.
Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

10) (ENEM) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:
$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18
b) 20
c) 36
d) 45
e) 54

11) (UFSM – RS) A água é essencial para a vida e está presente na constituição de todos os alimentos. Em regiões com escassez de água, é comum a utilização de cisternas para a captação e armazenamento da água da chuva.
Ao esvaziar um tanque contendo água da chuva, a expressão

$$V(t) = -\frac{1}{43200}t^2 + 3$$

representa o volume (em m^3) de água presente no tanque no instante t (em minutos).

Qual é o tempo, em horas, necessário para que o tanque seja esvaziado?

a) 360.
b) 180.
c) 120.
d) 6.
e) 3.

12) (ENEM) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:
- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

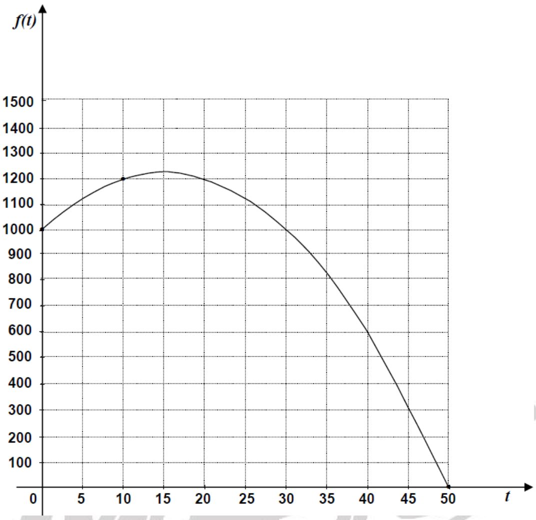
b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x.$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x.$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2.$

e) $y = x.$

13) (UFSC – SC) Os praguicidas, também denominados pesticidas, defensivos agrícolas ou agrotóxicos, são substâncias que, aplicadas à lavoura, permitem matar seres que podem prejudicá-la. No entanto, esses produtos apresentam desvantagens pois, devido a sua grande estabilidade no meio ambiente, sua velocidade de decomposição natural é muito lenta. Muitos insetos se tornaram resistentes a esses produtos e grandes quantidades foram utilizadas para combater um número cada vez maior de espécies. Suponha que em um laboratório foi pesquisada a eficiência do DDT (dicloro-difenil-tricloroetano) no combate a uma determinada população de insetos. O gráfico abaixo representa a população de insetos em função do tempo t, em dias, durante o período da experiência.



01. A função que descreve a relação entre a população de insetos e o tempo é $f(t) = -t^2 + 30t + 1000$.
02. O número inicial da população de insetos é de *1200* insetos.
04. A população de insetos cresce somente até o décimo dia.
08. No vigésimo dia de experiência a população de insetos é igual à população inicial.
16. A população de insetos foi exterminada em *50* dias.

14) (UFSC – SC) Seja f: R $\to$ R, definida por: $f(x) = -x^2$, determine a soma dos números associados às afirmativas verdadeiras:

01. O gráfico de f(x) tem vértice na origem.
02. f(x) é crescente em R.
04. As raízes de f(x) são reais e iguais.
08. f(x) é decrescente em $[0, +\infty)$
16. $Im(f) = \{ y \in R \mid y \le 0\}$
32. O gráfico de f(x) é simétrico em relação ao eixo x

Nível 3

15) (ACAFE – SC) Seja a função $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ de domínio [-2, 2]. O conjunto imagem é:

a) [0, 3]
b) [-5, 4]
c) $]-\infty, 4]$
d) [-3, 1]
e) [-5, 3]

16) (IBMEC – RJ) O gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$ é uma parábola de vértice V e intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B. A área do triângulo AVB é

a) 27/8
b) 27/16
c) 27/32
d) 27/64
e) 27/128

17) (UFRGS – RS) Considere os gráficos das funções f, g e h, definidas por $f(x)=2$, $g(x)=x^2-5x+6$ e $h(x)=x^2-11x+30$, representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

O número de pontos distintos em que o gráfico de f intercepta os gráficos de g e h é

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

18) (ENEM) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.

Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função

$$T(t) = \begin{cases} \dfrac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \le t < 100 \\ \dfrac{2}{125}t^2 - \dfrac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \ge 100 \end{cases}$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.
Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48°C e retirada quando a temperatura for 200°C
O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a
a) 100
b) 108
c) 128
d) 130.
e) 150

19) (IFSC – SC) José seguiu um programa nutricional para redução de peso durante 20 meses. Ele concluiu que, durante o programa, sua massa (em kg) ao final de cada mês t, era dada pela função

$$m(t) = \begin{cases} 102 - \dfrac{t^2}{10}, & 0 \le t \le 10 \\ -3t + 122, & 10 < t \le 20 \end{cases}, \text{ com } t \in N$$

Em relação aos dados acima, assinale no cartão-resposta a soma da(s) proposição(ões) CORRETA(S).

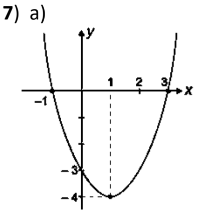
01. Ao final do quinto mês, a massa de José era igual a 107kg.
02. José tinha 122 kg ao iniciar o programa.
04. Nos primeiros 10 meses, José perdeu mais peso do que nos meses seguintes.
08. Durante o programa, José perdeu 40 kg.
16. $m(t)$ é uma função crescente para $0 \le t \le 20$.
32. Ao final do décimo quinto mês, José estava com 77 kg.

20) (UFSM – RS)Segundo a assessoria de comunicação do FNDE, o projeto "Educando com a Horta Escolar" contou com a participação de 3 municípios brasileiros em 2007, 14 municípios em 2008 e contará com 40 municípios em 2009. A tabela ao lado apresenta o número f(t) de municípios brasileiros que aderiram ao projeto em função do tempo t, onde t = 0 representa o ano 2007, t = 1 representa o ano de 2008, t = 2 representa o ano 2009, e assim por diante. Supondo que $f(t) = at^2 + bt + c$, com a, b, c $\in \Re$, pode-se prever que o número de municípios que participarão desse projeto, em 2017, será igual a

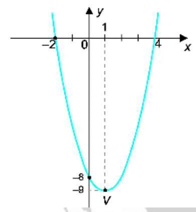
t	f(t)
0	3
1	14
2	40

a) 188
b) 388
c) 588
d) 788
e) 988

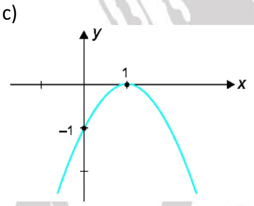
GABARITO – VÍDEO AULA 04
1) c
2) a) (0, 8) b) (2, 0) e (4, 0) c) (3, -1)
d) Im = [-1 , ∞ [e) 1 u.A
3) d **4)** c **5)** b
6) a) (0, 0) e (8, 0)b) V(4, -32)
c) Im(f) = {y ∈ℜ/ y ≥ - 32}
7) a)



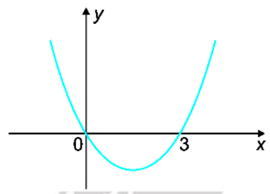
raízes: -1 e 3 vértice: (1, -4) Im = { y ∈ R / y ≥ – 4 }
b)



raízes: -2 e 4 vértice: (1, -9) Im = { y ∈ R / y ≥ -9 }
c)



raiz: 1 vértice: (1, 0) Im = { y ∈ R / y ≤ 0 }
d)



raízes: 0 e 3 vértice: (3/2, -9/4) Im = {y ∈ R/ y ≥ -9/4}
8) c **9)** e **10)** c **11)** d **12)** a
13) 17 **14)** 29 **15)** b **16)** e **17)** c
18) d **19)** 40 **20)** d

VÍDEO AULA 05

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU
PARTE II

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

Máximos e Mínimos

Em muitas questões contextuais envolvendo funções da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ faz-se necessário o estudo do valor máximo ou mínimo da função.

- Se $a < 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite valor máximo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_v = -\frac{b}{2a}$
- Se $a > 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite valor mínimo $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_v = -\frac{b}{2a}$

Exercício Resolvido

Um projétil é lançado verticalmente, para cima, e sua trajetória é uma curva de equação $s = -40t^2 + 200t$, **s** é o espaço percorrido, em metros, em **t** segundos. A altura máxima atingida por esse projétil, em metros, é:

Resolução:

A altura máxima atingida por esse projétil é dado pela ordenada do vértice, logo:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (200)^2 - 4.(-40).0$$
$$\Delta = 40000$$
$$h_{máxima} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(40000)}{4.(-40)}$$
$$h_{máxima} = \frac{-40000}{-160}$$
$$h_{máxima} = 250 metros$$

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Considere a função f: $\Re \rightarrow \Re$, dado por $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Obtenha:

a) O valor mínimo de f(x)
b) O valor de x para o qual f(x) é mínimo

02) Analisando a função quadrática $f(x) = x^2 - 8x + 12$, podemos afirmar que seu valor mínimo é

a) 12.
b) 4.
c) 0.
d) –4.
e) –12.

03) Examine a função real $f(x) = 2x - 3x^2$ quanto à existência de valores e pontos de máximos e mínimos. Analise o problema e assinale a alternativa CORRETA.

a) A função atinge o valor máximo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.
b) A função atinge o valor mínimo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.
c) A função atinge o valor máximo de $1/3$, no ponto $x = 2/3$.
d) A função atinge o valor mínimo de $2/3$, no ponto $x = 1/3$.
e) A função atinge o valor máximo de $1/3$, no ponto $x = 1/3$.

04) Considere a função f: $\Re \rightarrow \Re$, dado por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Obtenha:

a) O valor mínimo de f(x)
b) O valor de x para o qual f(x) é mínimo

05) Considere a função f: $\Re \rightarrow \Re$, dado por $f(x) = -x^2 + 4x$. Obtenha:

a) O valor máximo de f(x)
b) O valor de x para o qual f(x) é máximo

Nível 2

06) (PUC – PR) O lucro de uma determinada empresa é dado pela lei $L(x) = -x^2 + 8x - 7$, em que x é a quantidade vendida (em milhares de unidades) e L é o lucro (em reais). A quantidade que se deve vender para que o lucro seja máximo bem como o valor desse lucro são, respectivamente:

a) 3.000 unidades e R$ 6.000,00
b) 4.000 unidades e R$ 9.000,00
c) 4.000 unidades e R$ 8.000,00
d) 5.000 unidades e R$ 12.000,00
e) 4.500 unidades e R$ 9.000,00

07) (ACAFE - SC) Após o lançamento de um projétil, sua altura h, em metros, t segundos após o seu lançamento é dada por $h(t) = -t^2 + 20t$. Em relação a este lançamento, analise as afirmações a seguir.

I. A altura máxima atingida pelo projétil foi de 10m.
II. O projétil atingiu a altura máxima quando t=10s.
III. A altura do projétil é representada por uma função polinomial quadrática cujo domínio é [0,20].
IV. Quando t=11, o projétil ainda não atingiu sua altura máxima.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I – III
b) I – II – IV
c) II – III
d) III – IV

08) (ESPM) O Custo de produção e o preço de venda, em reais, de x unidades de certa mercadoria são dados, respectivamente, pelas funções $C(x) = 20x - x^2$ e $V(x) = 60x - 3x^2$, para $0 < x < 20$. O lucro máximo obtido com a venda dessa mercadoria é de:

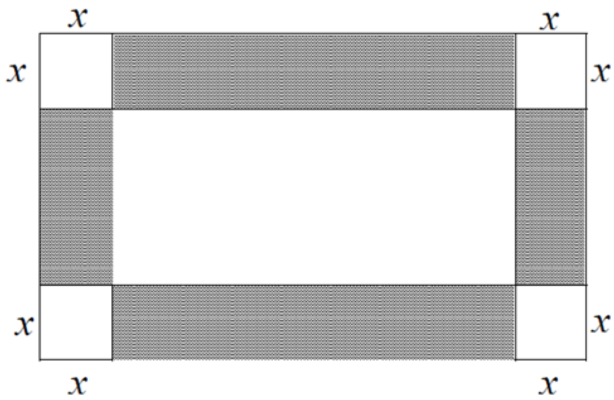
a) R$ 240,00
b) R$ 200,00
c) R$ 180,00
d) R$ 280,00
e) R$ 300,00

09) (ENEM) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

a) 4.
b) 6.
c) 9.
d) 10.
e) 14.

Nível 3

10) (UFSC – SC) Tem-se uma folha de cartolina com forma retangular, cujos lados medem *56cm* e *32cm* e deseja-se cortar as quinas, conforme ilustração a seguir. Quanto deve medir x, em centímetros, para que a área da região hachurada seja a maior possível?



11) (ENEM) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	**Classificação**
$T < 0$	Muito baixa
$0 \le T \le 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \le T \le 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

a) muito baixa.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

12) (ACAFE – SC) O vazamento ocorrido em função de uma rachadura na estrutura da barragem de Campos Novos precisa ser estancado. Para consertá-la, os técnicos verificaram que o lago da barragem precisa ser esvaziado e estimaram que, quando da constatação da rachadura, a capacidade C de água no lago, em milhões de metros cúbicos, poderia ser calculada por $C(t) = -2t^2 - 12t + 110$, onde t é o tempo em horas.

Com base no texto, analise as afirmações:

I. A quantidade de água restante no lago, 4 horas depois de iniciado o vazamento, é de 30 milhões de metros cúbicos.
II. A capacidade desse lago, sabendo que estava completamente cheio no momento em que começou o vazamento, é de 110 milhões de metros cúbicos.
III. Os técnicos só poderão iniciar o conserto da rachadura quando o lago estiver vazio, isto é, 5 horas depois do início do vazamento.
IV. Depois de 3 horas de vazamento, o lago está com 50% de sua capacidade inicial.

Todas as afirmações corretas estão em:

a) I - II - III
b) I - III - IV
c) III - IV
d) I - II - III - IV

13) (ENEM) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:
- Barra I: R$ 2,00;
- Barra II: R$ 3,50;
- Barra III: R$ 4,00;
- Barra IV: R$ 7,00;
- Barra V: R$ 8,00.

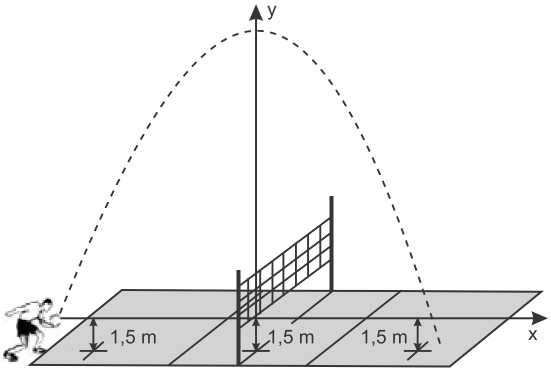
Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate.
A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.
Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

14) (ENEM) A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.
Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de

a) R$ 10,00. b) R$ 10,50. c) R$ 11,00.
d) R$ 15,00. e) R$ 20,00.

15) (ENEM) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado

a) apenas no ginásio I.
b) apenas nos ginásios I e II.
c) apenas nos ginásios I, II e III.
d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.
e) em todos os ginásios.

GABARITO - VÍDEO AULA 05

1) a) 1 b) 2 **2)** d **3)** e
4) a) 2 b) 1 **5)** a) 4 b) 2 **6)** b **7)** c
8) b **9)** b **10)** 11 **11)** d **12)** a **13)** d
14) d **15)** d

VÍDEO AULA 06

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU – PARTE III

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

1. Forma Fatorada

Toda função da forma f(x) = ax² + bx + c, com a, b, c $\in \Re$ e $a \neq 0$ pode ser fatorada na forma: $\boxed{f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)}$ onde x_1 e x_2 são as raízes da função.

Justificativa:

Sejam x_1 e x_2 raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

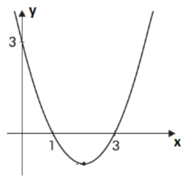
Lembre-se que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

Acompanhe o desenvolvimento:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$f(x) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$
$$f(x) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2\right]$$
$$f(x) = a\left[x^2 - x.x_1 - x.x_2 + x_1.x_2\right]$$
$$f(x) = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right]$$
$$f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)$$

Exercício Resollvido

Escrever a função do 2º grau representada pela parábola abaixo.



Observe que o gráfico fornece 1 e 3 como as raízes da função e o ponto de coordenadas (0, 3).

Partindo da forma fatorada, temos:

$f(x) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)]$

f(x) = a.(x – 1).(x – 3)

Para definirmos o valor do coeficiente a substituímos o ponto de coordenadas (0, 3) na função. Observe:

f(x) = a.(x – 1).(x – 3)

3 = a(0 – 1).(0 – 3) $\to$ a = 1

Logo: f(x) = a.(x – 1).(x – 3)

f(x) = 1.(x – 1).(x – 3)

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

2. Forma Canônica da Função Polinomial do 2º grau

Conhecendo-se as coordenadas do vértice da parábola V(x_V, y_V), podemos escrever a função polinomial do 2º grau assim:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$$

Justificativa:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left[(x - x_V)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

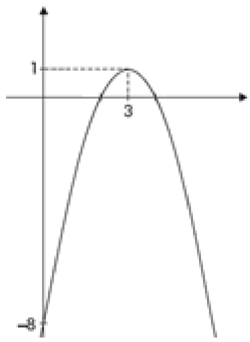
$$f(x) = a(x - x_V)^2 + a.\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a(x - x_V)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\boxed{f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v}$$

Exercício Resolvido

Escrever a função do 2º grau representada pela parábola abaixo.



Observe que o gráfico fornece as coordenadas do vértice V(3, 1) e o ponto de coordenadas (0, -8).

Partindo da forma canônica, temos:

$f(x) = a(x - 3)^2 + 1$

Para definirmos o valor do coeficiente a substituimos o ponto de coordenadas (0, -8) na função. Observe:

$f(x) = a(x - 3)^2 + 1$

$-8 = a(0 - 3)^2 + 1$

9a = - 9 $\to$ a = - 1

Logo: $f(x) = a(x - 3)^2 + 1$

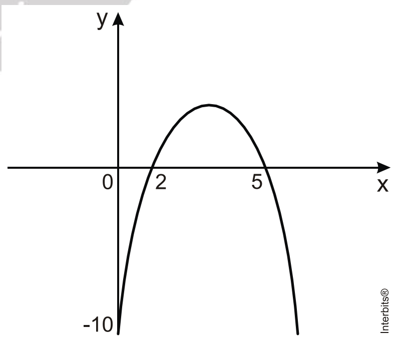
$f(x) = -1(x - 3)^2 + 1$

$f(x) = -x^2 + 6x - 8$

EXERCÍCIOS

Nível 1

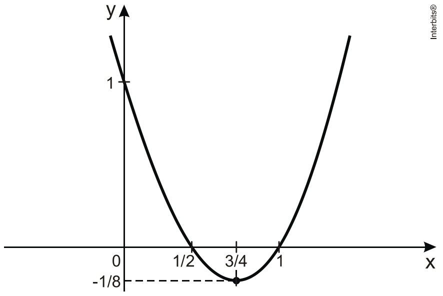
01) Seja uma função do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico está representado a seguir.



A soma dos coeficientes dessa função é

a) – 2.
b) – 3.
c) – 4.
d) – 6.

02) A função real representada pelo gráfico é definida por



a) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1.$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 1.$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

03) A função quadrática $f(x) = x^2 + bx + c$, com positivo, b e c reais, tem como zeros da função os valores $x' = -1$ e $x'' = 3$. Essa função é representada pela expressão:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3.$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 3.$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3.$

d) $f(x) = x^2 - 4x - 3.$

e) $f(x) = x^2 + 2x - 3.$

04) (ENEM) Suponha que para um trem trafegar de uma cidade à outra seja necessária a construção de um túnel com altura e largura iguais a 10m Por questões relacionadas ao tipo de solo a ser escavado, o túnel deverá ser tal que qualquer seção transversal seja o arco de uma determinada parábola, como apresentado na Figura 1. Deseja-se saber qual a equação da parábola que contém esse arco. Considere um plano cartesiano com centro no ponto médio da base da abertura do túnel, conforme Figura 2.

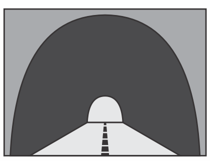


Figura 1 (Túnel)

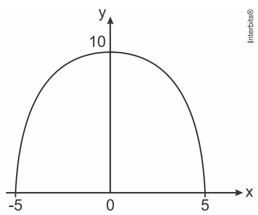


Figura 2

A equação que descreve a parábola é

a) $y = -\frac{2}{5}x^2 + 10$

b) $y = \frac{2}{5}x^2 + 10$

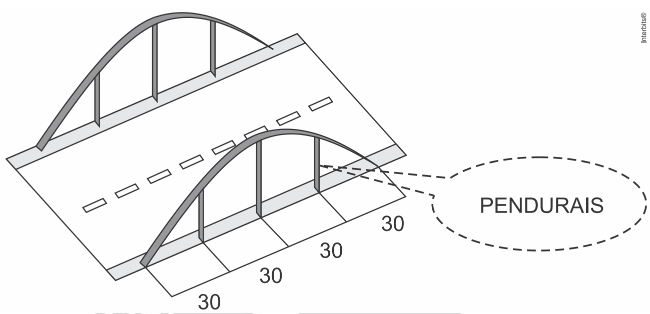
c) $y = -x^2 + 10$

d) $y = x^2 - 25$

e) $y = -x^2 + 25$

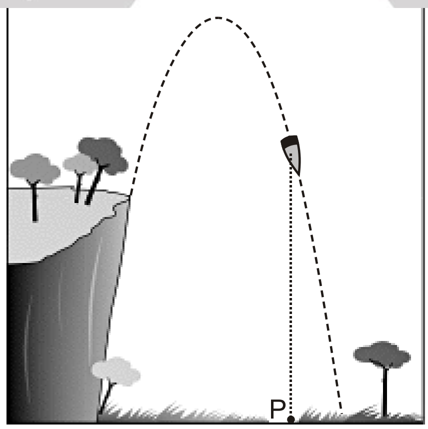
Nível 2

05) Uma ponte metálica, em forma de arco de parábola, será construída. Sua sustentação será feita com seis pendurais metálicos, três de cada lado, distando 30 m um do outro, como ilustra a figura abaixo. Sabendo que a ponte tem 40 m de altura, quantos metros de pendurais serão necessários para a construção desta ponte?



a) 120 m b) 140 m c) 160 m d) 180 m e) 200 m

06) (FUVEST – SP) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura abaixo. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



a) 60
b) 90
c) 120
d) 150
e) 180

07) (FGV – SP) O gráfico de uma função quadrática f (x) tem as seguintes características:
· O vértice é o ponto (4,-1).
· Intercepta o eixo das abscissas no ponto (5,0).
O ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas é:

a) (0,14)
b) (0,15)
c) (0,16)
d) (0,17)
e) (0,18)

08) (ENEM) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

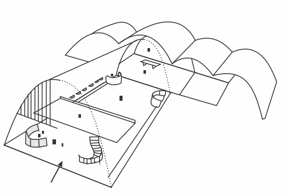


Figura 1

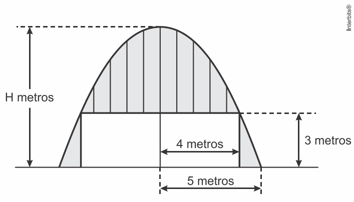


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

a) $\frac{16}{3}$
b) $\frac{31}{5}$
c) $\frac{25}{4}$
d) $\frac{25}{3}$
e) $\frac{75}{2}$

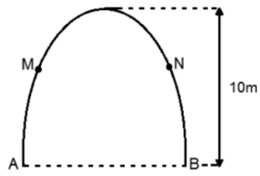
09) (ENEM) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real.

A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é

a) $T(x) = -x^2 + 16x + 57$
b) $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$
c) $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$
d) $T(x) = -x^2 - 16x + 87$
e) $T(x) = \frac{11}{16}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

10) (ACAFE - SC) A figura abaixo representa um portal de entrada de uma cidade cuja forma é um arco de parábola. A largura da base (*AB*) do portal é 8 metros e sua altura é de 10 metros. A largura (*MN*), em metros, de um vitral colocado a 6,4 metros acima da base é:

a) 5,2
b) 3,6
c) 6,0
d) 4,8



GABARITO - VÍDEO AULA 06

1) c **2)** d **3)** c **4)** a **5)** e **6)** d **7)** b
8) d **9)** a **10)** d

4) a) 2 b) 1 **5)** a) 4 b) 2 **6)** b **7)** c
8) b **9)** b **10)** 11 **11)** d **12)** a **13)** d
14) d **15)** d

VÍDEO AULA 07

INEQUAÇÃO 1º GRAU E 2º GRAU

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

Inequações do 1º grau – Introdução

Sr José pretende alugar, por R$81,00 por dia uma barraca para vender churros na semana das crianças no parque CRIANÇA FELIZ. Após fazer seus cálculos ele percebe que o custo para produzir um churros seria de R$2,00 e que ele venderia cada um ao valor de R$5,00. Surge então uma dúvida? Quantos churros ele deverá vender por dia para ter lucro? Vamos aos cálculos...

Ao final de um dia, o dinheiro em caixa que sr José ira ter é dado pela função:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = (5-2)x - 80 \\ y = 3x - 81 \end{array}}$$

em que y é o dinheiro em caixa e x é o número de churros vendidos.

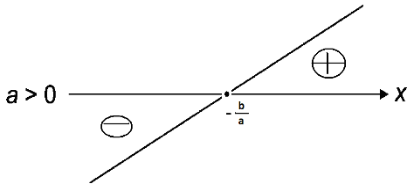
Podemos perceber que se sr José vender 27 churros no dia, ele não terá lucro nem prejuízo; se vender mais do que 27 churros ele terá lucro e menos de 27, prejuízo.

De maneira inconsciente, trabalhos com o estudo do sinal da função do 1º grau que é o objeto de estudo desse módulo.

1. Estudo do Sinal da Função Afim

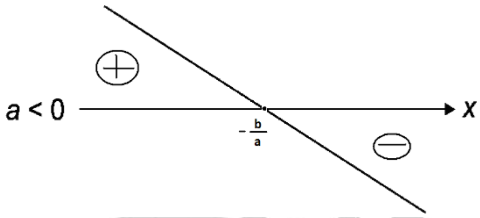
Para fazer o estudo do sinal da função afim f(x) = ax + b, devemos lembrar que f(x) é crescente para a > 0 e decrescente para a < 0 e que $x = -\frac{b}{a}$, raiz ou zero da função afim f(x) = ax + b, é o valor de x para o qual f(x) = 0.

1° Caso: A função é crescente



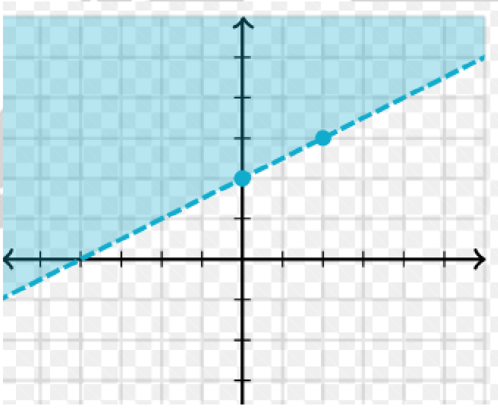
Sinais: $\begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \\ f(x) > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \\ f(x) < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \end{cases}$

2° Caso: A função é decrescente



Sinais: $\begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \\ f(x) > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a} \\ f(x) < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a} \end{cases}$

2. Inequações do 1º grau



Inequações são expressões abertas que exprimem uma desigualdade entre as quantidades dadas.

Uma inequação é dita do 1º grau se pode ser escrita na forma:

- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$
- $ax + b \geq 0$
- $ax + b \leq 0$

com $a \in \Re^*$ e $b \in \Re$.

Pode-se resolver qualquer inequação do 1° grau por meio do estudo do sinal de uma função do 1° grau, com o seguinte procedimento:

1. Iguala-se a expressão ax + b a zero;
2. Localiza-se a raiz no eixo x;
3. Estuda-se o sinal

Assim, resolver uma inequação da forma "ax + b > 0" significa determinar o conjunto de valores de x para os quais a função f(x) = ax + b assuma valores positivos e resolver inequações da forma "ax + b < 0" significa determinar o conjunto de valores de x para os quais a função f(x) = ax + b assuma valores negativos. Observe os exercícios resolvidos abaixo:

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

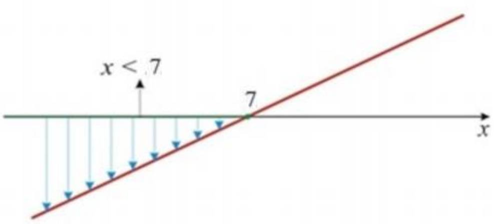
1) Resolver a inequação: 3x – 21 < 0.

Solução:

Raiz da função f(x) = 3x – 21:

$3x - 21 = 0 \rightarrow x = 7$

Gráfico:



Resolver a inequação 3x – 21 < 0 significa determinar os valores reais de x para os quais a função f(x) = 3x – 21 assume valores negativos, então:

$S = \{x \in \Re / x < 7\}$

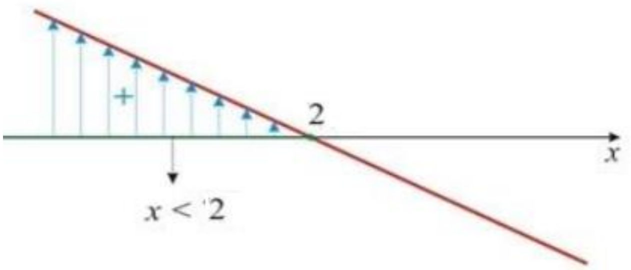
2) Resolver a inequação: – 4x + 8 > 0.

Solução:

Raiz da função f(x) = **– 4x + 8**:

$-4x + 8 = 0 \rightarrow x = 2$

Gráfico:



Resolver a inequação **– 4x + 8** > 0 significa determinar os valores reais de x para os quais a função f(x) = – 4x + 8 assume valores positivos, então:

$S = \{x \in \Re / x < 2\}$

No caso da resolução de inequações do 1º grau podemos lembrar que:

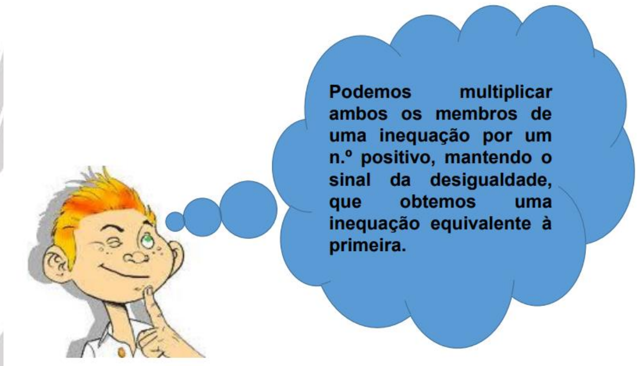
Se: $a > b$ então para $\forall m \rightarrow a + m > b + m$

Considere que numa balança temos 5kg num prato e 2kg no outro. Se acrescentarmos 3kg a cada um dos pratos, a situação não se altera.

$5 > 2$

$5 + 3 > 2 + 3$

Se: $a > b$ então para $\forall m > 0 \rightarrow a \,.\, m > b \,.\, m$



Se: $a > b$ então para $\forall m < 0 \rightarrow a \,.\, m < b \,.\, m$

Veja como seria a resolução do segundo exercício resolvido:

$-4x + 8 > 0$
Adicionado o número -8 aos dois membros da inequação, vem:
$-4x + 8 - 8 > 0 - 8$
$-4x$ > -8
Multiplicando pelo número **-1** os dois membros da inequação, vem:
$4x < 8$
Multiplicando pelo número **4** os dois membros da inequação, vem:
$x < 2$

$S = \{x \in \Re / x < 2\}$

RESUMO:

Inequações são expressões abertas que exprimem uma desigualdade entre as quantidades dadas. Uma inequação é dita do 1º grau se pode ser escrita na forma:

- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$
- $ax + b \geq 0$
- $ax + b \leq 0$

Nas inequações do 1º grau valem também, os princípio aditivo e multiplicativo com uma ressalva. Veja:

Se: $a > b$ então para $\forall m \rightarrow a + m > b + m$
Se: $a > b$ então para $\forall m > 0 \rightarrow a.m > b.m$
Se: $a > b$ então para $\forall m < 0 \rightarrow a.m < b.m$

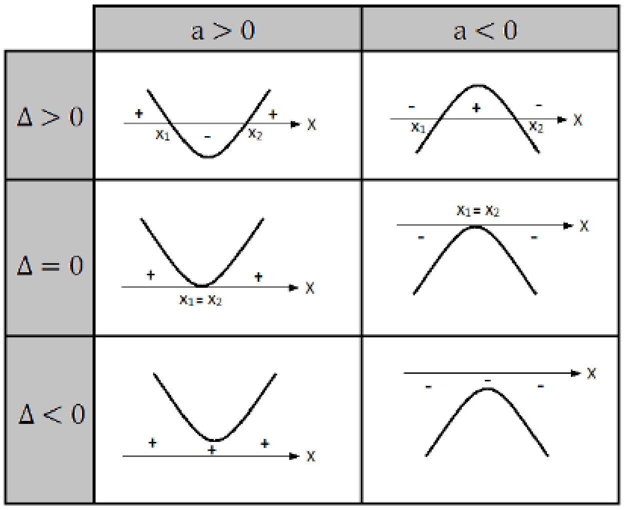
2. Inequações do 2º Grau

Inequação do 2º grau é toda desigualdade que pode ser escrita na forma geral:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ ax^2 + bx + c \leq 0 \\ ax^2 + bx + c > 0 \\ ax^2 + bx + c < 0 \end{cases} \quad \text{com } a \neq 0$$

Para resolver a inequação do 2º grau associa-se a expressão a uma função do 2º grau; assim, pode-se estudar a variação de sinais em função da variável. Posteriormente, seleciona-se os valores da variável que tornam a sentença verdadeira. Estes valores irão compor o conjunto-solução.

SINAIS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA



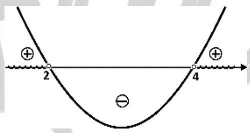
Exercícios Resolvidos:

1) Resolver a inequação $x^2 - 6x + 8 > 0$

Resolução:

Determinar a solução da inequação $x^2 - 6x + 8 > 0$ significa encontrar os valores reais de x para os quais a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$ assume valores positivos.

- Raízes de f(x): $x' = 2$ e $x'' = 4$
- Parábola com concavidade para cima ($a = 1 > 0$)



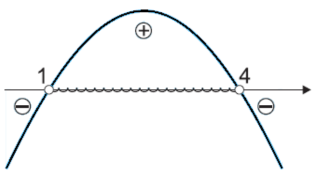
$S = \{x \in R \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$ ou $S =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

2) Resolver a inequação $-x^2 + 5x - 4 > 0$

Resolução:

Determinar a solução da inequação $-x^2 + 5x - 4 > 0$significa encontrar os valores reais de x para os quais a função $f(x) = -x^2 + 5x - 4 > 0$ assume valores negativos.

- Raízes de f(x): $x' = 1$ e $x'' = 4$
- Parábola com concavidade para baixo ($a = -1 < 0$)



$S = \{x \in R \mid 1 < x < 4\}$ ou $S =]1, 4[$

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Resolva em R as inequações:

a) $3(x + 1) > 2(x - 2)$

b) $\frac{x+10}{4} \leq \frac{3x}{2}$

c) $\frac{1}{3} - \frac{x}{2} < \frac{1}{4}$

02) (PUC – RJ) Assinale a menor solução inteira da inequação $4x - 10 > 2$.

a) 2
b) 3
c) 4
d) 12
e) 60

03) Resolver em $\Re$ as seguintes inequações:

a) $x^2 - 6x + 8 > 0$
b) $x^2 - 6x + 8 \leq 0$
c) $-x^2 + 9 > 0$
d) $x^2 \leq 4$
e) $x^2 > 6x$
f) $x^2 \geq 1$
g) $x^2 - 12x + 27 > 0$
h) $x^2 - 12x + 27 \leq 0$
i) $x^2 - x - 20 < 0$
j) $x^2 - x - 20 \geq 0$
l) $-x^2 + 6x - 8 < 0$
m) $2x^2 \geq 5x - 2$
n) $-x^2 < -4$
o) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$
p) $x^2 - 4x + 5 > 0$

04) O conjunto solução da inequação $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ é:

a) $\{x \in R \mid -1 < x < 3\}$
b) $\{x \in R \mid -1 < x \leq 3\}$
c) $\{x \in R \mid x < -1 \text{ ou } x > 3\}$
d) $\{x \in R \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$
e) $\{x \in R \mid -1 \leq x \leq 3\}$

05) (PUC – RJ) O conjunto das soluções inteiras da inequação $x^2 - 3x \leq 0$ é:

a) {0,3}
b) {1,2}
c) {–1,0,2}
d) {1,2,3}
e) {0,1,2,3}

Nível 2

06) (ENEM) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade *q* de produtos é dado por uma função, simbolizada por *CT,* enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade *q* também é uma função, simbolizada por *FT.* O lucro total *(LT)* obtido pela venda da quantidade *q* de produtos é dado pela expressão *LT(q) = FT(q) – CT(q)*. Considerando-se as funções *FT(q) = 5q e CT(q) = 2q* + 12 como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

a) 0
b) 1
c) 3
d) 4
e) 5

07) Se $f(x) = (9 - x^2)^{\frac{1}{4}}$, então o domínio de f é o intervalo:

a) $[-3, 3]$
b) $]-3, 3[$
c) $]-\infty, -3] \cup [3, \infty)$
d) $]-\infty, -3[\cup]3, \infty)$
e) $[-9, 9]$

08) (PUC – RS) A solução, em R, da inequação $x^2 < 8$ é:

a) $\{-2\sqrt{2}\,;\, 2\sqrt{2}\}$
b) $[-2\sqrt{2}\,;\, 2\sqrt{2}]$
c) $(-2\sqrt{2}\,;\, 2\sqrt{2})$
d) $(-\infty;\, 2\sqrt{2})$
e) $(-\infty;\, 2\sqrt{2}]$

09) (ACAFE-SC) O lucro de uma empresa é dado por L(x) = 100(8 –x)(x – 3), em que x é a quantidade vendida. Neste caso podemos afirmar que o lucro é:

a) positivo para x entre 3 e 8
b) positivo para qualquer que seja x
c) positivo para x maior do que 8
d) máximo para x igual a 8
e) máximo para x igual a 3

10) (CESGRANRIO) Se $x^2 - 6x + 4 \leq - x^2 + bx + c$ tem como solução o conjunto $\{x \in \Re \mid 0 \leq x \leq 3\}$, então b e c valem respectivamente:

a) 1 e – 1
b) – 1 e 0
c) 0 e – 1
d) 0 e 1
e) 0 e 4

11) (ENEM) Uma microempresa especializou-se em produzir um tipo de chaveiro personalizado para brindes. O custo de produção de cada unidade é de $R\$\,0,42$ e são comercializados em pacotes com 400 chaveiros, que são vendidos por $R\$\,280,00.$ Além disso, essa empresa tem um custo mensal fixo de $R\$\,12.800,00$ que não depende do número de chaveiros produzidos.
Qual é o número mínimo de pacotes de chaveiros que devem ser vendidos mensalmente para que essa microempresa não tenha prejuízo no mês?

a) 26
b) 46
c) 109
d) 114
e) 115

12) (ENEM) A capacidade de um reservatório de água é maior que 250 litros e menor que 300 litros. O número x de litros que há nesse reservatório satisfaz à inequação $\frac{x}{2} + 1 < 127.$

Assinale a alternativa que apresenta quantos litros de água há nesse reservatório.

a) 250 litros.
b) 251 litros.
c) 252 litros.
d) 253 litros.
e) 255 litros.

13) (UPF – RS) Sejam p e q números reais positivos tais que $p > q,$ é verdadeiro afirmar que

a) $2 - p < 2 - q$
b) $2 - p > 2 - q$
c) $\frac{p+q}{2} < q$
d) $\frac{p+q}{2} > p$
e) $\frac{p}{2} < \frac{q}{2}$

Nível 3

14) (ENEM) Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, $R\$\,300,00.$ Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$q = 400 - 100\,p,$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e $p,$ o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) $R\$\,0,50 \leq p < R\$\,1,50$
b) $R\$\,1,50 \leq p < R\$\,2,50$
c) $R\$\,2,50 \leq p < R\$\,3,50$
d) $R\$\,3,50 \leq p < R\$\,4,50$
e) $R\$\,4,50 \leq p < R\$\,5,50$

15) (ESPM) O número de soluções inteiras do sistema de inequações $\begin{cases} \frac{2x-3}{-2} < 3 \\ x^2 + 2x \leq 8 \end{cases}$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

16) (UFU) Funções afins e quadráticas têm aplicações em alguns modelos simples, envolvendo os conceitos preço de venda e custo de produção de uma mercadoria, bem como a receita e o lucro obtidos com sua venda. Para uma empresa, é fundamental determinar o intervalo de produção em que a receita supera o custo de produção.
Suponha que o custo de produção de uma mercadoria de certa empresa, em função da quantidade produzida $x,$ seja dado pela função $C(x) = 40x + 1400$ ($c_0 = 1400$ é denominado custo fixo de produção) e que o preço de venda seja $p(x) = -2x + 200,$ em que x é a quantidade demandada (vendida). Nesse caso, a receita R obtida com as vendas é função de $x,$ precisamente $R(x) = x \cdot p(x).$

As quantidades produzidas e vendidas x para as quais essa empresa tem lucro $L(x) = R(x) - C(x)$ positivo (receita supera o custo de produção) é

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 40\}$.
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$.
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 70\}$.
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 10 < x < 40\}$.

17) (IFCE – CE) Sabendo-se que a expressão $ax^2 + bx + c$ onde a, b e c são números reais, é positiva, para qualquer x real, é correto afirmar-se que

a) $a > 0$ e $b^2 > 4ac$.
b) $a > 0$ e $b^2 < 4ac$.
c) $a < 0$ e $b^2 > 4ac$.
d) $a < 0$ e $b^2 < 4ac$.
e) $a < 0$ e $b^2 \leq 4ac$.

GABARITO - VÍDEO AULA 07

1) a) {x∈ R| x >– 7} b) {x∈ R| x ≥ 2 } c) {x∈ R| x > $\frac{1}{6}$ }

2) c
3) a) {x ∈ R | x < 2 ou x > 4} b) {x ∈ R | 2 ≤ x ≤ 4}
c) {x ∈ R | - 3 < x < 3} d) {x ∈ R | -2 ≤ x ≤ 2}
e) {x ∈ R | x < 0 ou x > 6} f) {x ∈ R | x ≤ -1 ou x ≥ 1}
g) {x ∈ R | x < 3 ou x > 9} h) {x ∈ R| 3 ≤ x ≤ 9}
i) {x ∈ R| -4 < x < 5} j) {x ∈ R | x ≤ - 4 ou x ≥ 5}
l) {x ∈ R | x < 2 ou x > 4} m) {x ∈ R | x ≤ 1/2 ou x ≥ 2}
n) {x ∈ R | x < - 2 ou x > 2} o) {x ∈ R | -4 ≤ x ≤ 4}
p) {x ∈ R | x < 0 ou x > 6}

4) e	**5)** e	**6)** d	**7)** a	**8)** c	**9)** e	**10)** e
11) e	**12)** b	**13)** a	**14)** a	**15)** d	**16)** c	**17)** b

VÍDEO AULA 08

INEQUAÇÃO TIPO PRODUTO E QUOCIENTE

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

1. Inequações – Produto

Sejam f(x) e g(x) funções na variável x. Inequação–produto é toda inequação do tipo:

a) f(x).g(x) ≥ 0   b) f(x).g(x) > 0
c) f(x).g(x) ≤ 0   d) f(x).g(x) < 0

Observe como se dá resolução de algumas inequações-produto.

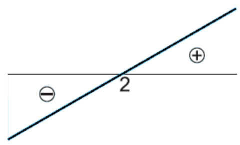
1) Resolva a inequação (x – 2).(–2x + 8) > 0

Resolução: Devemos encontrar valores reais de x que fazem com que o produto (x – 2).(–2x + 8) seja positivo. Observe o procedimento
Vamos considerar cada um dos fatores do primeiro membro da desigualdade como sendo uma função polinomial do 1° grau.

$$\underbrace{(x-2)}_{f(x)}\underbrace{(-2x+8)}_{g(x)} > 0$$

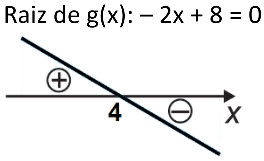
Estudo do sinal de f(x):

Raiz de f(x): x – 2 = 0 → x = 2

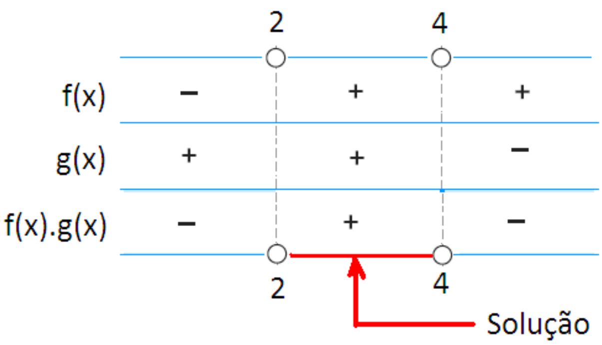


Estudo do sinal de g(x):

Raiz de g(x): – 2x + 8 = 0 → x = 4



Colocamos agora em um quadro os sinais de cada função e determinarmos o sinal do produto f(x).g(x). Acompanhe:



Veja que a parte destacada indica os valores de x que tornam o produto (x – 2).(–2x + 8) positivo.

Logo: S = $\{x \in R / 2 < x < 4\}$

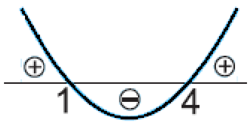
2) Resolva a inequação $(x^2 - 5x + 4)(x - 2) \leq 0$

Resolução: Neste caso, devemos encontrar valores reais de x que fazem com que o produto $(x^2 - 5x + 4)(x - 2)$ seja negativo ou nulo.

$$\underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{f(x)}\underbrace{(x - 2)}_{g(x)} \leq 0$$

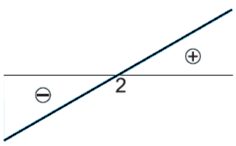
<u>Estudo do sinal de f(x)</u>:

Raiz de f(x): $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

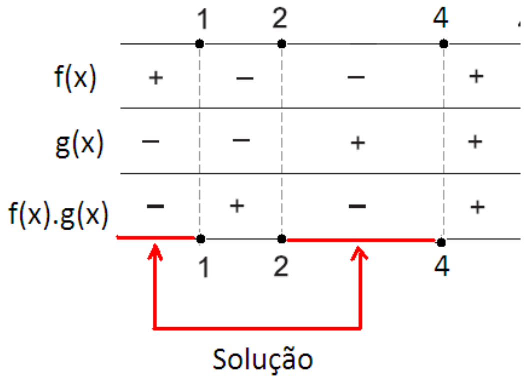


<u>Estudo do sinal de g(x)</u>:

Raiz de g(x): x – 2 = 0 → x = 2



Finalmente, colocamos em um quadro os sinais de cada função e determinamos o sinal do produto f(x).g(x).



A parte destacada indica os valores de x que tornam o produto $(x^2 - 5x + 4)(x - 2)$ negativo ou nulo.

Logo: S = $\{x \in R / x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 4\}$

2. Inequações – Quociente

Sejam f(x) e g(x) funções na variável x. Inequação–quociente é toda inequação do tipo:

a) $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ b) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ c) $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ d) $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$

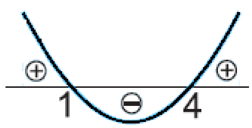
O procedimento para a resolução deste tipo de inequação é o mesmo que o utilizado nas inequações-produto. No entanto, é necessário lembrar que o denominador de uma fração não pode ser nulo, ou seja, nos casos acima vamos considerar $g(x) \neq 0$. Acompanhe um exemplo:

Resolva a inequação $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2} \leq 0$

Resolução:

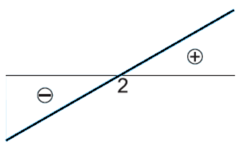
<u>Estudo do sinal de f(x)</u>:

Raiz de f(x): $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

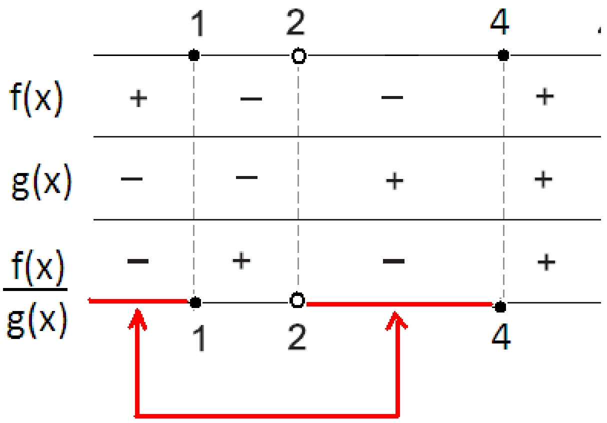


<u>Estudo do sinal de g(x)</u>:

Raiz de g(x): x – 2 = 0 → x = 2



Quadro de sinais:



Solução

S = $\{x \in R / x \leq 1 \text{ ou } 2 < x \leq 4\}$

OBSERVAÇÃO:

Se for conveniente, podemos transformar qualquer inequação-quociente em uma inequação-produto. Observe o quadro abaixo:

1) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) > 0$

2) $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) < 0$

3) $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$

4) $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x).g(x) \leq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$

VOCÊ JÁ SE PERGUNTOU POR QUE MENOS COM MENOS DÁ MAIS NA MULTIPLICAÇÃO?

Vamos provar pela propriedade distributiva que (-1)x(-1) = 1

$(-1) \times (-1)$
$= (-1) \times (-1) + 0$
$= (-1) \times (-1) + (-2) + 2$
$= (-1) \times (-1) + (-1) \times 2 + 2$

Usando a propriedade distributiva:

$= (-1) \times (-1 + 2) + 2$ Colocando (-1) em evidência
$= (-1) \times 1 + 2$
$= (-1) + 2$
$= 1$

De maneira menos técnica e usando um pouco de lógica podemos pensar assim:

Vamos começar com meios simples para entender melhor: Na matemática vamos considerar o sinal de mais (+) como afirmação e o sinal de menos (-) como negação, sendo assim, vejam o porquê que mais com menos da menos:

Como dito, o mais é uma afirmação, então estaríamos afirmando a negação, ou seja, estamos dizendo que a negação é verdade, por isso mais com menos da menos.

Agora vamos ver porque menos com menos da mais: **como o sinal de menos é a negação, então o que dá negar a negação?**

Da uma afirmação, concorda? Então por isso menos com menos.

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Resolver, em $\Re$, as seguintes inequações:

a) $(x - 3).(x^2 - 7x + 10) > 0$

b) $\frac{x^2 - 8x + 12}{x + 1} \leq 0$

02) (PUC – RJ) Considere a inequação $\frac{x + 1}{-x - 5} \leq 0$, com $x \in \mathbb{R}$.

Qual é o conjunto solução da inequação?

a) $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$
b) $(-\infty, -5) \cup [-1, \infty)$
c) $[0, \infty)$
d) $[-5, \infty)$
e) $(-1, \infty)$

03) (IFCE – CE) A desigualdade $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 10} > 0$ se verifica para todos os números reais x tais que

a) $-1 < x$ ou $-3 < x < -2$ ou $x < -5$.
b) $x < 1$ ou $2 < x < 3$ ou $x > 5$.
c) $1 < x < 2$ ou $3 < x < 5$.
d) $x > 1$ ou $2 < x < 5$.
e) $1 < x < 3$ ou $2 < x < 5$.

Nível 2

04) (FATEC) A solução real da inequação produto $(x^2 - 4).(x^2 - 4x) \geq 0$ é:

a) $S = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 4\}$
b) $S = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 4\}$
c) $S = \{x \in R \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$
d) $S = \{x \in R \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$

05) (FGV – SP) O número de soluções inteiras da inequação $\dfrac{2x+6}{14-2x} \geq 0$ é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) infinito

06) Resolva, em R, as seguintes inequações:

a) $(x^2 - 2x - 3).(-x^2 - 3x + 4) > 0$
b) $(x^2 - 2x - 3).(-x^2 - 3x + 4) \leq 0$
c) $(x - 3)(x^2 - 16) < 0$

07) Resolva, em R, as seguintes inequações:

a) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 16} < 0$

c) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} \geq 0$

d) $\dfrac{2}{x-1} < 1$

08) (UEPG - PR) O conjunto solução da inequação $\dfrac{3x-2}{x-3} \leq 1$ é S = {x ∈ R/ a ≤ x < b}. Assim, é correto afirmar:

01. a.b < 0
02. a – b > 0
04. a + b é um número natural
08. $\dfrac{a}{b}$ é um número racional

Nível 3

09) (IFCE – CE) O conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação $(5x^2 - 6x - 8)(2 - 2x) < 0$ é

a) $S = \left]-\dfrac{4}{5}, 2\right[\cup \left]-\infty, 1\right[$.

b) $S = \left]2, +\infty\right[\cup \left]-\dfrac{4}{5}, 1\right[$.

c) $S = \left]-\dfrac{4}{5}, 2\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

d) $S = \left]-\infty, -\dfrac{4}{5}\right[\cup \left]1, 2\right[$.

e) $S = \left]-\dfrac{4}{5}, 1\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

10) (UDESC – SC) Se *n* é um número inteiro, então a quantidade de números racionais da forma $\dfrac{2n}{3n+15}$ que são estritamente menores que $\dfrac{7}{13}$, é:

11) (ACAFE – SC) Considere S o conjunto solução da inequação $x^6 - 25x^2 \leq 0$ e assinale a alternativa correta.

a) $S \supset 0$
b) $S \subset R_+$
c) $S \subset]-3, 3[$
d) $S \in [-10, 10]$

12) (UFRGS – RS) Dadas as funções reais de variável real f e g, definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, o intervalo, tal que $f(x) > g(x)$, é

a) $(0; +\infty)$.
b) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$.
c) $(-1; 1)$.
d) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
e) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

GABARITO - VÍDEO AULA 08

1) a) $\{x \in R \mid 2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$) $\{x \in R \mid x < -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 6\}$
2) b **3)** b **4)** d **5)** c
6) a)]-4, -1[∪]1, 3[b)]-∞, -4] ∪ [-1, 1] ∪ [3, ∞[
c)]-∞, -4[∪]3, 4[
7) a) $\{x \in R \mid x < -4 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x > 4\}$
b) $\{x \in R \mid -4 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
c) $\{x \in R \mid x < -1 \text{ ou } 0 \leq x < 1\}$
d) $\{x \in R \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$
8) 09 **9)** e **10)** 25 **11)** c **12)** e

VÍDEO AULA 09

DOMÍNIO DE FUNÇÕES REAIS

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

Técnica para se determinar o domínio de Funções

Quando estudamos uma função de variável real e com lei de formação algébrica sem domínio indicado, devemos sempre considerar como domínio todos os valores de x que fazem com que $f(x)$ exista.

Sendo assim, considere as seguintes funções:

1) $f(x) = 3x + 2$

Nesse caso, qualquer $x \in \Re$ pode ser atribuído a $f(x) = 3x + 2$, fazendo com que exista uma imagem correspondente.
Logo: D(f) = $\Re$

2) $g(x) = \dfrac{2}{x-3}$

Em g(x), o domínio da função é obtido impondo-se a condição para que uma fração exista:

Então, devemos fazer:
$x - 3 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$
Logo: $D(g) = \{x \in \Re / x \neq 3\}$

3) $h(x) = \sqrt{x-8}$

Em h(x), o domínio da função é obtido impondo-se a condição para que uma raiz de índice par exista. Então o radicando (x – 8) deve ser um número real não negativo.

Então: $x - 8 \geq 0 \rightarrow x \geq 8$
Logo: $D(h) = \{x \in \Re / x \geq 8\}$

Acompanhe abaixo alguns exercícios resolvidos:

1) Considere f uma função real de variável real definida por, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 16}$. Qual é o domínio da função f ?

Solução:
Em f(x), o domínio da função é obtido impondo-se a condição para que uma fração exista:
Então, devemos fazer:

$$x^2 - 16 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 16 \Rightarrow x \neq \pm 4$$

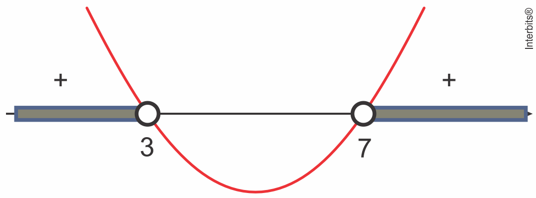
Portanto, o domínio será dado por: $D = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$.

2) Seja a função $g(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 21}$ real. O domínio da função g(x) é:

Solução:

Em g(x), o domínio da função é obtido impondo-se a condição para que uma raiz de índice par exista. Então o radicando deve ser um número real não negativo ou seja:

$$x^2 - 10x + 21 \geq 0$$



Logo, o domínio de g(x) é: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 7\}$.

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Determine o domínio das seguintes funções

a) $f(x) = \dfrac{4}{3x - 6}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x+8}$

c) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

d) $f(x) = \sqrt{7 - x}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x + 10}}{x - 3}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 8}$

02) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 12x + 20}$

c) $f(x) = \sqrt{-3x^2 - 2x + 5}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x}$

03) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x-2}.\sqrt{x-6}$

b) $f(x) = \sqrt{(x-2).(x-6)}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+2}}$

04) Seja a função $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$ real. O domínio da função f(x) é:

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -4 \text{ ou } x \ge -1\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \le x \le -1\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 4\}$

e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1 \text{ ou } x \ge 4\}$

Nível 2

05) O domínio da função dada por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$ é

a) $\{x \in R \mid -2 \le x \le 3\}$.

b) $\{x \in R \mid -2 \le x < 3\}$.

c) $\{x \in R \mid 2 \le x < 3\}$.

d) $\{x \in R \mid -2 \le x \le 3\}$.

e) $\{x \in R \mid x \ne 3\}$.

06) (MACK – SP) A função $f(x) = \sqrt{\dfrac{9 - x^2}{x^2 + x - 2}}$ tem como domínio o conjunto solução

a) $\{x \in \Re / -3 < x \le -2 \text{ ou } 1 \le x < 3\}$

b) $\{x \in \Re / -3 \le x < -2 \text{ ou } 1 < x \le 3\}$

c) $\{x \in \Re / -3 \le x < -2 \text{ ou } 1 \le x \le 3\}$

d) $\{x \in \Re / -2 < x \le -1 \text{ ou } 1 \le x \le 3\}$

e) $\{x \in \Re / -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x \le 3\}$

07) O domínio da função real dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x - 1}}$ é :

a) { x ∈R/ x< 1/2 ou 2 < x < 3 }

b) {x∈ R / x ≤ 1/2 ou 2 ≤X ≤ 3 }

c) { x ∈ R / 1/2 < x < 2 ou 2 < x < 3 }

d) { x ∈ R / 1/2 < x ≤ 2 ou x > 3 }

e) { x ∈ R / 1/2 < x ≤ 2 ou x ≥ 3 }

Nível 3

08) (UEMA) Uma função consiste na associação de dois conjuntos A e B de números reais, por meio de uma lei f. O subconjunto dos elementos de A que corresponde a um, e somente um, elemento de B é denominado domínio da função D(f).
Considerando que a expressão

$$f(x) = \sqrt{\frac{(2x^2 - 8)(x^2 + x - 6)}{x^2 + 2x - 3}}$$

é uma função, determine o domínio de $f(x)$.

a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1; x \le -2 \text{ e } x \ne -3\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1; x < -2 \text{ e } x \ne -3\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1; x \ge -2 \text{ e } x = -3\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 1; x \le -2 \text{ e } x = 3\}$

e) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 1; x > -2 \text{ e } x \ne 3\}$

09) (UEPG – PR) O conjunto A representa o domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x-3}{x+9}}$ e o conjunto B é a solução da inequação $(x-1)(x^2-5x+6)<0$. Em relação aos conjuntos A e B, assinale o que for correto.

01. $A\cap B=\{x\in\mathbb{R}\mid -9<x\le -1\}$.
02. $A-B=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge 3\}$.
04. $A\cup B=\{x\in\mathbb{R}\mid x<1 \text{ ou } x>2\}$.
08. $B-A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -9 \text{ ou } -1<x<1 \text{ ou } 2<x<3\}$.
16. $A\subset B$.

10) (FUVEST – SP) Sejam D_f e D_g os maiores subconjuntos de $\mathbb{R}$ nos quais estão definidas, respectivamente, as funções reais

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x-2}}$$ e

$$g(x)=\frac{\sqrt{x^3+2x^2-4x-8}}{\sqrt{x-2}}.$$

Considere, ainda, I_f e I_g as imagens de f e de g, respectivamente.

Nessas condições,

a) $D_f=D_g$ e $I_f=I_g$.
b) tanto D_f e D_g quanto I_f e I_g diferem em apenas um ponto.
c) D_f e D_g diferem em apenas um ponto, I_f e I_g diferem em mais de um ponto.
d) D_f e D_g diferem em mais de um ponto, I_f e I_g diferem em apenas um ponto.
e) tanto D_f e D_g quanto I_f e I_g diferem em mais de um ponto.

GABARITO - VÍDEO AULA 09

1) a) $\{x\in R\mid x\ne 2\}$ b) $\{x\in R\mid x\ne -4\}$ c) $\{x\in R\mid x\ge 7\}$
d) $\{x\in R\mid x\le 7\}$ e) $\{x\in R\mid x\le 10,\ x\ne 3\}$
f) $\Re$
2) a) $\{x\in R\mid x\le 1 \text{ ou } x\ge 3\}$ b) $\{x\in R\mid x\le 2 \text{ ou } x\ge 10\}$
c) $\{x\in R\mid -5/3\le x\le 1\}$ d) $\{x\in R\mid x\le 0 \text{ ou } x\ge 10\}$
3) a) $D=\{x\in R/x\ge 6\}$ b)) $D=\{x\in R/x\le 2 \text{ ou } x\ge 6\}$
c) $D=\{x\in R/x\ge 4\}$ d) $D=\{x\in R/x<-2 \text{ ou } x\ge 4\}$
4) a **5)** c **6)** b **7)** e **8)** a **9)** 15 **10)** e

VÍDEO AULA 10

PARIDADE DE FUNÇÕES

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

1. Função Par

Uma função *f* é par se, para todo $x\in D(f)$, temos $f(-x)=f(x)$.

Em síntese: Numa função par, valores simétricos do domínio possuem imagens iguais.

Exemplos:

1) Verificar se a função f: $\Re\to\Re$ definida por $f(x)=3x^4+1$ é par.

Vamos atribuir para x dois valores simétricos: – 2 e 2

$$\begin{cases} f(-2)=3(-2)^4+1=49 \\ f(2)=3.(2)^4+1=49 \end{cases}$$

Observe que – 2 e 2 possuem a mesma imagem.

De modo genérico, temos:

$$\begin{cases} f(-x)=3(-x)^4+1=3x^4+1 \\ f(x)=3.(x)^4+1=3x^4+1 \end{cases}$$

Observe que f(– x) = f(x). Portanto, a função f(x) é par.

2) Verificar se a função f: $\Re\to\Re$ definida por $f(x)=2x^3+5x^2$ é par.

Vamos atribuir para x dois valores simétricos: – 1 e 1

$$\begin{cases} f(-1)=2(-1)^3+5(-1)^2=3 \\ f(1)=2(1)^3+5(1)^2=7 \end{cases}$$

Observe que – 1 e 1 possuem imagens diferentes.

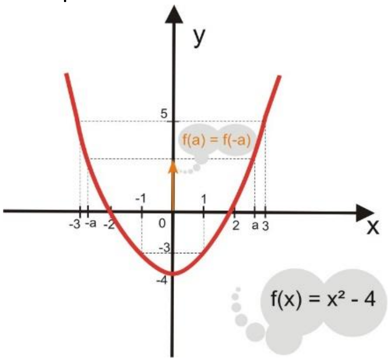
De modo genérico, temos:

$$\begin{cases} f(-x)=2(-x)^3+5(-x)^2=-2x^3+5x^2 \\ f(x)=2(x)^3+5(x)^2=2x^3+5x^2 \end{cases}$$

Observe que $f(-x)\ne f(x)$. Portanto, a função f(x) não é par.

Como consequência da definição, uma função *f* é par se e somente se, o seu gráfico cartesiano é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Exemplo:



2. Função Ímpar

Uma função *f* é ímpar se, para todo $x \in D(f)$, temos $f(-x) = -f(x)$.

Em síntese: Numa função ímpar, valores simétricos do domínio possuem imagens simétricas.

Exemplos:

1) Verificar se a função $f: \Re \to \Re$ definida por $f(x) = 2x^3 + x$ é ímpar.

Vamos atribuir para x dois valores simétricos: – 2 e 2

$$\begin{cases} f(-2) = 2(-2)^3 + (-2) = -18 \\ f(2) = 2.(2)^3 + 2 = 18 \end{cases}$$

Observe que – 2 e 2 possuem imagens simétricas.

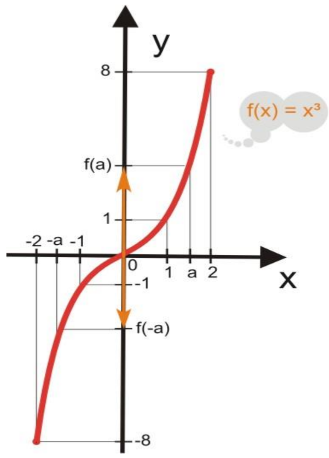
De modo genérico, temos:

$$\begin{cases} f(-x) = 2(-x)^3 + (-x) = -2x^3 - x = -(2x^3 + x) \\ f(x) = 2.(x)^3 + x = 2x^3 + x \end{cases}$$

Observe que f(– x) = – f(x). Portanto, a função f(x) é ímpar.

Como consequência da definição, uma função *f* é ímpar se e somente se, o seu gráfico cartesiano é simétrico em relação à origem.

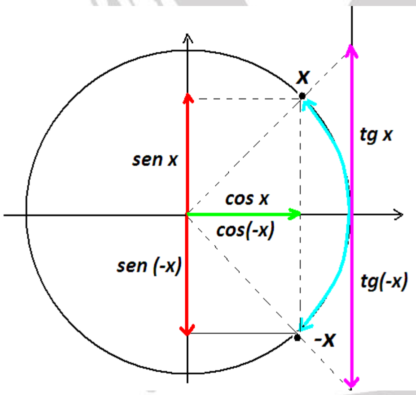
Exemplo:



IMPORTANTE:

PARIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Os arcos trigonométricos x e – x possuem extremidades simétricas em relação ao eixo x.



Podemos concluir pelo esquema acima que:

- Seno é uma função ímpar, ou seja: $\boxed{sen(-x) = -sen(x)}$
- Cosseno é uma função par, ou seja: $\boxed{cos(-x) = cos(x)}$
- Tangente é uma função ímpar, ou seja: $\boxed{tg(-x) = -tg(x)}$

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Classifique as funções abaixo em Par, Ímpar ou sem Paridade.

a) $f(x) = x^2 + 1$
b) $f(x) = 3x^4 + 2x^2$
c) $f(x) = 3x$
d) $f(x) = x^3 + 2x$
e) $f(x) = x^2 + 2x$

02) (UEPB – PB) Sejam

I. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2}$

II. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

III. $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$

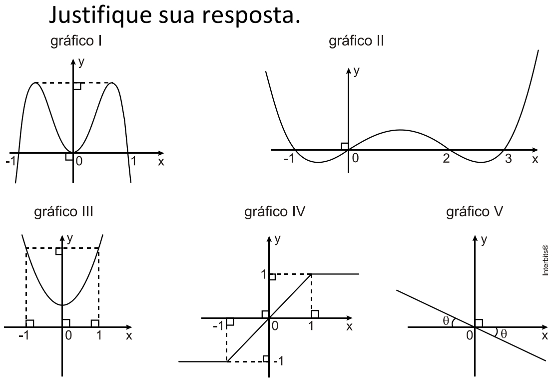
III. $f(x) = (x+1) + (x-1)$

Classificando cada uma das funções reais acima em par, ímpar ou nem par nem ímpar, temos, respectivamente:

a) par, par, ímpar, ímpar
b) nem par nem ímpar, par, ímpar, ímpar
c) par, ímpar, par, ímpar
d) ímpar, par, ímpar, ímpar
e) par, par, ímpar, nem par nem ímpar

03) (UNIFESP – SP) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se par quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Quais, dentre os gráficos exibidos, melhor representam funções pares ou funções ímpares? Justifique sua resposta.



b) Dê dois exemplos de funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, sendo uma par e outra ímpar, e exiba os seus gráficos.

Nível 2

04) Diz-se que uma função f é ímpar se, para todo x de seu domínio, tem-se que $f(-x) = -f(x)$. Sendo assim, qual das funções abaixo é ímpar?

a) $f(x) = 4x^2 + 3$
b) $f(x) = 3x - 1$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
e) $f(x) = 2^x$

05) Diz-se que uma função f é par se, para todo x de seu domínio, tem-se que $f(-x) = f(x)$. Sendo assim, qual das funções abaixo é ímpar?

a) $f(x) = 4x^5 + 3x$
b) $f(x) = 3x^2 - 2x$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$
d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$
e) $f(x) = 2^{-x}$

06) Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. O produto de duas funções ímpares é uma função ímpar.
02. O produto de duas funções pares é uma função par.
04. A função $f(x) = 2x.(\cos x)$ é ímpar
08. A função $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2}$ é par

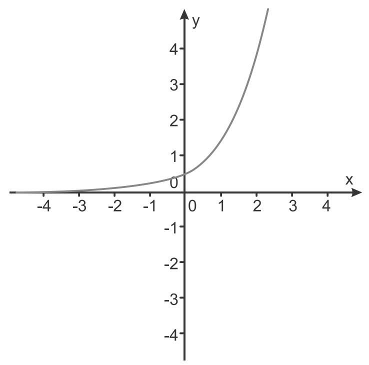
Nível 3

07) (EFOMM) Um aluno precisa construir o gráfico da função real f, definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{2}$. Ele percebeu que a função possui a seguinte característica:

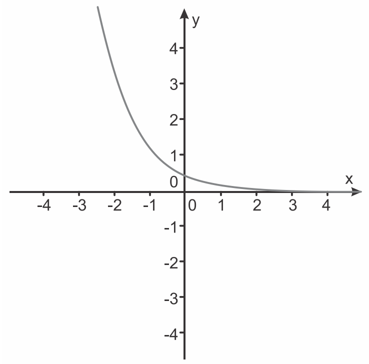
$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{x}}{2} = f(x).$$

Assinale a alternativa que representa o gráfico dessa função.

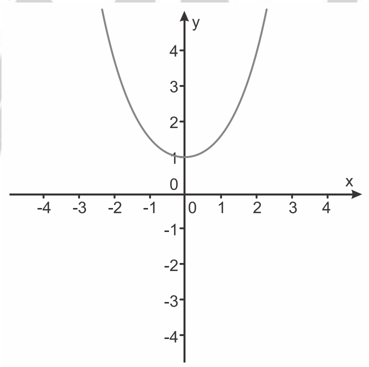
a)



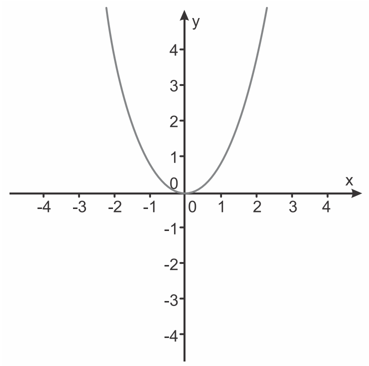
b)



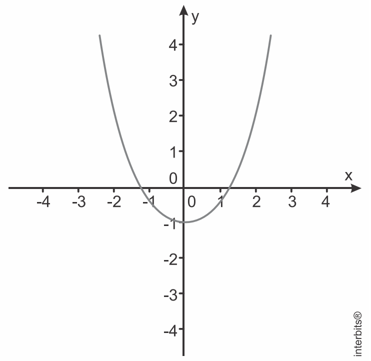
c)



d)



e)



08) (UDESC – SC) Seja $f : \Re \to \Re$ uma função tal que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 18xy + 64$, analise as proposições.

I. O gráfico de f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.
II. $f(0) = 64$.
III. A função f é um polinômio de grau 2.
IV. A função f não possui raízes inteiras.
V. O valor mínimo de f é $\frac{8}{3}$

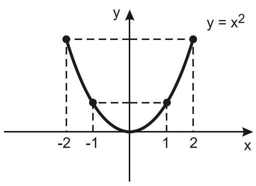
Assinale a alternativa **correta**.

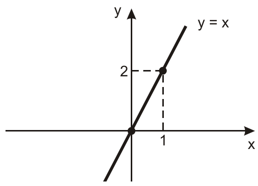
a) Somente as afirmativas III e V são verdadeiras.
b) Somente a afirmativa I é verdadeira.
c) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

GABARITO - VÍDEO AULA 10

1) a) Par b)Par c) Ímpar d) Ímpar e) sem paridade
2) b **4)** c **5)** d **6)** 06 **7)** c **8)** c

3)
a) As funções pares são I e III, pois f(-a) = f(a) para qualquer a real. As funções ímpares são IV e V, pois f(-a) = - f(a) para qualquer **a**.
b) função $y = x^2$ é par e a função y = x é ímpar.





VÍDEO AULA 11

FUNÇÃO COMPOSTA

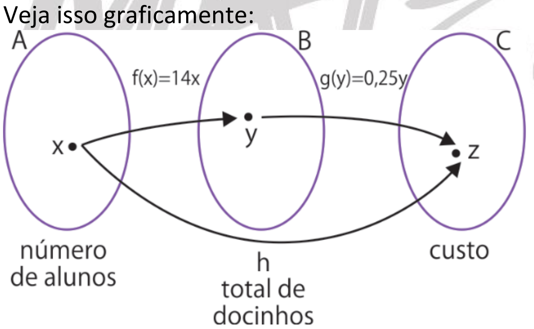
CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

Alguns dias antes da confraternização dos alunos da 7ª série da Escola Básica "Aprenda Bem", a diretora estava calculando o custo dos docinhos. Ela tinha uma ideia de que cada aluno comia, em média 14 docinhos e que cada um custava cerca de R$ 0,25.

Veja que na situação descrita acima existem algumas funções envolvidas:

- $y = f(x) = 14x$, que mostra que o total de docinhos a ser comprados depende do número de alunos.
- $z = g(y) = 0{,}25y$, que mostra que o custo total depende da quantidade de docinhos a ser comprado.

Veja isso graficamente:

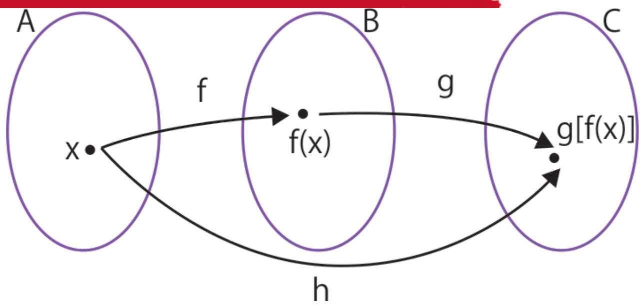


Observe que a função ***h*** faz a "ponte" do conjunto A para o conjunto C, ou seja, fornece o custo total em função do número de alunos. Indicamos, neste caso, a função h por: h = ***g*** o ***f*** (lê-se g composta com f).

Então: h(x) = ***g*** o ***f*** (x) = g[f(x)] = g[14x] = 0,25.14x = 3,5x

3.2. Definição

Dadas as funções f: A $\to$ B e g: B $\to$ C, denomina-se função composta de g com f a função ***g*** o ***f***: definida de A $\to$ C tal que ***g*** o ***f(x)*** = ***g[f(x)]***



f: A $\to$ B   *g*: B $\to$ C   ***g*o*f***: A $\to$ C

Observe que pela descrição acima, o contradomínio de ***f*** é igual ao domínio de ***g***.

Exercícios resolvidos:

1. Dadas as funções $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = 3x^2$. Obter as funções:

a) f[g(x)]
b) g[f(x)

Resolução:

a) $f(x) = 3x + 1$
$f[g(x)] = 3g(x) + 1$
$f[g(x)] = 3.3x^2 + 1$
$f[g(x)] = 9x^2 + 1$

b) $g(x) = 3x^2$
$g[f(x)] = 3(f(x))^2$
$g[f(x)] = 3(3x + 1)^2$
$g[f(x)] = 3(9x^2 + 6x + 1)$
$\mathbf{g[f(x)] = 27x^2 + 18x + 3}$

Observe que não vale a lei comutativa para funções compostas, ou seja, *f[g(x)]* $\neq$ *g[f(x)]*

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Dadas as funções f(x) = 2x + 3 e g(x) = 3x + 1. Obter:

a) f(g(x))
b) g(f(x))
c) f(f(x))
d) g(g(x))
e) f(g(3))
f) g(f(1))
g) f(f(f(1)))

02) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. O valor da função composta $f \circ g$ no elemento x = 2 é igual a

03) (PUC – RJ) Sejam $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + 1$. Então $f(g(3)) - g(f(3))$ é igual a:

a) – 1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

04) (UFSC – SC) Considere as funções f, g: R → R tais que g(x) = 2x + 1 e g(f(x)) = $2x^2 + 2x + 1$. Calcule f(7).

Nível 2

05) (UFPR – PR) O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por N(t) = 20t – t^2, sendo que $0 \le t \le 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por C(N) = 50 + 30N.

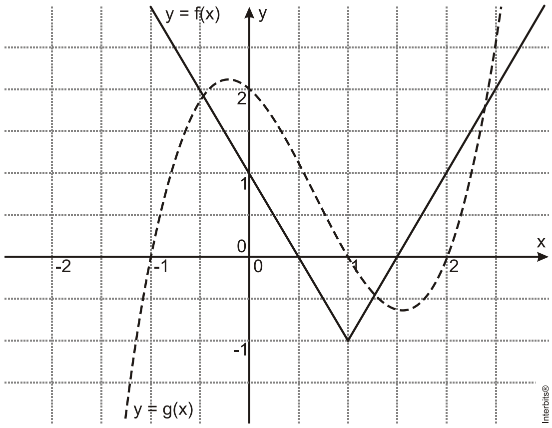
a) Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora.
b) Em que instante t, de um dia de produção, o custo alcançará o valor de 2300 milhares de reais?

06) Sejam as funções compostas e $g(f(x)) = 2x - 2$. Sendo $g(x) = x + 1$, então $f(5) + g(2)$ é

a) 10.
b) 8.
c) 7.
d) 6.

07) (UFSC – SC) Sendo f(x) = 4x + 1 e f(g(x)) = x^2 + 1, com f e g definidas para todo x real, determine o valor numérico da função g no ponto x = 18, ou seja, g(18).

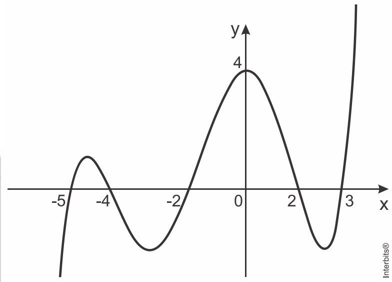
08) (UNICAMP – SP) Considere as funções *f* e *g*, cujos gráficos estão representados na figura abaixo.



O valor de $f(g(1)) - g(f(1))$ é igual a

a) 0.
b) – 1.
c) 2.
d) 1.

09) (UPF – RS) Considere a função real g, cuja representação gráfica está parcialmente ilustrada na figura a seguir. Sendo $g \circ g$ a função composta de g com g, então, o valor de $(g \circ g)(-2)$ é:



a) 0
b) 4
c) 2
d) –2
e) –5

Nível 3

10) (UFSC – SC) Seja *f* uma função polinomial do primeiro grau, decrescente, tal que *f(3) = 2* e *f(f(1)) = 1*. Determine a abscissa do ponto onde o gráfico de *f* corta o eixo *x*.

11) (UFSC – SC) Em relação às proposições abaixo, é correto afirmar que:

01. Com 45 metros quadrados de lajotas é possível fazer, sem perdas, uma moldura de 1,5 m de largura em volta de uma piscina cujas dimensões são 8 m de comprimento por 4 m de largura.

02. O conjunto solução da inequação $\frac{2x+1}{4x-1} < 1$ no conjunto $\mathbb{R}$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

04. Considere a operação $a \oplus b = a + b + 2ab$ definida para a e b reais, então o conjunto solução da equação $(1 \oplus 3) \oplus x = 220$, no conjunto $\mathbb{R}$, é $S = \{22\}$.

08. Devido à crise econômica, o dono de um restaurante observou que, com o preço do “prato feito” a R\$ 21,00, ele servia 600 refeições por dia e que, para cada real de redução no preço, ele servia 100 refeições a mais. Com base nesses dados, é correto afirmar que o preço do “prato feito” deve ser de R\$ 13,50 para que a receita do restaurante seja máxima.

16. Sendo $f(x) = 6x - 1$ e $(f \circ g)(x) = 30x + 29$, então $g(-1) = 0$.

12) Sejam as funções g(x) e h(x) assim definidas: $g(x) = 3x - 4$; $h(x) = f(g(x)) = 9x^2 - 6x + 1$. Determine a função f(x).

GABARITO - VÍDEO AULA 11

1) a) f(g(x)) = 6x + 5 b) g(f(x)) = 6x + 10 c) f(f(x)) = 4x + 9
d) g(g(x)) = 9x + 4 e) 23 f) 16 g) 29
2) 2 **3)** a **4)** 56 **5)** * **6)** a
7) 81 **8)** d **9)** b
10) 05 **11)** 25 **12)** $x^2 + 6x + 9$

***5)** a) $C(t) = 50 + 600t - 30t^2$ b) t = 5 h

VÍDEO AULA 12

QUALIDADE DAS FUNÇÕES
FUNÇÃO INVERSA

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

Antes de iniciarmos o estudo desta aula, vamos relembrar alguns conceitos essenciais:

- Dados dois conjuntos não vazios, A e B, denomina-se **função de A em B** a qualquer relação em que para todo elemento de A existir um único correspondente em B.

Com isso, fique atento às palavras empregadas na definição de função.

“....para todo elemento de A existir um único correspondente em B”.

Então:

1°) Todos elementos de A tem de estar associados a algum elemento de B.
2°) Um mesmo elemento de A não pode estar associado a dois elementos de B;

Em contrapartida:

- Elementos distintos de A podem estar associados a um mesmo elemento de B.
- O contradomínio pode possuir elementos que não sejam imagens de qualquer elemento do domínio.

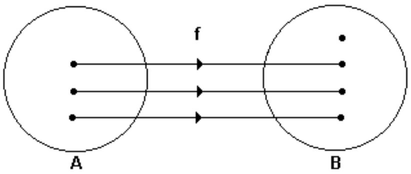
Nesta aula, estaremos estudando alguns tipos de funções que restringem algumas dessas “liberdades” que as funções possuem.

1. Qualidade das Funções

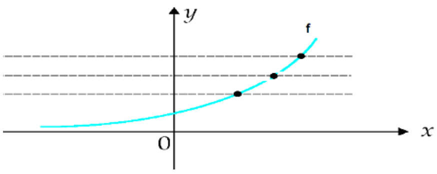
1.1. Função Injetora

Uma função f: A $\rightarrow$ B é injetora se, e somente se elementos distintos de A têm imagens distintas em B.

$\boxed{f \text{ é injetora } \Leftrightarrow \forall\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)}$



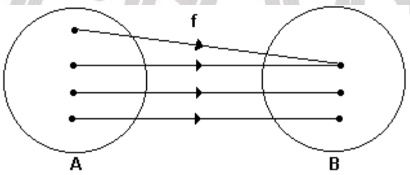
A partir do gráfico cartesiano, uma função é injetora se, e somente se, toda reta paralela ao eixo Ox interceptar o gráfico em no máximo um ponto.
Exemplo:



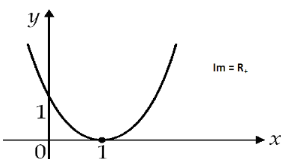
1.2. Função Sobrejetora

Uma função f: A $\rightarrow$ B é sobrejetora, se **todos** os elementos do conjunto B forem imagem dos elementos do conjunto A.

$\boxed{f \text{ é sobrejetora } \Leftrightarrow im(f) = CD(f)}$

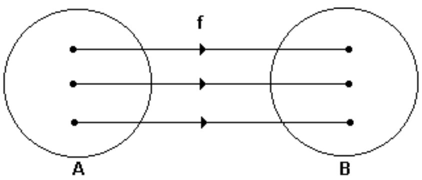


A função **f: R→ R** definida por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ não é sobrejetora, pois CD = R não é igual ao conjunto Imagem



1.3. Função Bijetora

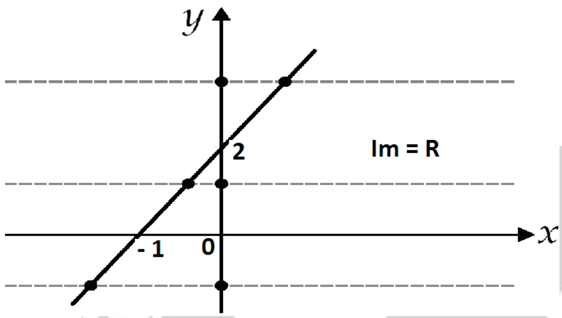
Uma função é bijetora se for ao mesmo tempo **injetora** e **sobrejetora.**



Então, numa função bijetora, todo elemento do conjunto imagem é imagem de um único elemento do domínio e o contradomínio é o próprio conjunto imagem.
A função abaixo é uma função bijetora

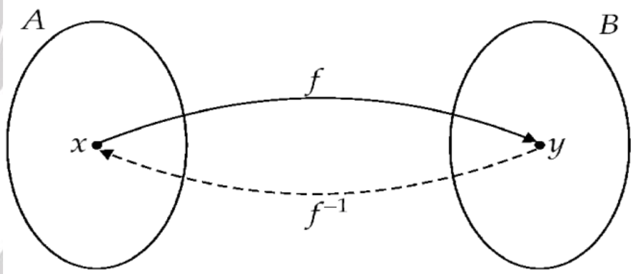
Observação: Todas as funções polinomiais do 1º grau definidas de $\Re$ em $\Re$ são funções bijetoras.

Exemplo: f: R→ R, onde f(x) = 2x + 2



2. Função Inversa

Considere uma função f: A $\rightarrow$ B, **bijetora**, pode-se obter uma função de B em A invertendo-se a ordem dos pares ordenados da função f. Denominamos esta função de inversa e indicamos por f^{-1}.



Em símbolos, temos:

Seja $f: A \rightarrow B$, uma função bijetora,
$f: x \rightarrow y \quad (x \in A \text{ e } y \in B)$
$f^{-1}: y \rightarrow x \quad (y \in B \text{ e } x \in A)$

Obtenção da Função Inversa

Seja uma função f de A em B. A função f^{-1} de B em A é a inversa de f, se e somente se:

$\boxed{f[f^{-1}(x)] = x, \forall x \in A \text{ e } f^{-1}[f(x)] = x, \forall x \in B}$

Vamos obter a inversa da função bijetora $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = 3x + 2$.

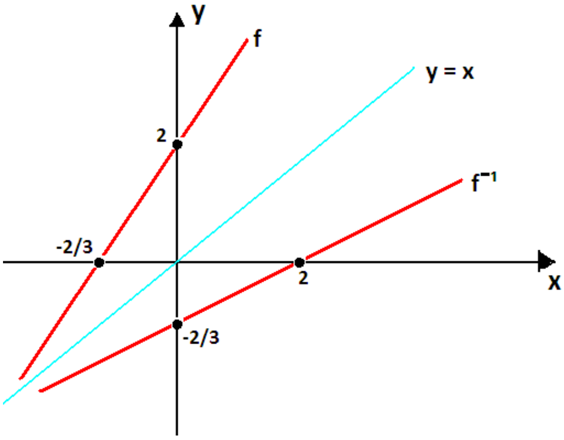
Por definição, temos que: $f[f^{-1}(x)] = x$. Logo:

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 2 \\ f\left[f^{-1}(x)\right] = 3.f^{-1}(x) + 2 \\ x = 3.f^{-1}(x) + 2 \\ \therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3} \end{cases}$$

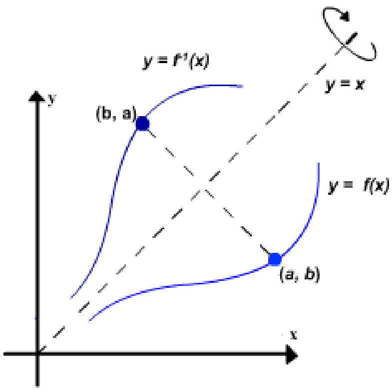
Outro caminho ainda para se determinar a inversa é permutando as variáveis e em seguida isolar y. Acompanhe:

$$\begin{cases} f(x) = 3x + 2 \\ x = 3y + 2 \\ x - 2 = 3.y \\ \therefore y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3} \end{cases}$$

Construindo os gráficos das funções f e f^{-1} num mesmo plano cartesiano, temos:



Construindo os gráficos das funções f e f^{-1} num mesmo plano cartesiano, temos:



Os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (y = x)

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Classifique as funções abaixo em injetora, sobrejetora, bijetora ou simples.

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 2x + 1
b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por g(x) = x^2 + 1
c) h: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por h(x) = x^2
d) j: [3, ∞ [→ [-1, ∞ [definida por j(x) = $x^2 - 6x + 8$

02) Classifique as funções abaixo em injetora, sobrejetora, bijetora ou simples.

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 3x + 2
b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por g(x) = $x^2 - 6x$
c) h: : [3, ∞ [→ [- 9, ∞ [h(x) = $x^2 - 6x$

03) (ESPM) Nas alternativas abaixo há 2 pares de funções inversas entre si. Assinale aquela que não pertence a nenhum desses pares:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = \dfrac{1-x}{2}$ c) $y = \dfrac{x+1}{2}$
d) $y = \dfrac{x-1}{2}$ e) $y = 1 - 2x$

04) Determine a função inversa de cada função a seguir:

a) y = 3x – 7
b) $y = \dfrac{3x+1}{x-5}$, $x \neq 5$
c) y = 2x – 3
d) $y = \dfrac{x+2}{4}$
e) $y = \dfrac{2x+1}{x-4}$, $x \neq 4$

05) Sobre toda função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma f(x) = ax + b com a ≠ 0, marque com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas.
( ) Essas funções são sempre crescentes
( ) Essas funções são sobrejetoras
( ) Essas funções são inversíveis
A sequência correta, e cima para baixo, é:

a) F – F – F
b) V – F – V
c) V – V – F
d) F – V – V
e) V – F – F

Nível 2

06) Considere a função $g(x)=\frac{x-3}{2x+1}$. A função inversa de g(x) é:

a) $g^{-1}(x)=\frac{x+3}{2x-1}$ b) $g^{-1}(x)=\frac{-x+3}{2x-1}$

c) $g^{-1}(x)=\frac{-x-3}{2x-1}$ d) $g^{-1}(x)=\frac{x+3}{-2x+1}$

07) Considere a função $g(x)=\frac{3x-1}{2x-5}$. A função inversa de g(x) é:

a) $g^{-1}(x)=\frac{x+3}{2x-1}$ b) $g^{-1}(x)=\frac{5x-1}{2x-3}$

c) $g^{-1}(x)=\frac{-x-3}{2x-1}$ d) $g^{-1}(x)=\frac{x+3}{-2x+1}$

08) Considere a função $g(x)=\frac{7x-2}{4x-9}$. A função inversa de g(x) é:

a) $g^{-1}(x)=\frac{9x-2}{4x-7}$

b) $g^{-1}(x)=\frac{5x-1}{2x-3}$

c) $g^{-1}(x)=\frac{-x-3}{2x-1}$

d) $g^{-1}(x)=\frac{x+3}{-2x+1}$

09) Seja a função f(x) = $\frac{2x+3}{x-6}$, com $x\neq 6$, determine $f^{-1}(1)$.

10) (ACAFE – SC) Sobre toda função f: $\Re \to \Re$ da forma f(x) = ax^2 + bx com a ≠ 0 e b ≠ 0, marque com V as afirmações verdadeiras e com F as falsas.

( ) Se a > 0, então seu valor máximo é $\frac{b^2}{4a}$

( ) Essas funções são sobrejetoras

( ) Essas funções são inversíveis

A sequência correta, e cima para baixo, é:

a) F – F – F
b) V – F – V
c) V – V – F
d) F – F – V

Nível 3

11) (UFSC – SC) Em relação às proposições abaixo, é **CORRETO** afirmar que:

01. A função $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{2\}$ definida por $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ satisfaz $(f\circ f)(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}-\{2\}$. Se f^{-1} é a função inversa da f, então f^{-1} coincide com a f.

02. Considere a função $g(x)=\begin{cases}3x-2, \text{se } x<0\\ 5x, \quad \text{se } x\geq 0\end{cases}$. O domínio da função g é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

04. Se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, então f é decrescente e sobrejetiva.

08. Seja $A\subset\mathbb{R}$ com $A\neq\varnothing$. Se $f:A\to\mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente em A, então f é injetiva.

16. Considere a função definida por $f(x)=\sqrt{x+a^2}$, sendo $a\in\mathbb{R}_+^*$. Então, $f(81)=9+a$.

12) (UEM – PR) Sobre funções reais (domínio e contradomínio real), assinale o que for **correto**.

01. Uma função constante é sempre injetora.
02. Uma função de segundo grau é sempre sobrejetora.
04. Sejam *f* e *g* funções, tais que *g*(*x*) = *f* (*x*) +1 , para todo *x* real. Então o gráfico da função *g* corresponde sempre ao gráfico da função *f*, transladado de uma unidade para baixo no plano cartesiano.
08. Toda função do primeiro grau é injetora e sobrejetora e, portanto, possui inversa.
16. A imagem da função f , tal que, para todo *x* real, *f* (*x*) = sen *x* , é o intervalo fechado [−1,1] .

13) (UEM-PR) Seja f: R → R uma função injetora definida por y = f(x). Tem-se que f(0) = - 5, f(1) = 0 e f(3) = 6. Encontre f(a) sabendo que f(f(a – 2)) = – 5

14) (UDESC - SC) Se $f(x)=x-2$ e $g(x)=x+1$ são funções reais, então o conjunto solução da inequação $\frac{f(x).g(x)-3g(x)+6}{(f_o g)(x)}\leq f^{-1}(x)$ é:

a) $\left\{x \in \Re / x \le \frac{3}{5} \text{ ou } x \ge 1\right\}$

b) $\left\{x \in \Re / x \le \frac{3}{5} \text{ ou } x > 1\right\}$

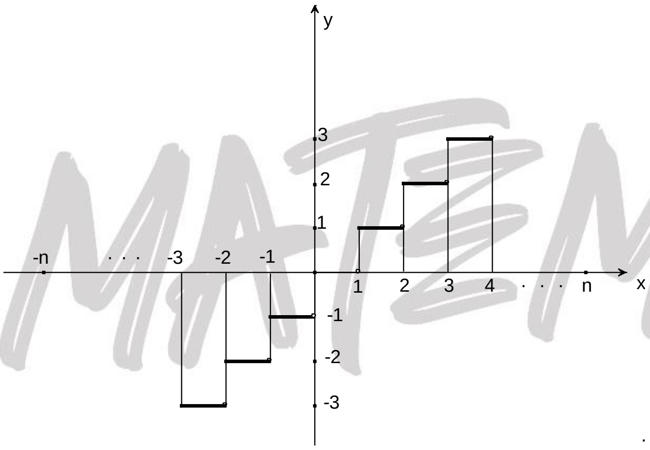
c) $\left\{x \in \Re / \frac{3}{5} \le x \le 1\right\}$

d) $\left\{x \in \Re / x \le \frac{3}{5}\right\}$

e) $\{x \in \Re / \ x > 1\}$

15) (UFSC – SC) Considere a função f: $\Re \to \Re$, dada por $f(x) = \begin{cases} x, se\ x \in Z \\ n, se\ x \notin Z\ e\ n < x < n+1,\ n \in Z \end{cases}$ que associa a cada número real x o maior inteiro não superior a x. Veja alguns exemplos:

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 2$, $f(-12) = -12$, $f(-2{,}3) = -3$. O gráfico desta função é dado na figura a seguir.



Com estas informações, assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

01. A função f é injetora

02. Se m é um número inteiro negativo, então $f\left(m - \frac{1}{2}\right) = m - 1$.

04. Existe uma infinidade de números reais x tais que $f(x) = x$.

08. A imagem da função f é o conjunto dos números reais.

16. A soma das áreas de todos os retângulos formados entre o gráfico de f e o eixo x, quando x varia de $-n$ a n, $n \in \Re$, é n^2.

32. A função f é ímpar.

GABARITO VÍDEO AULA 12

1) a) Bijetora b) Simples c) Injetora d) Bijetora
2) a) Bijetora b) simples c) bijetora
3) d
4) a) $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$ b) $f^{-1}(x) = 4x - 2$ c) $f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{x-3}$
d) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ e) $f^{-1}(x) = 4x - 2$ f) $f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{x-2}$
5) d
6) c **7)** b **8)** a **9)** – 9 **10)** a **11)** 09
12) 24 **13)** 06 14) b **15)** 22

VÍDEO AULA 13

MÓDULO EM REAIS - DEFINIÇÃO

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

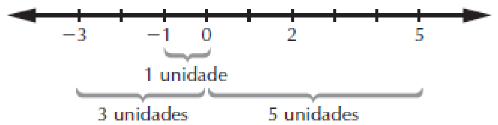
Módulo de um número real

Dado um número real x, denominamos módulo (ou valor absoluto) de x e indicamos por $|x|$ ao número:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Então:
a) $|5| = 5$
b) $|-1| = -(-1) = 1$
c) $|-3| = -(-3) = 3$

Observe que o módulo de um número real nunca é negativo.
Geometricamente, o módulo de um número real representa a distância deste número à origem.



Acompanhe mais alguns exemplos resolvidos:

a) $\left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1$

b) $\left|1 - \sqrt{5}\right| = -\left(1 - \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - 1$

c) $|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), \text{ se } x-2 < 0 \end{cases}$

$|x-2| = \begin{cases} x-2, \text{se } x \geq 2 \\ -x+2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$

Propriedades Importantes

- $|x| \geq 0$
- $|x|^n = x^n$, se n é par
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x-y| = |y-x|$
- $|x.y| = |x|.|y|$
- $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
- $|x| \geq x$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Considere os itens a seguir:

I. $\left|\sqrt{2} - 4\right| = 4 - \sqrt{2}$

II. $\left|4 - \sqrt{2}\right| = 4 - \sqrt{2}$

III. $|a-b| = a-b$

IV. $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

As afirmações corretas são:

a) I e II
b) II e III
c) Apenas III
d) I, II e IV
e) Todas as afirmações estão corretas

02) O valor de $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}|$ é:

a) $5 - 2\sqrt{5}$
b) $5 + 2\sqrt{5}$
c) 5
d) $1 + 2\sqrt{5}$
e) 1

03) O valor de $|5 - \sqrt{3}| - |\sqrt{3} - 5|$ é igual a:

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

Nível 2

04) Assinale a alternativa correta:

a) Se x é um número real, então $\sqrt{x^2} \neq |x|$
b) Se x é um número real, então existe x, tal que $|x| < 0$
c) Sejam **a** e **b** dois números reais com sinais iguais, então $|a + b| = |a| + |b|$
d) Sejam **a** e **b** dois números reais com sinais opostos, então $|a + b| > |a| + |b|$
e) $|x| = x$, para todo x real.

05) Se x < 0, então $|x - \sqrt{(x-1)^2}\ |$ é igual a:

a) 1
b) 1 – 2x
c) – 2x – 1
d) 1 + 2x
e) 2x – 1

06) O conjunto solução da inequação $\left|\dfrac{2x+4}{x-2}\right| \le 0$ é:

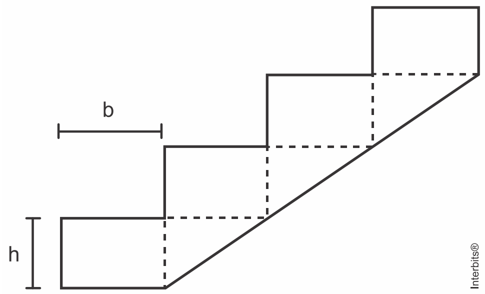
a) {x ∈ R, x = -2}
b) {x ∈ R, x ≠ 2}
c) {x ∈ R, x = 2}
d) {x ∈ R, -2 ≤ x ≤ 2}
e) {x ∈ R, x < -2 ou x > 2}

Nível 3

07) (ENEM) Uma casa de dois andares está sendo projetada. É necessário incluir no projeto a construção de uma escada para o acesso ao segundo andar. Para o cálculo das dimensões dos degraus utilizam-se as regras:

$|2h + b - 63{,}5| \le 1{,}5$ e $16 \le h \le 19$,

nas quais h é a altura do degrau (denominada espelho) e b é a profundidade da pisada, como mostra a figura. Por conveniência, escolheu-se a altura do degrau como sendo $h = 16$. As unidades de h e b estão em centímetro.



Nesse caso, o mais amplo intervalo numérico ao qual a profundidade da pisada (b) deve pertencer, para que as regras sejam satisfeitas é

a) $30 \le b$
b) $30 \le b \le 31{,}5$
c) $30 \le b \le 33$
d) $31{,}5 \le b \le 33$
e) $b \le 33$

08) (FGV – SP) No plano cartesiano, os pontos (*x*, *y*) que satisfazem a equação $|x| + |y| = 2$ determinam um polígono cujo perímetro é:

a) $2\sqrt{2}$
b) $4 + 2\sqrt{2}$
c) $4\sqrt{2}$
d) $8 + 4\sqrt{2}$
e) $8\sqrt{2}$

09) (UERJ – RJ) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:

V = 10 – |4 – 2t| – |2t – 6|, t ∈ IR₊

Nela, **V** é o volume medido em m^3 após t horas, contadas a partir de 8h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

a) Entre 2h e 3h
b) Entre 6h e 8h
c) Entre 10h e 11 h
d) Entre 11h e 12h

10) (FGV – SP) O polígono do plano cartesiano determinado pela relação $|3x| + |4y| = 12$ tem área igual a

a) 6.
b) 12.
c) 16.
d) 24.
e) 25.

GABARITO VÍDEO AULA 13

1) d	**2)** e	**3)** e	**4)** c	**5)** b	**6)** a
7) c	**8)** e	**9)** c	**10)** d		

VÍDEO AULA 14

EQUAÇÃO E INEQUAÇÃO MODULAR

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

1. Equação Modular

Tipos de equações modulares:

1) Para k > 0

$$\boxed{|x| = k \leftrightarrow x = k \text{ ou } x = -k}$$

Exemplo:

$$|x+2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3 \rightarrow x = 1 \\ x+2 = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

S = {-5, 1}

2) Para k = 0

$$\boxed{|x| = k \leftrightarrow x = 0}$$

3) Para k < 0

$$\boxed{|x| = k \text{ não possui solução}}$$

4) $|x| = |y| \leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$

Exemplo:

$$|2x+1| = |x+3| \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = x+3 \rightarrow x = 2 \\ 2x+1 = -(x+3) \rightarrow x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$$

2. Inequação Modular

Vamos resolver as inequações modulares com base nas seguintes propriedades:

Considerando **a** um número positivo, temos:

1) $|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$

2) $|x| \leq a \leftrightarrow -a \leq x \leq a$

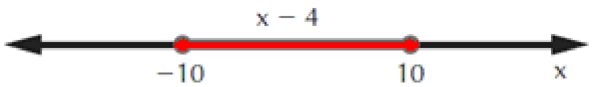
3) $|x| > a \leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a$

4) $|x| \geq a \leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

Exemplo:

a) Resolva a inequação: $|x-4| \leq 10$

Resolução:



$$|x-4| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x-4 \leq 10 \Rightarrow -6 \leq x \leq 14$$

S = $\{x \in \Re / -6 \leq x \leq 14\}$

b) Resolva a inequação: $|x-4| > 10$

$$|x-4| > 10 \Rightarrow \begin{cases} x-4 < -10 \rightarrow x < -6 \\ \text{ou} \\ x-4 > 10 \rightarrow x > 14 \end{cases}$$

S = $\{x \in \Re / x < -6 \text{ ou } x > 14\}$

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Determine o conjunto solução de cada equação abaixo:

a) $|x| = 8$
b) $|x + 3| = 7$
c) $|2x-6| = 12$
d) $|2x - 1| = |x + 3|$.
e) $|2x - 1| = x - 1$.
f) $|x|^2 - 10|x| + 16 = 0$.

02) Quantos números inteiros e não negativos satisfazem a inequação $| x - 2 | < 3$

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

03) Seja $f(x) = | x - 3 |$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é

04) (CEFET-PR) As raízes de $|x|^2 - 5|x| + 4 = 0$ são:

a) {-1, 1}
b) {-1, 4}
c) {-1, 1, 4}
d) {1, -1, 4, -4}
e) {1, -4}

05) A solução da inequação $| x | \geq 1$ é o intervalo

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

Nível 2

06) O conjunto solução da inequação modular $|x - 1| \leq 2$ é $S = \{x \in IR \mid a \leq x \leq b\}$. O valor de "b - a" é:

07) (PUC – MG) Os pesos aceitáveis do pãozinho de 50 g verificam a desigualdade $|x - 50| \leq 2$, em que x é medido em gramas. Então, assinale o peso mínimo aceitável de uma fornada de 100 pãezinhos, em quilogramas.

a) 4,50
b) 4,80
c) 5,20
d) 5,50

08) (CEFET – MG) A soma das raízes da equação modular $|x+1|^2 - 5|x+1| + 4 = 0$ é

a) – 7.
b) – 4.
c) 3.
d) 5.

09) A solução da inequação $|2x - 1| \leq 5$ é o conjunto:

a) $\{x \in \Re \mid -2 \leq x \leq 3\}$
b) $\{x \in \Re \mid -1 \leq x \leq 6\}$
c) $\{x \in \Re \mid x \leq 3\}$
d) $\{x \in \Re \mid x \leq 7\}$
e) $\{x \in \Re \mid -3 \leq x \leq 2\}$

10) (IFSC – SC) Dada a equação $2x + 1 = 7 - |x|$, na qual x é um número inteiro, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

01. A equação acima tem o mesmo conjunto solução da equação $|x| + 2x = 6$.
02. Existe apenas um valor inteiro de x que satisfaz a equação.
04. Existem dois valores de x que satisfazem a equação.
08. A solução da equação apresentada acima é a mesma solução da equação $\log_x (4x - 4) = 2$.
16. Satisfazem a equação um número inteiro positivo e um número inteiro negativo.
32. Satisfazem a equação dois números inteiros negativos.

Nível 3

11) (ESPECEX) O conjunto solução da inequação $||x - 4| + 1| \leq 2$ é um intervalo do tipo $[a, b]$. O valor de a + b é igual a

a) – 8
b) – 2
c) 0
d) 2
e) 8

12) (UEM – PR) Sobre a equação $|x - 5| + |x + 1| = C$, em que C é uma constante real e $x \in \mathbb{R}$, assinale o que for **correto**.

01. Se C = 0 a equação possui solução.
02. Se C = 6 a equação possui infinitas soluções.
04. Se C < 0 a equação possui apenas uma solução.
08. SeC = 4 a solução será x = 4.
16. Se C = 10 a equação possui duas soluções.

GABARITO – VÍDEO AULA 14

1) a) S = {-8, 8} b) S = {-10, 4} c) S = {-3, 9}. d) S = {4, – 2/3}. e) S = ∅ f) S ={-8, -2, 2, 8}

2) c	**3)** 6	**4)** d	**5)** b	**6)** 4	**7)** b
8) b	**9)** a	**10)** 11	**11)** e	**12)** 18	

VÍDEO AULA 15

FUNÇÃO MODULAR

CLIQUE NO LINK ABAIXO OU LEIA O QR COLD E ASSISTA À VÍDEO AULA

Função Modular

Uma função f: $\Re \to \Re$ é denominada função modular quando a cada $x \in R$ associa o elemento $|x| \in \Re$.

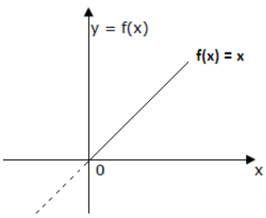
$$\boxed{f(x) = |x|}$$

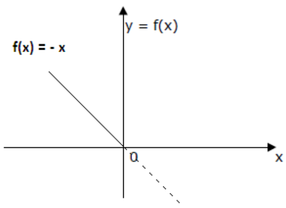
O gráfico da função modular pode ser obtido por dois modos. Acompanhe:

1º modo: A partir da definição de módulo.

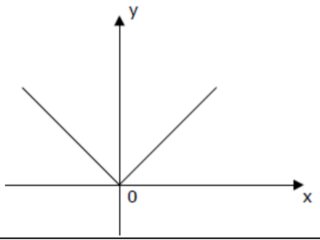
Exemplo: Construa o gráfico da função $f(x) = |x|$

Resolução: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$





Colocando as duas condições num só gráfico, vem:



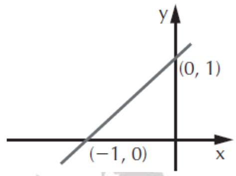
$\boxed{\text{A imagem desta função é } Im(f) = R_+}$

2º modo: De um modo geral, pode-se construir o gráfico da função $f(x) = |g(x)|$ sem se ater ao módulo. O que se faz é construir o gráfico da função g(x) e depois rebater por simetria ao eixo x todos os pontos situados abaixo do eixo x, pois nessa região g(x) < 0.

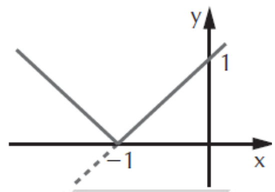
Exemplo: Construa o gráfico da função $f(x) = |x+1|$

Resolução:

1) Gráfico de $f(x) = x + 1$



2) Gráfico de $f(x) = |x+1|$



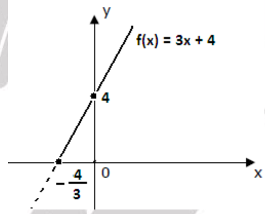
Acompanhe a seguir mais alguns exemplos:

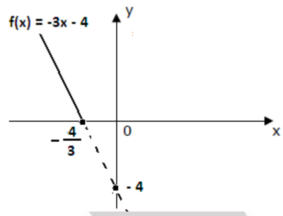
1) Construa o gráfico da função $f(x) = |3x+4|$

Resolução:

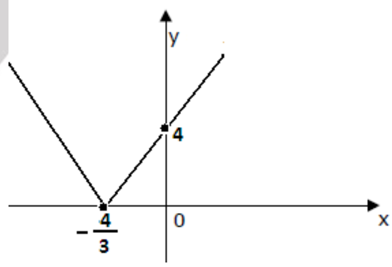
Modo 1: Usando a definição de módulo, vem:

$$f(x) = |3x+4| = \begin{cases} 3x + 4 \text{ se } x \geq -\dfrac{4}{3} \\ -3x - 4 \text{ se } x < -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$



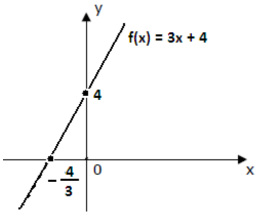


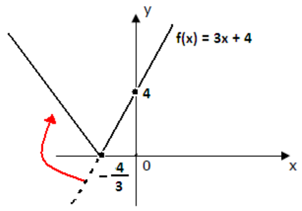
Colocando as duas condições num só gráfico, vem:



Modo 2: Usando o modo "rebatimento", temos:

Gráfico de $f(x) = 3x + 4$ Gráfico de $f(x) = |3x+4|$





2) Construa o gráfico da função $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$

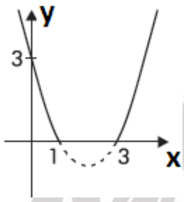
Resolução:

1º Modo: Pela definição, temos:

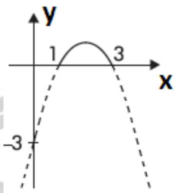
$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ se } x^2-4x+3\geq 0 \\ -\left(x^2-4x+3\right), \text{ se } x^2-4x+3<0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3, \text{ se } x\leq 1 \text{ ou } x\geq 3 \text{ (I)} \\ -x^2+4x-3, \text{ se } 1<x<3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

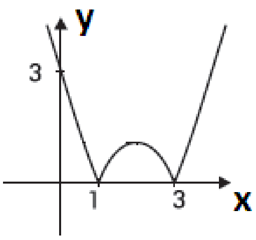
I)



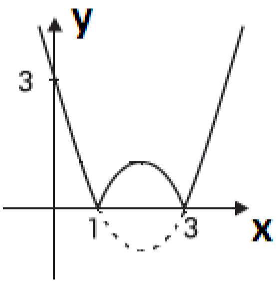
II)



Compondo o gráfico de $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$, temos:



Modo 2: Constrói-se o gráfico de $g(x)=x^2-4x+3$ e rebate-se em relação ao eixo x os pontos de ordenadas negativas.

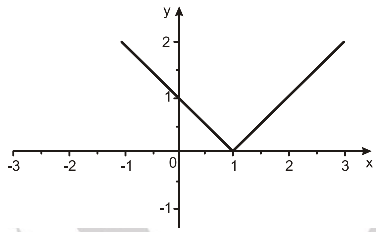


EXERCÍCIOS

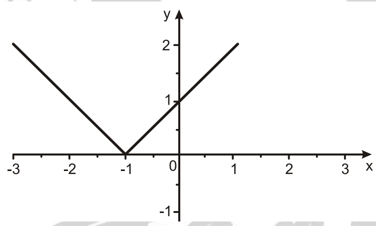
Nível 1

01) Considere a função real $f(x)=|x|+1$ O gráfico que representa a função é:

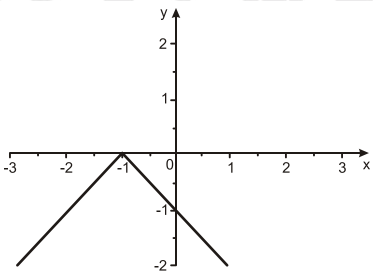
a)



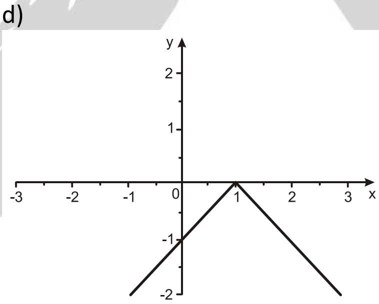
b)



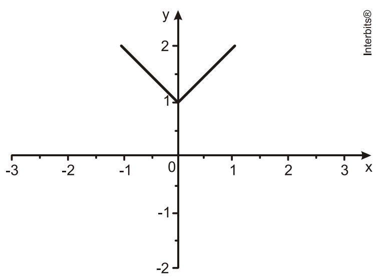
c)



d)

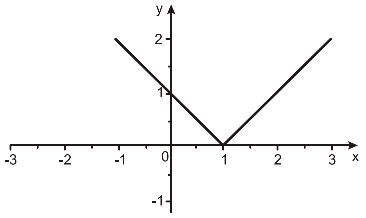


e)

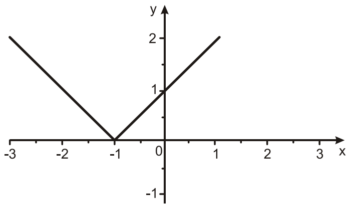


02) (PUC – RJ) Considere a função real $f(x)=|x+1|$. O gráfico que representa a função é:

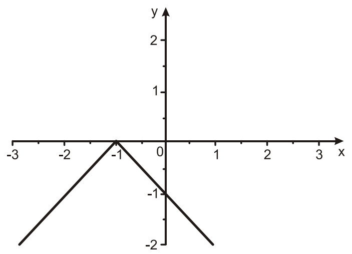
a)



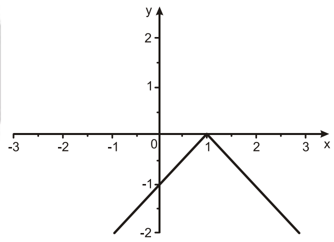
b)



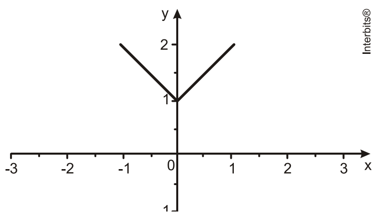
c)



d)

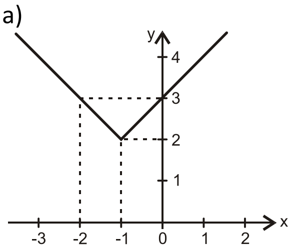


e)

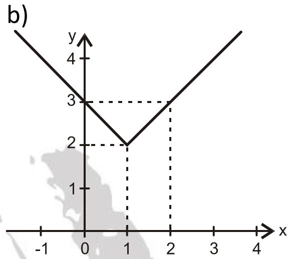


03) A alternativa que representa o gráfico da função f(x) = $f(x)=|x-1|+2$ é:

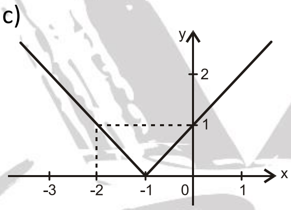
a)



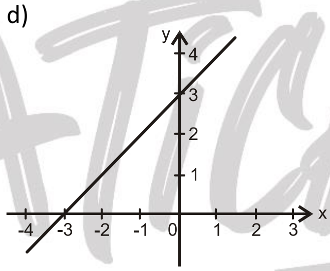
b)



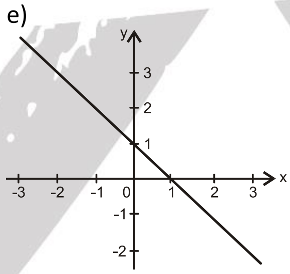
c)



d)



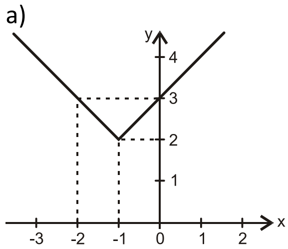
e)



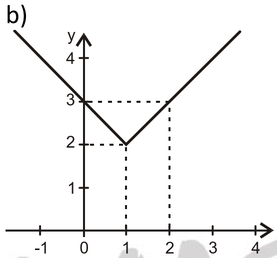
Nível 2

04) (UDESC – SC) A alternativa que representa o gráfico da função $f(x) = |x+1| + 2$ é:

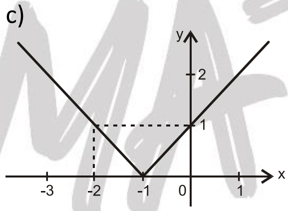
a)



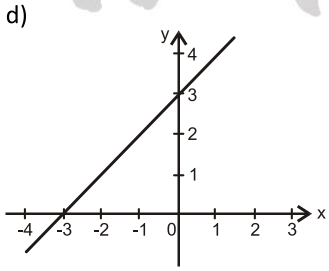
b)



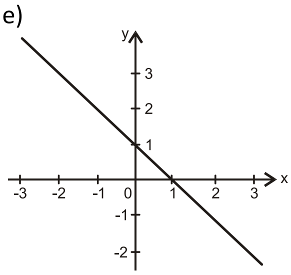
c)



d)

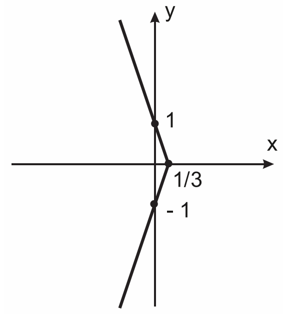


e)

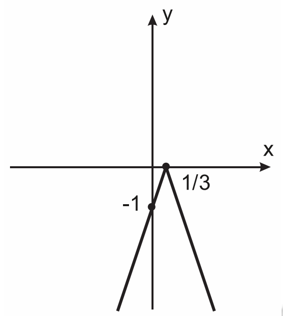


05) (PUC – RJ) Qual dos gráficos abaixo representa a função real $f(x) = |3x - 1|$?

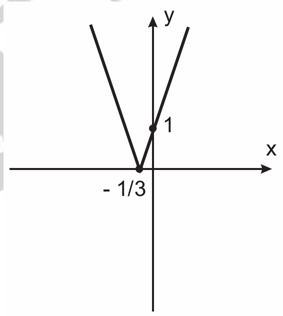
a)



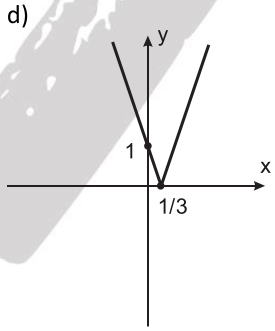
b)



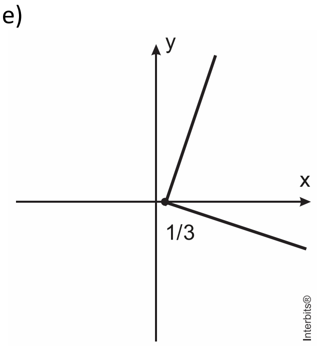
c)



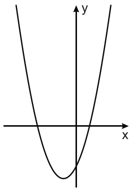
d)



e)

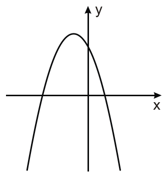


06) (UFRGS – RS) Se

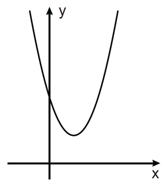


é o gráfico da função f definida por $y = f(x)$, então, das alternativas abaixo, a que pode representar o gráfico da função z, definida por $z = |f(x)|$, é

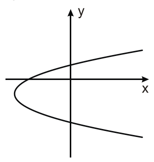
a)



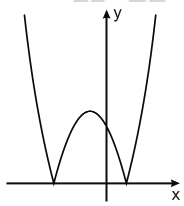
b)



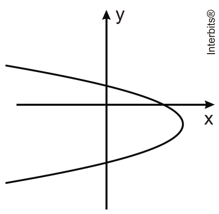
c)



d)



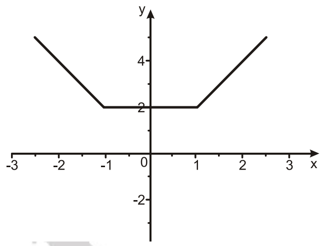
e)



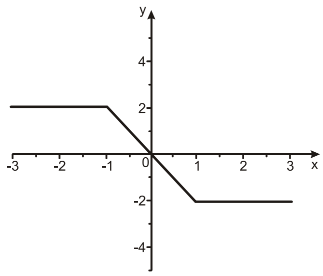
Nível 3

07) (PUC – RJ) Considere a função real $f(x) = |x+1| + |x-1|$. O gráfico que representa a função é:

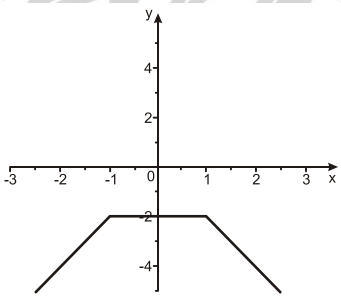
a)



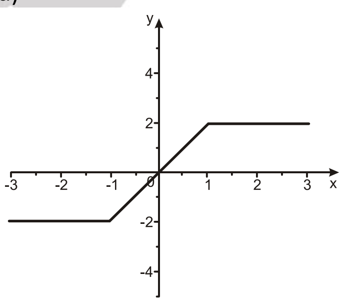
b)



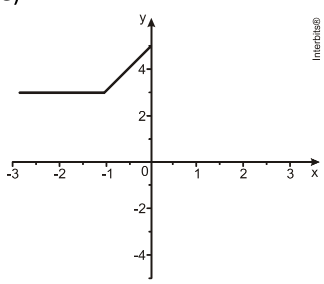
c)



d)



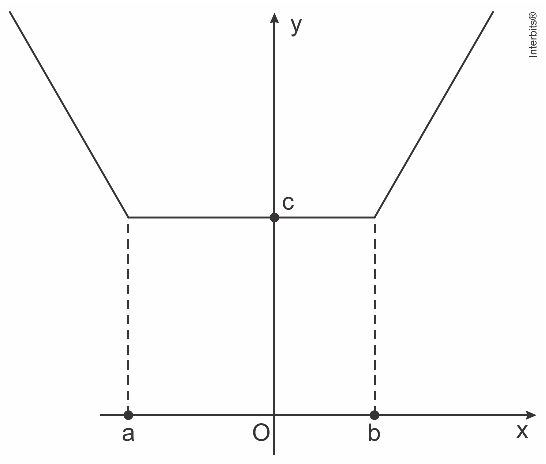
e)



08) (UDESC – SC) O conjunto imagem da função modular $f(x) = |\ |x + 1| - |x - 1|\ |$ é:

a) [-2, 2]
b)] - ∞, 2]
c) [0, 2]
d) [0, + ∞[
e)]0, 2]

09) (ESPECEX) Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x-2| + |x+3|$, então o valor de $a+b+c$ é igual a



a) –7. b) –6. c) 4. d) 6. e) 10.

10) (EFOMM) Determine a imagem da função f, definida por $f(x) = ||x+2| - |x-2||$, para todo $x \in \mathbb{R}$, conjunto dos números reais.

a) $Im(f) = \mathbb{R}$
b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.
c) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$.
d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$.
e) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.

11) (UFU) Considere a função definida por $y = f(x) = k \cdot |x-3|$, em que k é um número natural constante, x uma variável assumindo valores reais e $|a|$ representa o módulo do número real a. Representando, no sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico de $y = f(x)$, tem-se que esse gráfico e os eixos coordenados delimitam um triângulo de área igual a 72 cm².

Nas condições apresentadas, o valor de k, em cm, é um número

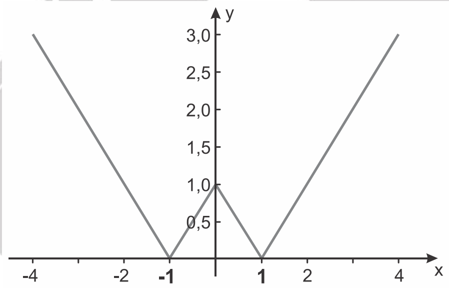
a) quadrado perfeito.
b) ímpar.
c) múltiplo de 3.
d) divisível por 5.

12) (UEM – PR) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Assinale o que for **correto**.

01. Se $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x$, então $f(x) > g(x)$ para todo número real x.
02. Se f e g são funções modulares definidas por $f(x) = |x+1|$ e $g(x) = |x-1|$, então seus gráficos não têm intersecção.
04. Se f é a função modular definida por $f(x) = |2x|$ e g é a função constante definida por $g(x) = 10$, então $f(x) \leq g(x)$ quando $-5 \leq x \leq 5$; e $f(x) > g(x)$ se $x > 5$ ou $x < -5$.
08. Se $f(x) = 5 - |x+1|$, então podemos calcular $\sqrt{f(x)}$ para todo $x \geq 0$.
16. Se f é a função modular definida por $f(x) = |x+1|$, então o conjunto imagem de f é $Im(f) = [1, +\infty)$.

13) (PUC – PR) Considere os seguintes dados.

Pode-se dizer que quando duas variáveis x e y são tais que a cada valor de x corresponde um único valor de y, segundo uma lei matemática, diz-se que y é função de x. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ que é representada pelo gráfico a seguir.



Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir.

I. f é ímpar.
II. f é injetora.
III. A lei matemática de f é $f(x) = ||x| - 1|$.
IV. f é crescente se, e só se, x > 1.
V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

a) Somente II é correta.
b) Somente I é correta.
c) Somente III e V são corretas.
d) Todas as proposições são corretas.
e) Todas as proposições são falsas.

14) (UEM – PR) Considerando o módulo de números reais e as funções envolvendo módulo, assinale a(s) alternativa(s) **correta**(s).

01. $|x| \neq -x, \forall x \in \mathbb{R}$.
02. Se f e g estão definidas no mesmo domínio e no mesmo contradomínio, então o gráfico de $f(x) = |x+2| - 2$ é igual ao gráfico de $g(x) = |x|$, mas deslocado em duas unidades para a esquerda no eixo x e duas unidades para baixo no eixo y.
04. A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = |x|$, é injetora e sobrejetora.
08. A solução da equação $|\cos(x+4) - \text{sen}(x-1) + \sqrt{x+2-1}| + 5 = 0$ é $k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}^+$.
16. A equação $|x+1| - |x-1| = 0$ não possui solução real.

GABARITO VÍDE AULA 15

1) e	**2)** b	**3)** b	**4)** a	**5)** d	**6)** d	**7)** a
8) c	**9)** c	**10)** c	**11)** a	**12)** 05	**13)** c	**14)** 06