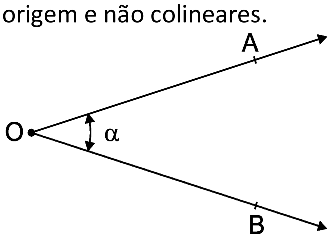
AULA 01

GEOMETRIA PLANA
CONCEITOS INICIAIS

1. Ângulos

Ângulo é a região formada por duas semirretas de mesma origem e não colineares.

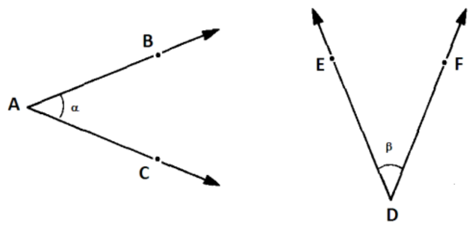


Indicamos assim: $\angle$ AOB ou $A\hat{O}B$

$\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo e O é o vértice

3.1. Ângulos Congruentes

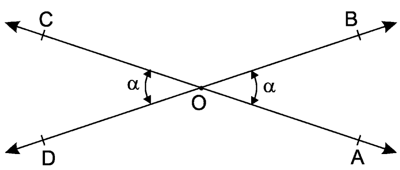
Dois ângulos são congruentes se suas medidas forem iguais.



$\boxed{\angle BAC \cong \angle EDF \leftrightarrow B\hat{A}C = E\hat{D}F}$

3.2. Ângulos opostos pelo vértice

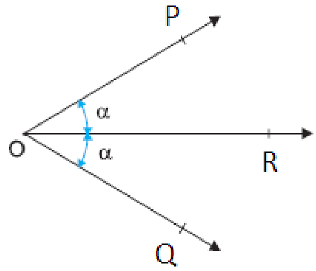
Se os lados de um ângulo são semirretas opostas aos lados de outro ângulo, eles são chamados **ângulos opostos pelo vértice**.



Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes entre si.

3.3. Bissetriz de um ângulo

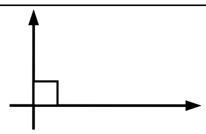
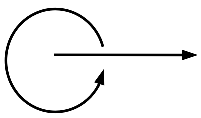
Bissetriz de um ângulo é a semirreta de origem no vértice do ângulo que divide esse ângulo em dois ângulos congruentes.



$\overrightarrow{OR}$ é bissetriz de $\angle$ POQ
Então $P\hat{O}R = Q\hat{O}R$

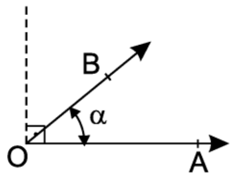
3.3. Classificação

Segue abaixo alguns ângulos notáveis:

		Medida
Ângulo	Figura	Graus
Reto		90°
Raso		180°
de uma volta		360°

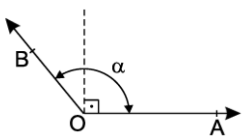
Ângulo Agudo

Um ângulo é agudo quando sua medida é menor do que a medida de um ângulo reto.



Ângulo Obtuso

Um ângulo é obtuso quando sua medida é maior do que a de um ângulo reto e menor do que a medida de um ângulo raso.



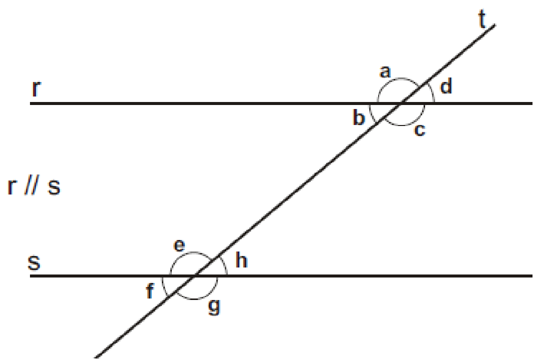
3.4. Ângulos Complementares, Suplementares e Replementares

Dois ângulos α e β podem ser:

- **Complementares:** se a soma de suas medidas é um ângulo reto: $\alpha + \beta = 90°$
- **Suplementares:** se a soma de suas medidas é um ângulo raso: $\alpha + \beta = 180°$
- **Replementares:** se a soma de suas medidas é um ângulo de uma volta: $\alpha + \beta = 360°$

4. Ângulo de duas paralelas cortadas por uma transversal

Dadas as retas *r*, *s* e *t.* Sejam *r // s* e *t* interceptando *r* e *s*. Nestas condições, existem oito ângulos formados. Acompanhe a figura abaixo:



A seguir temos a nomenclatura e as propriedades:

Nomenclatura	**Ângulos**	**Propriedade**
Correspondentes	**a** e **e**; **b** e **f**; **c** e **g**; **d** e **h**	Congruentes
Colaterais Internos	**b** e **e**; **c** e **h**	Suplementares
Colaterais Externos	**a** e **f**; **d** e **g**	Suplementares
Alternos Internos	**b** e **h**; **c** e **e**	Congruentes
Alternos Externos	**a** e **g**; **d** e **f**	Congruentes

Exercícios

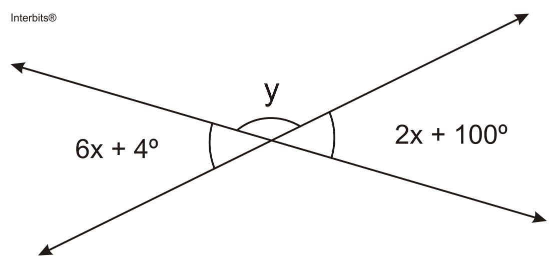
01) (UFSM – RS) A soma de dois ângulos é igual a 100º. Um deles é o dobro do complemento do outro. A razão do maior para o menor é:

a) 6
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

02) Um ângulo mede o triplo do seu suplemento. Então esse ângulo mede:

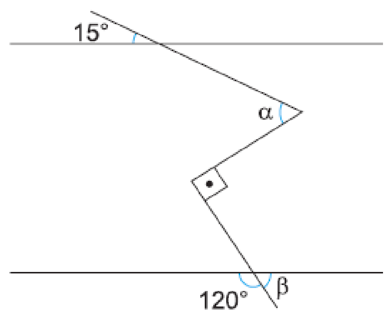
a) 45°
b) 135°
c) 100°
d) 175°
e) n.d.a

03) A medida de y na figura, em graus, é:



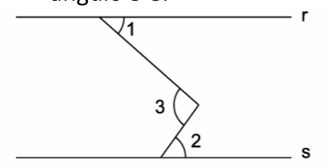
a) 42°.
b) 32°.
c) 142°.
d) 148°.
e) 24°.

04) Se as retas r e s da figura são paralelas, então $3\alpha + \beta$ vale:

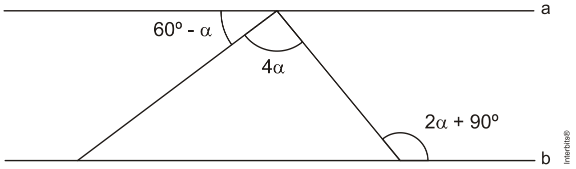


a) 225°
b) 195°
c) 215°
d) 175°
e) 185°

05) Na figura, as retas **r** e **s** são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é:



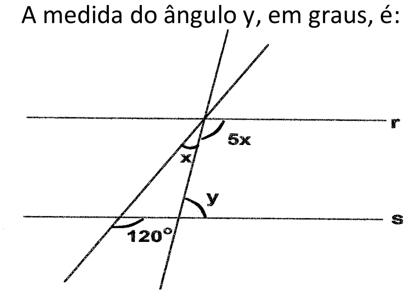
06) (MACK – SP) Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



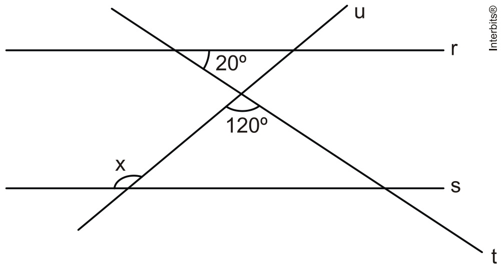
A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

a) um número primo maior que 23.
b) um número ímpar.
c) um múltiplo de 4.
d) um divisor de 60.
e) um múltiplo comum entre 5 e 7.

07) (UFSC – SC) Na figura abaixo as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo y, em graus, é:



08) (IFPE – PE) Júlia começou a estudar Geometria na sua escola. Com dúvida em um exercício passado pelo professor de matemática, ela pediu ajuda ao seu tio. O enunciado era: “As retas r e s são paralelas; as retas u e t, duas transversais. Encontre o valor do ângulo x na figura abaixo”. Portanto, o valor de x é:

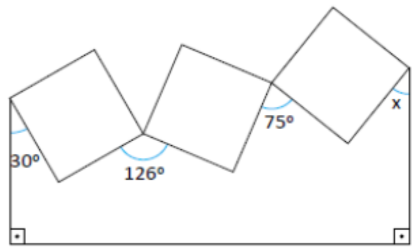


a) 120°
b) 125°
c) 130°
d) 135°
e) 140°

09) (PUC – PR) Dois ângulos complementares A e B, sendo A < B, têm medidas na razão de 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo A para o suplemento do ângulo B vale:

a) $\frac{43}{47}$ b) $\frac{17}{13}$ c) $\frac{13}{17}$ d) $\frac{119}{48}$ e) $\frac{47}{43}$

10) (OBM) Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.



Qual a medida do ângulo *x*?

a) 39°
b) 41°
c) 43°
d) 44°
e) 46°

GABARITO – AULA 01

1) c	**2)** b	**3)** b	**4)** b	**5)** 100°	**6)** d
7) 80	**8)** e	**9) e**	**10)** a		

falsas:

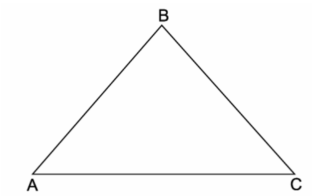
AULA 02

ESTUDO DOS TRIÂNGULOS

Triângulos

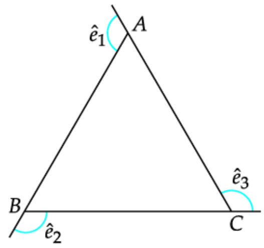
Definição

Dados os pontos A, B e C não alinhados, chama-se triângulo A, B, C (indicado por: ΔABC) à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



Os elementos do triângulos são:

- Vértices: Pontos A, B e C
- Lados: Segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$
- Ângulos Internos: $A\hat{B}C$; $B\hat{C}A$; $C\hat{A}B$
- Ângulos Externos: são os ângulos suplementares dos ângulos internos. Na figura abaixo os ângulos $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, e $\hat{e}_3$ são os ângulos externos do triângulo.

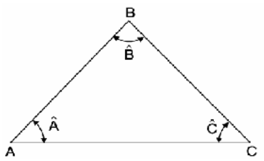


- Perímetro: exprime a soma das medidas dos lados. Indicamos por 2p.

4.2. Propriedades

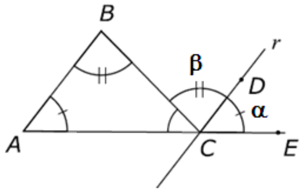
Teorema Angular de Tales

A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°



$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ}$$

Demonstração: Considere r // $\overline{AB}$



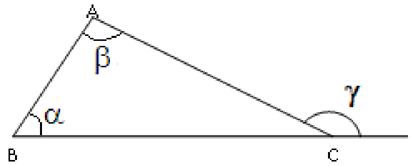
$\hat{A} \cong \alpha$ (ângulos correspondentes)
$\hat{B} \cong \beta$ (ângulos alternos internos)

Como $\hat{C} + \alpha + \beta = 180°$, temos:

$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ}$$

Teorema do Ângulo Externo

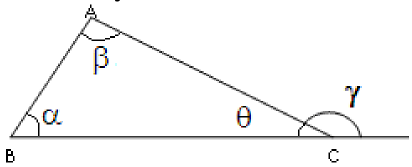
Num triângulo, cada ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.



Na figura acima o ângulo γ é o ângulo externo não adjacentes aos ângulos α e β. Logo:

$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta}$$

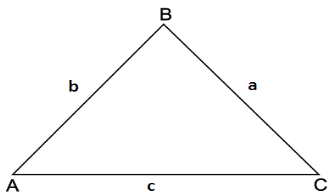
Demonstração



$\alpha + \beta + \theta = 180°$ e $\theta + \gamma = 180°$
Então: $\alpha + \beta + \theta = \theta + \gamma$
Portanto: $\gamma = \alpha + \beta$

Condição de Existência do triângulo

A condição necessária e suficiente para existir um triângulo é que a medida de cada lado seja menor que a soma das medidas dos outros dois.



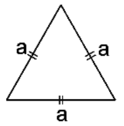
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

Em todo triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice versa.

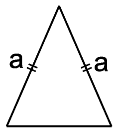
Classificação dos triângulos

- **Quanto aos lados**

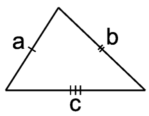
Equilátero: Possuir três lados congruentes.



Isósceles: Possuir dois lados congruentes.



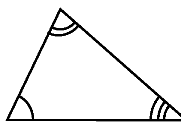
Escaleno: Possui os três lados com medidas diferentes.



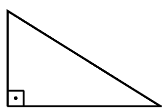
IMPORTANTE: Todo triângulo equilátero é isósceles.

- **Quanto aos ângulos**

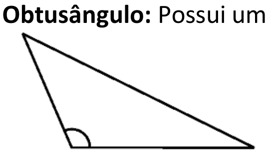
Acutângulo: Possui os três ângulos agudos.



Retângulo: Possui um ângulo reto.



Obtusângulo: Possui um ângulo obtuso.

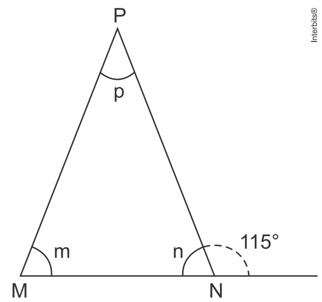


Exercícios

01) As medidas dos ângulos de um triângulo são, respectivamente, x, $8x$ e $9x$. Diante do exposto, assinale a alternativa que apresenta o valor de x.

a) 7.
b) 8,5.
c) 10.
d) 11,8.
e) 12.

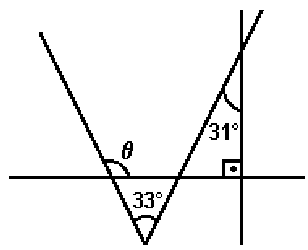
02) (MACK – SP)



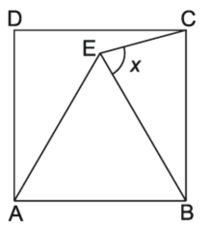
O triângulo PMN acima é isósceles de base $\overline{MN}$. Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

a) 50°, 65°, 65°
b) 65°, 65°, 50°
c) 65°, 50°, 65°
d) 50°, 50°, 80°
e) 80°, 80°, 40°

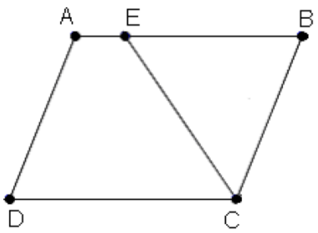
03) Determine o valor do ângulo θ na figura abaixo.



04) ABCD é um quadrado. ABE é um triângulo equilátero. Determine o valor de x.



05) (UDESC – SC) No paralelogramo *ABCD*, conforme mostra a **Figura**, o segmento *CE* é a bissetriz do ângulo *DCB*.

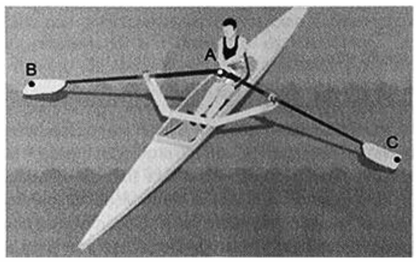


Sabendo que *AE* = 2 e *AD* = 5, então o valor do perímetro do paralelogramo *ABCD* é:

a) 26
b) 16
c) 20
d) 22
e) 24

06) (ENEM) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho.

A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



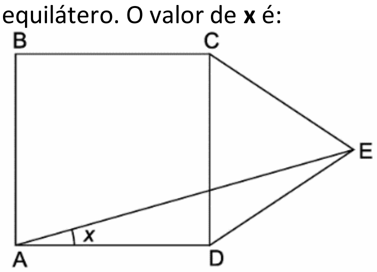
Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo $B\hat{A}C$ tem medida de $170°$.

O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é

a) retângulo escaleno.
b) acutângulo escaleno.
c) acutângulo isósceles.
d) obtusângulo escaleno.
e) obtusângulo isósceles.

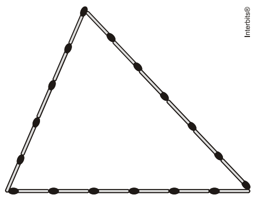
07) Na figura ABCD é quadrado e o triângulo CDE é equilátero. O valor de **x** é:



08) (UFRGS – RS) Assinale a alternativa que apresenta corretamente os valores, na mesma unidade de medida, que podem representar as medidas dos lados de um triângulo.

a) 1 – 2 – 4
b) 3 – 2 – 6
c) 8 – 4 – 3
d) 3 – 9 – 4
e) 6 – 4 – 5

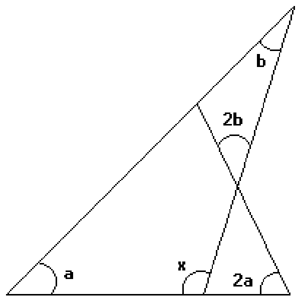
09) (ENEM) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3.
b) 5.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

10) (UFMG) Observe a figura.



Nela, a, 2a, b, 2b, e x representam as medidas, em graus, dos ângulos assinalados. O valor de x, em graus, é:

a) 100 b) 110 c) 115 d) 120

GABARITO – AULA 02

1) c **2)** a **3)** 92° **4)** 75° **5)** e **6)** e **7)** 15°
8) e **9)** a **10)** d

AULA 03

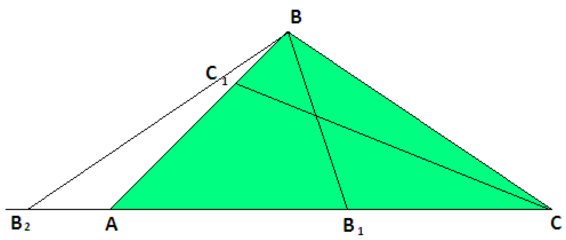
TRIÂNGULOS – SEGMENTOS E PONTOS NOTÁVEIS

1. Pontos Notáveis do triângulos

Os pontos notáveis de um triângulo representam o encontro de algumas cevianas notáveis de um triângulo. Daí você pergunta: O que é uma ceviana?

SAIBA MAIS!

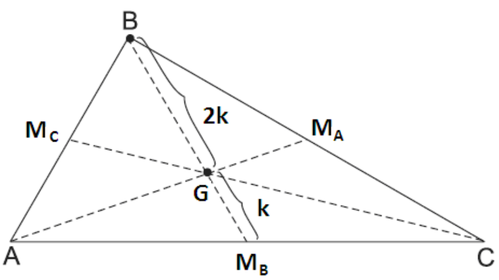
Ceviana é qualquer segmento de reta que tem uma extremidade num vértice de um triângulo e a outra extremidade num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse mesmo vértice.



Na figura acima, temos: $\overline{BB_2}$, $\overline{BB_1}$ e $\overline{CC_1}$ como cevianas do triângulo ABC.
Algumas cevianas possuem características especiais e estas são denominadas cevianas notáveis do triângulo. É o caso por exemplo da mediana, altura e bissetriz.

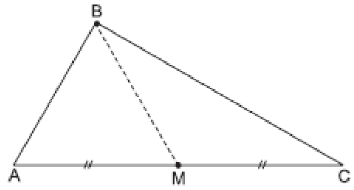
1.1. Baricentro

Baricentro é o ponto de encontro das medianas do triângulo. O Baricentro, indicado geralmente pela letra G, divide cada mediana em dois segmentos que estão na razão 2 para 1.



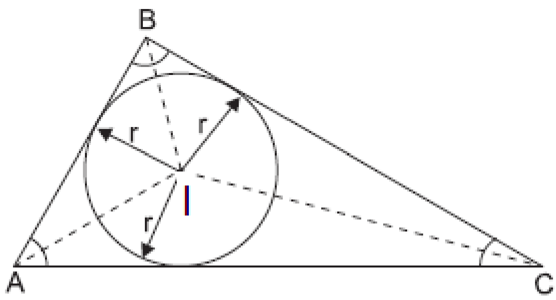
$$\frac{BG}{GM_B} = \frac{AG}{GM_A} = \frac{CG}{GM_C} = \frac{2}{1}$$

E afinal, o que é uma mediana?
Mediana é uma ceviana que tem como extremidade o vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto.



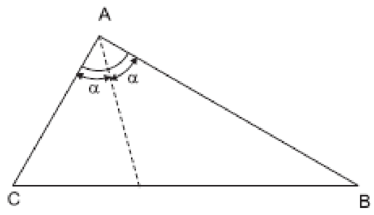
1.2. Incentro

Incentro é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo. O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.



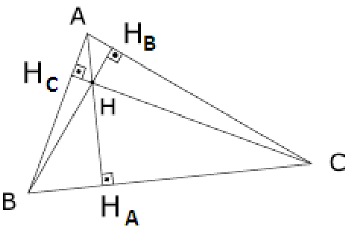
O incentro equidista dos lados do triângulo.

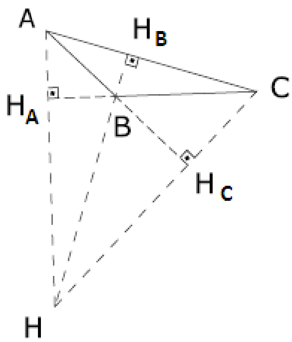
E afinal, o que é uma bissetriz interna?
Bissetriz Interna é uma ceviana que divide um ângulo interno do triângulo em dois ângulos congruentes.

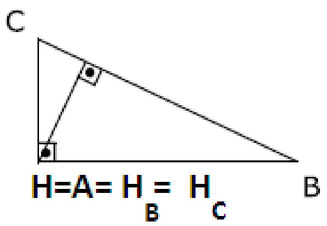


1.3. Ortocentro

Ortocentro é o ponto de encontro das retas suportes das alturas do triângulo.
O ortocentro é um ponto da região interior de um triângulo, caso o triângulo seja acutângulo.
O ortocentro é um ponto da região exterior de um triângulo, caso o triângulo seja obtusângulo
O ortocentro é o vértice do ângulo reto, caso o triângulo seja retângulo.

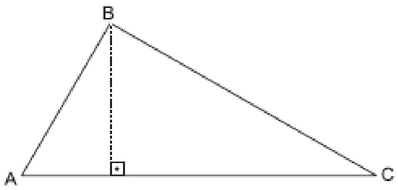






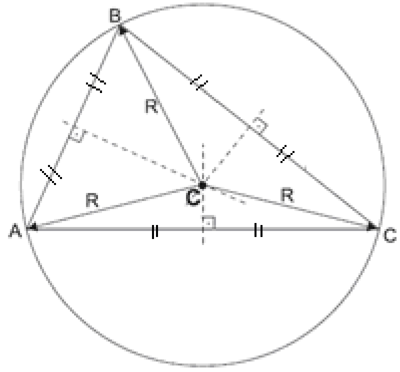
E afinal, o que é uma altura?

Altura é a ceviana perpendicular a um lado.



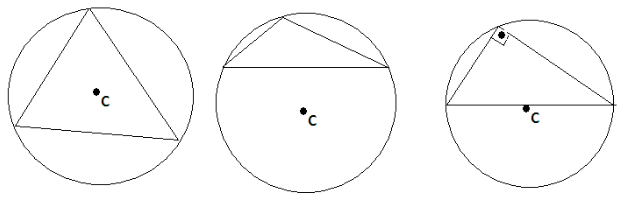
1.4. Circuncentro

Circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados do triângulo. O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

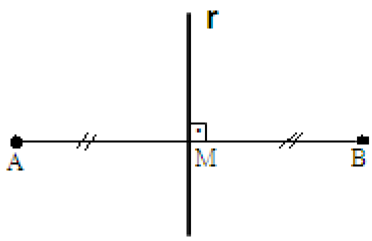


O circuncentro equidista dos vértices do triângulo.

O circuncentro é um ponto da região interior de um triângulo, caso o triângulo seja acutângulo.
O circuncentro é um ponto da região exterior de um triângulo, caso o triângulo seja obtusângulo.
O circuncentro é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo.

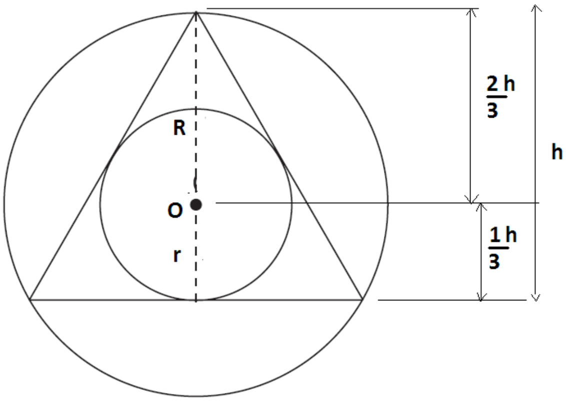


E afinal, o que é uma mediatriz?
Mediatriz de um segmento de reta AB é a reta perpendicular a esse segmento pelo seu ponto médio.



- No triângulo equilátero, o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro coincidem num único ponto.

Consequência:



- Em geral, as cevianas notáveis apresentadas são cevianas distintas. No entanto, as três cevianas coincidem em apenas um segmento se forem relativas à base de um triângulo isósceles.

Exercícios

01) Um ponto **P**, interno a um triângulo, equidista dos vértices de um triângulo ABC. O ponto **P** é:

a) O baricentro do triângulo ABC.
b) O incentro do triângulo ABC.
c) O circuncentro do triângulo ABC.
d) O ortocentro do triângulo ABC.
e) Um ex-incentro do triângulo ABC.

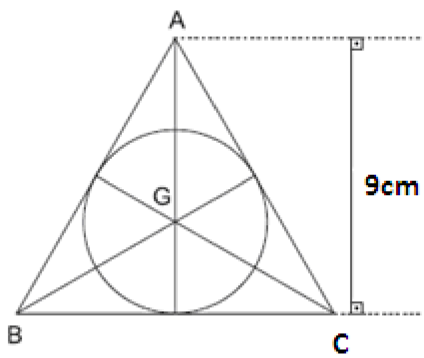
02) Um ponto **Q** pertence à região interna de um triângulo DEF e equidista dos lados desse triângulo. O ponto **Q** é:

a) O baricentro do triângulo DEF.
b) O incentro do triângulo DEF.
c) O circuncentro do triângulo DEF.
d) O ortocentro do triângulo DEF.
e) Um ex-incentro do triângulo DEF.

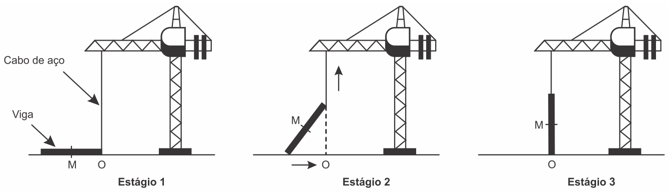
03) O segmento da perpendicular traçada de um vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto é denominado:

a) mediana.
b) mediatriz.
c) bissetriz.
d) altura.
e) base.

04) Determine o raio da circunferência inscrita no triângulo equilátero ABC.



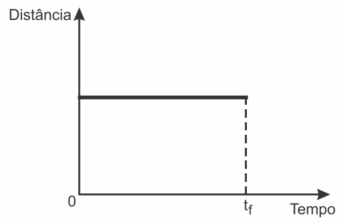
05) (ENEM) Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicial mente no solo.



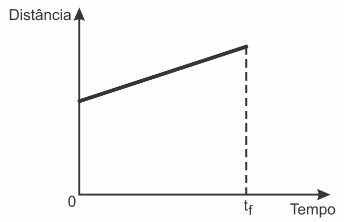
Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo $t = 0$ (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga.

O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre $t = 0$ e t_f, é

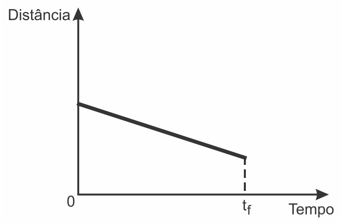
a)



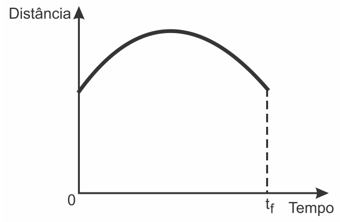
b)



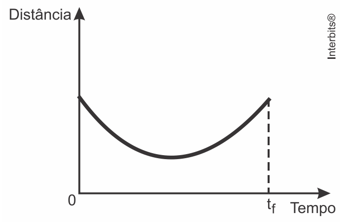
c)



d)



e)



06) (UNESP – SP) Um aluno precisa localizar o centro de uma moeda circular e, para tanto, dispõe apenas de um lápis, de uma folha de papel, de uma régua não graduada, de um compasso e da moeda.

Nessas condições, o número mínimo de pontos distintos necessários de serem marcados na circunferência descrita pela moeda para localizar seu centro é

a) 3.
b) 2.
c) 4.
d) 1.
e) 5.

GABARITO – AULA 03

1) c **2)** b **3)** d **4)** 3 **5)** a **6)** a

AULA 04

ESTUDO DOS POLÍGONOS

1. Definição

Seja (P_1, P_2, ..., P_n) um conjunto ordenado de *n* pontos de um plano, $n \geq 3$, de modo que três pontos consecutivos quaisquer, $P_1P_2P_3$, $P_2P_3P_4$, ..., $P_{n-1}P_nP_1$ e $P_nP_1P_2$ não sejam colineares, chama-se polígono $P_1P_2...P_n$ à união dos segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$

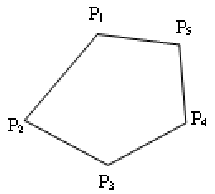


Figura 1

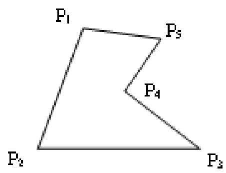


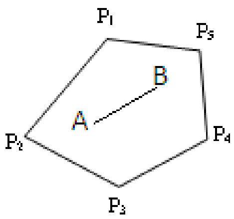
Figura 2

P_1, P_2, ..., P_n são chamados vértices do polígono

$\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$ são os lados do polígono.

A figura 1 representa um polígono convexo e a figura 2 representa um polígono côncavo.

Um polígono é convexo se, quaisquer que sejam os pontos A e B do seu interior, o segmento de reta AB está inteiramente contido em seu interior.



A partir de agora, sempre que nos referirmos a um polígono, fica subentendido que o polígono é convexo.

2. Classificação

Os polígonos podem ser classificados quanto o número de lados. Os mais conhecidos são:

- Triângulos ou trilátero- 3 lados
- Quadriláteros ou quadrângulo - 4 lados
- Pentágono - 5 lados
- Hexágono - 6 lados
- Heptágono - 7 lados
- Octógono - 8 lados
- Eneágono - 9 lados
- Decágono - 10 lados
- Dodecágono - 12 lados
- Icoságono - 20 lados

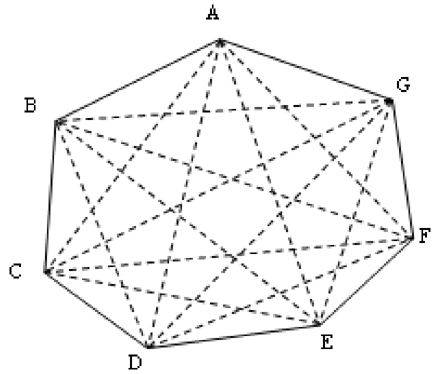
Observação: Um polígono é dito regular se for equilátero (lados com medidas iguais) e equiângulo (ângulos com medidas iguais).

3. Perímetro

O perímetro de um polígono é a soma das medidas dos lados desse polígono.

4. Número de Diagonais

Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vertices **não consecutivos** do polígono.



Seja *n* o número de lados ($n \geq 3$) de um polígono, temos que:

- A partir de um vértice do polígono podemos traçar ($n - 3$) diagonais.
- Os *n* vértices dão origem a $n(n - 3)$ diagonais.
- Com esse raciocício cada diagonal foi contada duas vezes. Assim:

O número de diagonais de um polígono é dado pela expressão:

$$\boxed{d = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Observação:
Seja *n* o número de lados ($n \geq 3$) de um **polígono regular**, temos que:

- Se *n* é par, então *n*/2 é o número de diagonais que passam pelo centro (D_C) do polígono.

$$\boxed{D_C = \frac{n}{2}}$$

- Se *n* é ímpar, não há diagonais que passam pelo centro do polígono.

Exercício Resolvido: Considere um decágono regular. Determine:

a) Quantas diagonais podemos traçar a partir de um único vértice do polígono?

Resolução: $n = 10 \rightarrow n - 3 \rightarrow 10 - 3 = 7$

b) O número de diagonais (d).

Resolução:

$n = 10 \rightarrow d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10(10-3)}{2} \rightarrow d = 35.$

c) O número de diagonais que passam pelo centro do octógono (D_C).

Resolução:

$n = 10 \rightarrow D_C = \frac{n}{2} = \frac{10}{2} \rightarrow D_C = 5.$

d) O número de diagonais que **não** passam pelo centro do decágono.

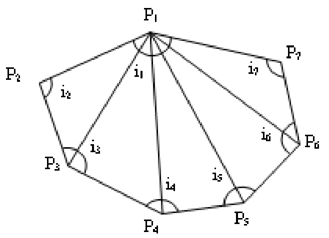
Resolução:

Para calcularmos o número de diagonais que não passam centro do decágono, basta subtrairmos o número de diagonais (d) pelo número de diagonais que passam pelo centro do decágono(D_C), ou seja, basta calcular $d - D_C$.

Logo, ficamos com: $d - D_C = 35 - 5 = 30.$

5. Soma dos ângulos internos

Seja n o número de lados ($n \geq 3$) de um polígono convexo:



- A partir de um vértice do polígono temos (n – 2) triângulos. Assim:

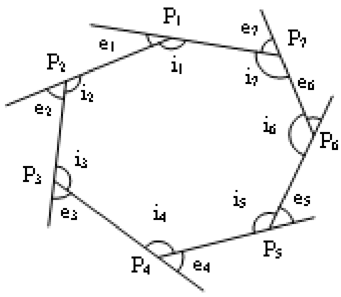
A soma dos ângulos internos (S_i) é dado pela expressão:

$$\boxed{S_i = 180°(n-2)}$$

6. Soma dos ângulos externos

A soma dos ângulos externos (S_e) de um polígono convexo com n lados ($n \geq 3$) é sempre igual a **360°**

$$\boxed{S_e = 360°}$$



Observação: Em torno de um mesmo vértice, temos:

ângulo interno + ângulo externo = 180°

7. Polígonos Equiângulos

Para **polígonos equiângulos** (incluindo os polígonos regulares que são equiângulos e equiláteros), podemos calcular cada ângulo interno (i) ou externo (e) através das seguintes relações:

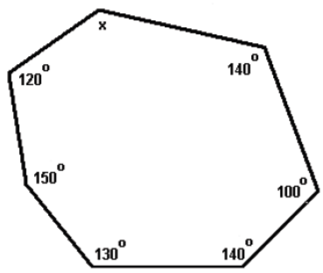
$$\boxed{i = \frac{S_i}{n} = \frac{180.(n-2)}{n}} \qquad \boxed{e = \frac{S_e}{n} = \frac{360^0}{n}}$$

Exercícios

01) (ACAFE – SC) Diagonal de um polígono convexo é o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos do polígono. Se um polígono convexo tem 9 lados, qual é o seu número total de diagonais?

a) 72
b) 63
c) 36
d) 27
e) 18

02) (UEL – PR) Seja o heptágono irregular, ilustrado na figura seguinte, onde seis de seus ângulos internos medem 120º, 150º, 130º, 140º, 100º e 140º. A medida do sétimo ângulo é



a) 110º
b) 120º
c) 130º
d) 140º
e) 150º

03) Em um dodecágono regular *ABCDE*... calcule:

a) a soma dos ângulos internos
b) a soma dos ângulos externos
c) cada ângulo interno e externo

04) (MACK-SP) Os ângulos externos de um polígono regular medem 20°. Então o número de diagonais desse polígono é:

a) 90
b) 104
c) 119
d) 135
e) 152

05) (PUC-SP) Qual é o polígono regular em que o número de diagonais é o dobro do número de lados?

a) Dodecágono
b) Pentágono
c) Octógono
d) Heptágono
e) Hexágono

06) O polígono convexo cuja soma dos ângulos internos mede 1.440° tem exatamente:

a) 15 diagonais
b) 20 diagonais
c) 25 diagonais
d) 30 diagonais
e) 35 diagonais

07) Cada ângulo interno de um eneágono regular mede:

a) 230°
b) 130°
c) 140°
d) 28°
e) 150°

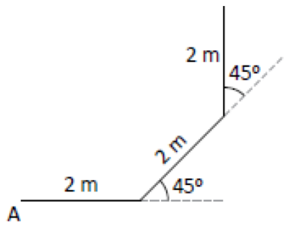
08) Determine o número de diagonais de um polígono convexo que possui 20 lados.

09) Qual o número de diagonais de um polígono convexo, em que a soma das medidas dos ângulos internos é o quíntuplo da soma das medidas dos ângulos externos?

10) Assinale V para as alternativas Verdadeiras ou F para as alternativas falsas:

a) ( ) Se um polígono convexo tem 15 lados, então seu número total de diagonais é 90.
b) ( ) O polígono que tem o número de lados igual ao número de diagonais é o pentágono.
c) ( ) Num dodecágono regular existem 54 diagonais das quais 27 passam pelo centro do polígono.
d) ( ) A soma dos ângulos internos de um heptágono é 900°.
e) ( ) Cada ângulo externo de um decágono regular mede 144°

11) (PUC – SP) A figura descreve o movimento de um robô:



Partindo de A, ele sistematicamente avança 2 m e gira 45° para a esquerda. Quando esse robô retornar ao ponto A, a trajetória pecorrida terá sido:
a) uma circunferência.
b) um hexágono regular.
c) um octógono regular.
d) um decágono regular.
e) um polígono não regular.

12) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2160°. O número de diagonais desse polígono que não passam pelo centro é:

13) (MACK – SP) A medida em graus do ângulo interno de um polígono regular é um número inteiro. Sendo *n* o número de lados desse polígono, então, *n* pode assumir
a) 60 valores distintos.
b) 50 valores distintos.
c) 40 valores distintos.
d) 30 valores distintos.
e) 22 valores distintos.

14) (ITA – SP) Seja *n* o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de n – 1 ângulos(internos) do polígono é 2004°. Determine o número n de lados do polígono.

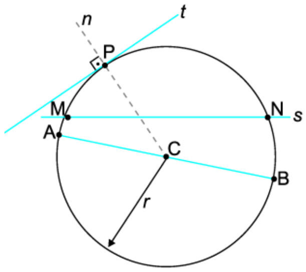
GABARITO – AULA 04

1) d **2)** b
3) a) 1800° b) 360° c) $a_i = 150°$ e $a_e = 30°$
4) d **5)** d **6)** e **7)** c **8)** 170 **9)** 54
10) a) V b) V c) F d) V e) F
11) c **12) 70** **13)** e **14)** 14

AULA 05

ÂNGULOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

1. Elementos



1.1. Reta secante (s): reta que corta a circunferência em dois pontos (M e N); MN chama-se corda.

1.2. Reta tangente (t): reta que possui um único ponto em comum com a circunferência (P é o ponto de tangência).

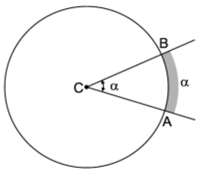
1.3. Reta normal (n): reta que passa por C (centro) e por P (ponto de tangência); a reta normal é sempre perpendicular à reta tangente.

1.4. Diâmetro (AB): corda que passa pelo centro (seu comprimento é 2 r).

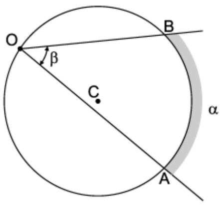
1.5. Círculo: é a união da circunferência com seus pontos internos.

2. Ângulos da circunferência

2.1. Ângulo Central: ângulo que tem vértice no centro da circunferência.

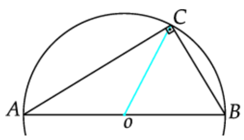


2.2. Ângulo Inscrito: ângulo que tem vértice na circunferência.



Propriedade: $\boxed{\beta = \frac{\alpha}{2}}$

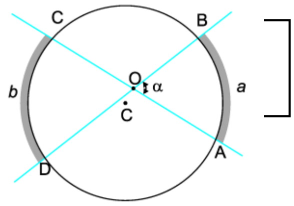
Consequência: Se um triângulo inscrito numa semicircunferência tem um lado igual ao diâmetro, então ele é um triângulo retângulo.



$\overline{OC}$ é a mediana, e OC = $\frac{AB}{2}$ = raio.

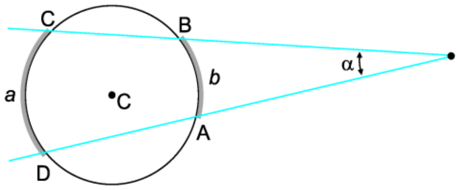
Os triângulos AOC e BOC são isósceles.

2.3. Ângulo excêntrico (fora do centro) interior



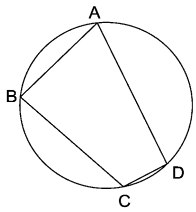
$$\alpha = \frac{a+b}{2}$$

2.4. Ângulo excêntrico (fora do centro) exterior



$$\alpha = \frac{a-b}{2}$$

2.5. Quadrilátero Inscrito na circunferência

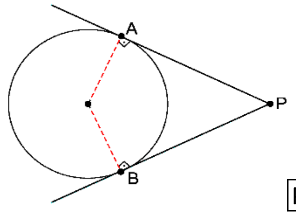


$$\boxed{\hat{A} + \hat{C} = 180°}$$

$$\boxed{\hat{B} + \hat{D} = 180°}$$

3. Tangências

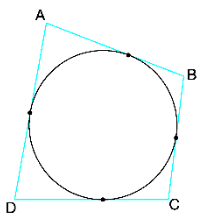
As medidas das tangentes à uma circunferência conduzidas pelo ponto P são iguais.



$\boxed{PA = PB}$

4. Teorema de Pitot

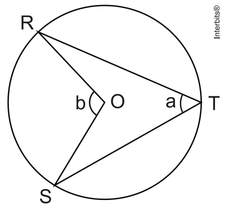
Em todo quadrilátero convexo circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois:



AB + DC = AD + BC

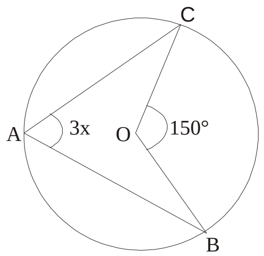
Exercícios

01) (IFCE – CE) Na figura abaixo, **R**, **S** e **T** são pontos sobre a circunferência de centro **O**. Se ***x*** é o número real, tal que ***a* = 5*x* e *b* = 3*x* + 42°** são as medidas dos ângulos **RTS** e **ROS**, respectivamente, pode-se dizer que



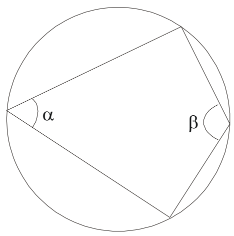
a) a = 30° e b = 60°.
b) a = 80° e b = 40°.
c) a = 60° e b = 30°.
d) a = 40° e b = 80°.
e) a = 30° e b = 80°.

02) (ACAFE-SC) Na figura a seguir, o valor de x é:



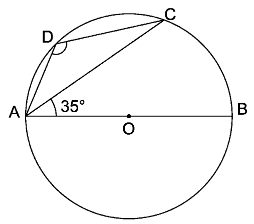
a) 25°
b) 30°
c) 50°
d) 75°
e) 100°

03) (UFRGS) No quadrilátero da figura, ($\alpha + \beta$) é:



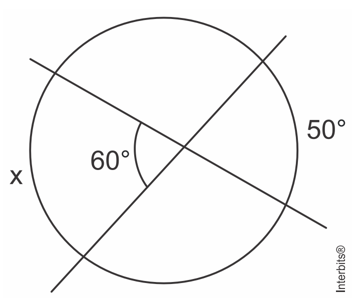
a) 200°
b) 180°
c) 160°
d) 150°
e) 120°

04) (FUVEST – SP) A medida do ângulo ADC inscrito na circunferência de centro O é:



a) 125°
b) 110°
c) 120°
d) 100°
e) 135°

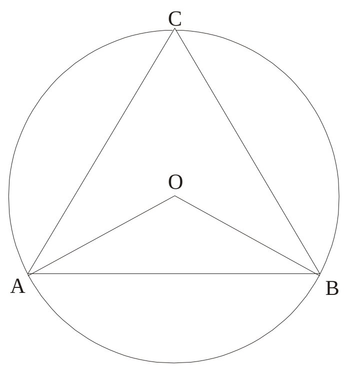
05) Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.



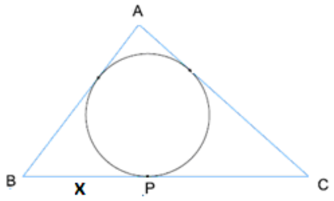
A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco x é

a) 40° b) 70° c) 110° d) 120°

06) (UFSC – SC) Na figura abaixo O é o centro da circunferência, o ângulo OAB mede 50°, e o ângulo OBC mede 15°. Determine a medida, em graus, do ângulo OAC.

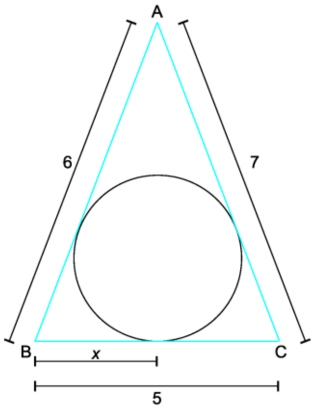


07) A circunferência está inscrita no triângulo ABC. Se AB = 8, AC = 9 e BC = 7, então x vale:

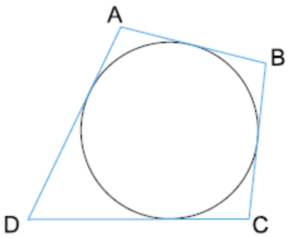


a) 1,5
b) 2,8
c) 3,0
d) 4,6
e) 5,0

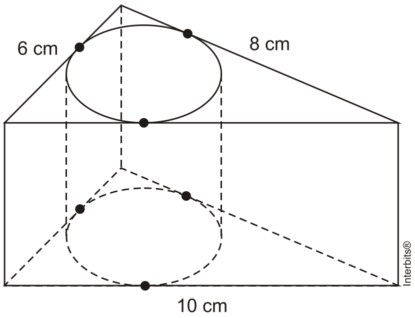
08) Na figura o valor de x é:



09) Determine o perímetro do quadrilátero abaixo circunscrito na circunferência, sendo BC = 8, CD = 10, AD = 11.



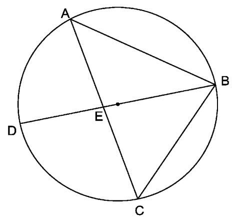
10) (ENEM) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

a) 1 cm.
b) 2 cm.
c) 3 cm.
d) 4 cm.
e) 5 cm.

11) (UFMG – MG) Observe a figura. Nessa figura, BD é um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, e os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{E}D$ medem, respectivamente, 20° e 85°. Assim sendo, o ângulo $C\hat{B}D$ mede



a) 25°
b) 35°
c) 30°
d) 40°

GABARITO – AULA 05

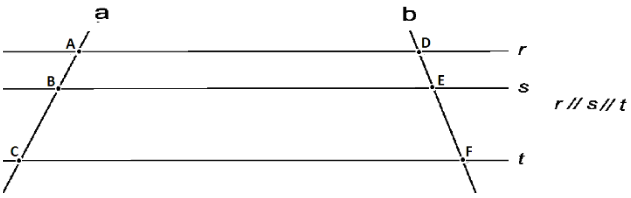
1) a	**2)** a	**3)** b	**4)** a	**5)** b	**6)** 25
7) a	**8)** 02	**9)** 38	**10)** b	**11)** a	

AULA 06

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1. Teorema de Tales

Considere um feixe de retas paralelas entre si (r//s//t) e duas retas transversais ***a*** e ***b***, que interceptam essas paralelas:

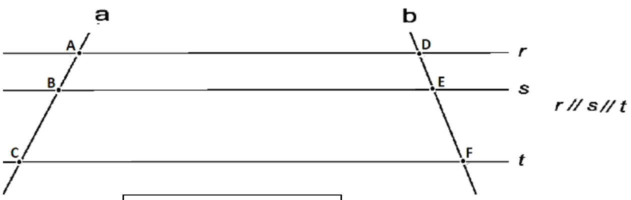


Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, assim como $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ são denominados segmentos correspondentes, pois são formados nas transversais entre as mesmas paralelas.

O Teorema de Tales enuncia o seguinte:

Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas retas transversais, segmentos correspondentes proporcionais.

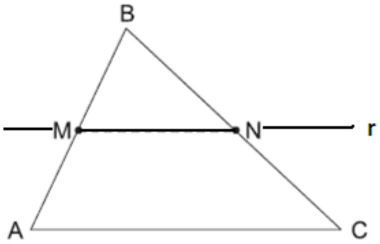
Na figura, temos:



$$\boxed{\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}}$$

Consequência Imediata

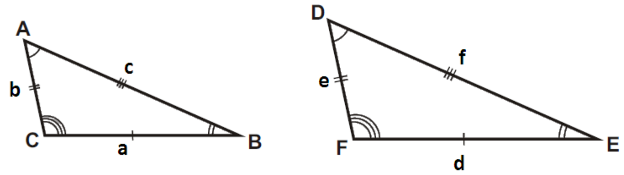
Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois lados, determina sobre eles pares de segmentos correspondentes proporcionais



Se $r // \overline{AC}$, então $\boxed{\frac{BM}{MA}=\frac{BN}{NC}}$

2. Triângulos Semelhantes

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem ângulos internos ordenadamente congruentes e os lados homólogos (correspondentes) proporcionais.



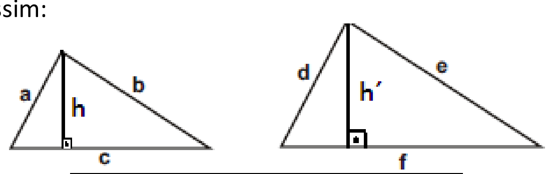
$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta DEF \leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}\equiv\hat{D} \\ \hat{B}\equiv\hat{E} \\ \hat{C}\equiv\hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=k}$$

Observações

1) Se a razão de semelhança entre dois triângulos semelhantes é **k**, então:

- A razão entre os perímetros é k
- A razão entre alturas homólogas dos triângulos é k.

Assim:



$$\boxed{\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=\frac{a+b+c}{d+e+f}=\frac{h}{h'}=k}$$

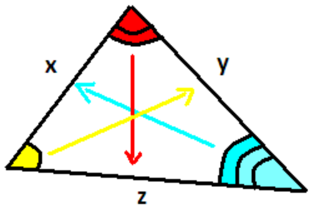
2) Se k = 1, os triângulos são congruentes.
3) Triângulos semelhantes possuem a *mesma forma*.
4) Dizer que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ significa dizer de maneira ordenada que: $\hat{A}\equiv\hat{D};\hat{B}\equiv\hat{E}$ e $\hat{C}\equiv\hat{F}$

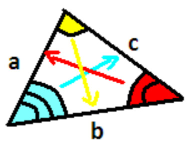
DICA IMPORTANTE:

Se no exercício não estiver clara a posição de dois triângulos semelhantes e com isso dificultar a identificação dos lados homólogos, proceda assim:

- Identifique os pares de ângulos congruentes;
- Os lados opostos a esses ângulos são homólogos.

Acompanhe o exemplo abaixo:

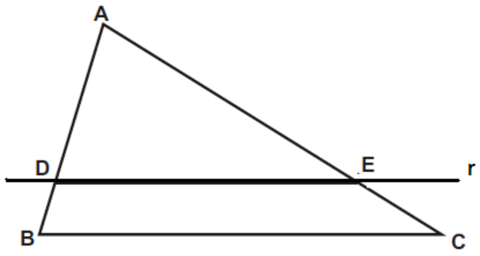




$$\boxed{\frac{a}{z}=\frac{b}{y}=\frac{c}{x}}$$

2. Propriedade

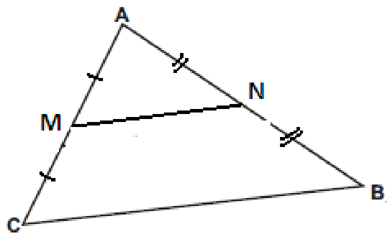
Qualquer reta paralela a um dos lados de um triângulo interceptando os outros dois lados em pontos distintos determina um segundo triângulo semelhante ao original.



Se $r // \overline{BC} \rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADE$

Consequência:

O segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo será paralelo ao terceiro lado e sua medida será a metade da medida do terceiro lado.

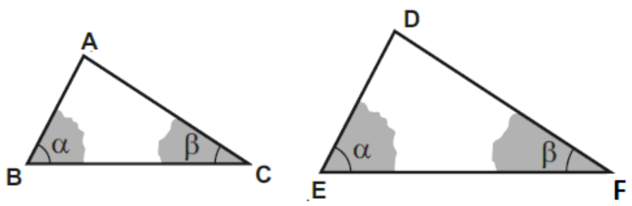


Se **M** e **N** são pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente, então: $MN // CB$ e $MN = \frac{1}{2}.BC$

3. Casos ou critérios de semelhança

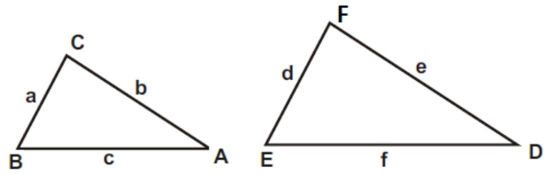
Podemos reconhecer se dois triângulos são semelhantes através de três critérios:

1º Critério: (AA): Dois triângulos que possuem dois ângulos de vértices correspondentes congruentes são semelhantes.



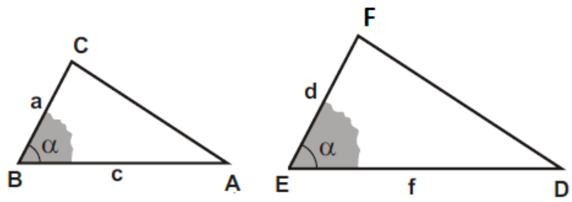
$$\left.\begin{matrix} \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

2º Critério: (LLL): Dois triângulos que possuem três lados correspondentes ordenadamentes proporcionais são semelhantes.



$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

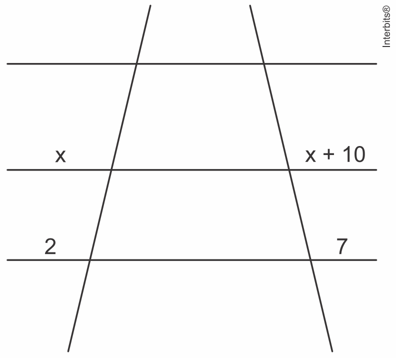
3º Critério: (LAL): Dois triângulos que possuem dois lados correspondentes proporcionais, e os ângulos formados por esses lados forem congruentes, os triângulos são semelhantes



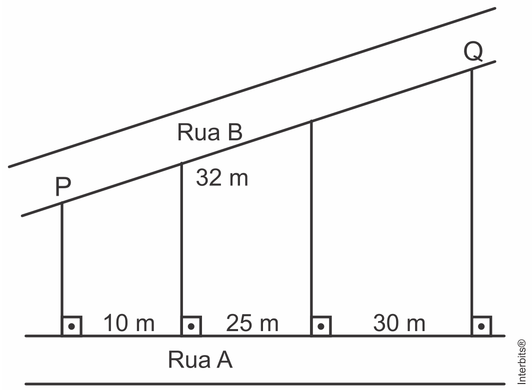
$$\left.\begin{matrix} \frac{a}{d} = \frac{c}{f} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Exercícios

01) Abaixo estão duas retas paralelas cortadas por duas transversais e um triângulo retângulo. Então, o valor da medida do segmento x é:



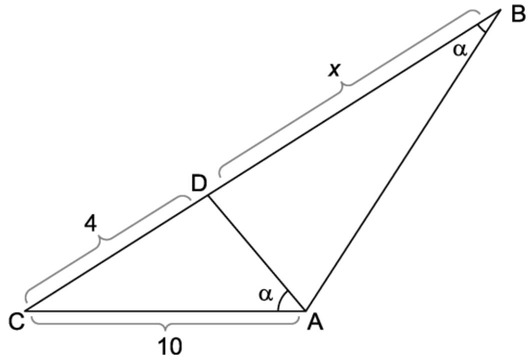
02) Com a urbanização, as cidades devem melhorar sua infraestrutura, como, por exemplo, fazendo mais vias asfaltadas. Sendo assim, a figura abaixo mostra a rua B, que precisa ser asfaltada do ponto P até o ponto Q. Na rua A, já asfaltada, há três terrenos com frente para a rua B e para rua A. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3, para a rua A, medem, respectivamente, 10 m, 25 m e 30 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 32 m.



Quantos metros de asfalto serão necessários?

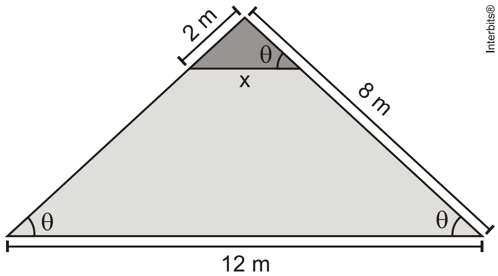
a) 65 m
b) 72 m
c) 38,4 m
d) 83,2 m

03) Na figura abaixo os ângulos CÂD e A$\hat{B}$D são congruentes. Então o valor de x é:



a) 42
b) 32
c) 21
d) 60
e) 10

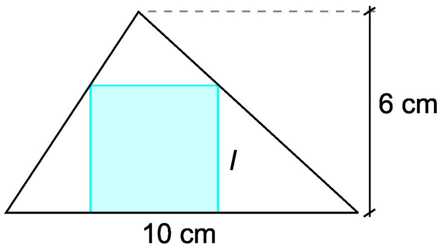
04) (PUC – RS) Considere a imagem abaixo, que representa o fundo de uma piscina em forma de triângulo com a parte mais profunda destacada.



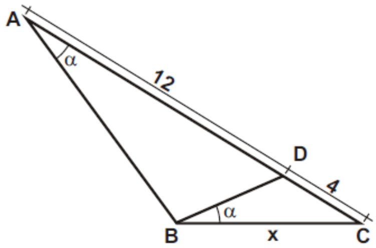
O valor em metros da medida "x" é

a) 2
b) 2,5
c) 3
d) 4
e) 6

05) A figura abaixo mostra um quadrado inscrito num triângulo de base 10 cm e altura 6 cm. Obter o perímetro do quadrado.

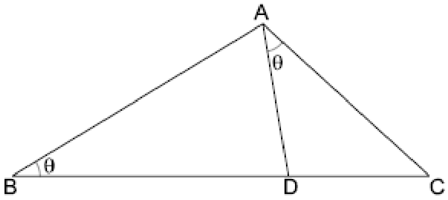


06) Na figura, temos:



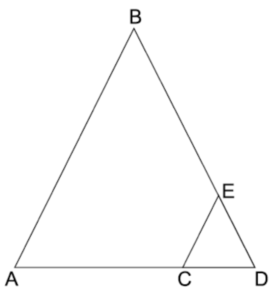
AD = 12 cm; CD = 4 cm e BÂC e CB̂D são congruentes. Obtenha BC

07) Na figura abaixo, são dados AC = 8 cm e CD = 4 cm. A medida de BD é, em cm:



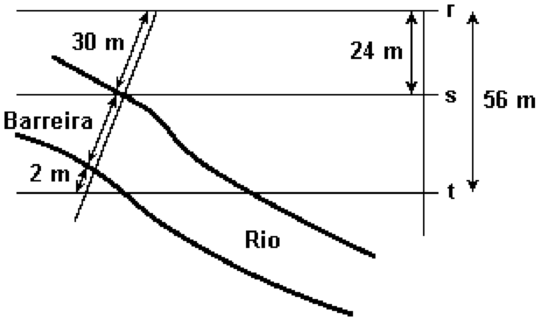
a) 9
b) 10
c) 12
d) 15
e) 16

08) Na figura, temos:



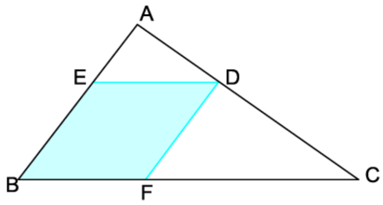
$\overline{AB} \;//\; \overline{CE}$.
AB = 15 cm; AD = 12 cm; CD = 4cm. Obtenha EC

09) (UFSM – RS) A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a figura e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede



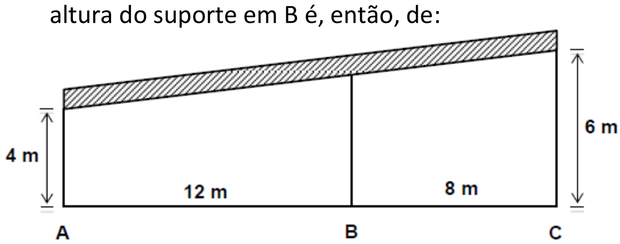
a) 33 m
b) 38 m
c) 43 m
d) 48 m
e) 53 m

10) Considere a figura abaixo.



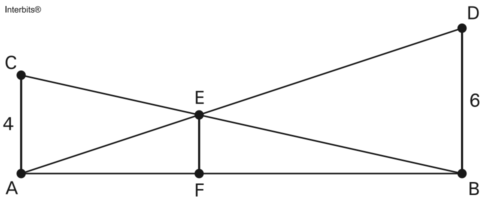
Nela, AB = 8, BC = 12 e BFDE é um losango inscrito no triângulo ABC. A medida do lado do losango é x. Determine o valor de 10x

11) (UFPR – PR) Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos A, B e C, como mostra a figura ao lado. Os suportes nas extremidades A e C medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura. A altura do suporte em B é, então, de:



a) 4,2 metros.
b) 4,5 metros.
c) 5 metros.
d) 5,2 metros.
e) 5,5 metros.

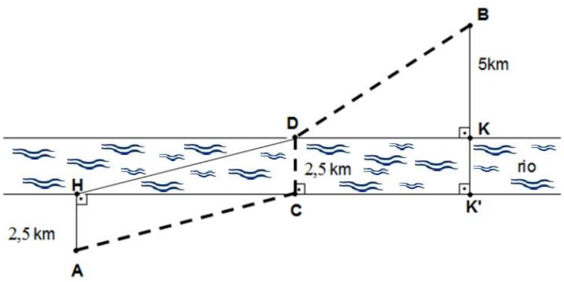
12) (ENEM) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m
b) 2 m
c) 2,4 m
d) 3 m
e) $2\sqrt{6}$ m

13) (UFSC – SC) Duas cidades, marcadas no desenho abaixo como **A** e **B**, estão nas margens retilíneas e opostas de um rio, cuja largura é constante e igual a *2,5 km*, e a distâncias de *2,5 km* e de *5 km*, respectivamente, de cada uma das suas margens. Deseja-se construir uma estrada de **A** até **B** que, por razões de economia de orçamento, deve cruzar o rio por uma ponte de comprimento mínimo, ou seja, perpendicular às margens do rio. As regiões em cada lado do rio e até as cidades são planas e disponíveis para a obra da estrada. Uma possível planta de tal estrada está esboçada na figura abaixo em linha pontilhada:



Considere que, na figura, o segmento **HD** é paralelo a **AC** e a distância **HK'** = *18 km*.
Calcule a que distância, em quilômetros, deverá estar a cabeceira da ponte na margem do lado da cidade **B** (ou seja, o ponto **D**) do ponto **K**, de modo que o percurso total da cidade **A** até a cidade **B** tenha comprimento mínimo.

GABARITO – AULA 06

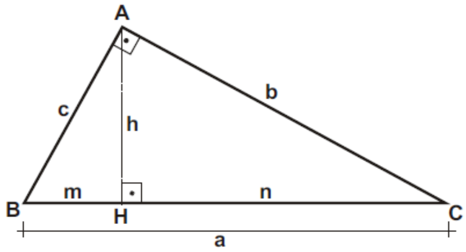
1) 4	**2)** d	**3)** c	**4)** c	**5)** 15	**6)** 08	
7) c	**8)** 5	**9)** b	**10)** 48	**11)** d	**12)** c	**13)** 12

AULA 07

TRIÂNGULO RETÂNGULO
RELAÇÕES MÉTRICAS

Relações Métricas no triângulo retângulo

Considere o triângulo ABC abaixo, retângulo em **A**.



Traçando-se a altura $\overline{AH}$, relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, ficam definidos os seguintes elementos:

BC = a $\rightarrow$ medida da hipotenusa $\overline{BC}$

AC = b $\rightarrow$ medida do cateto $\overline{AC}$

AB = c $\rightarrow$ medida do cateto $\overline{AB}$

AH = h $\rightarrow$ medida da altura relativa à hipotenusa $\overline{BC}$

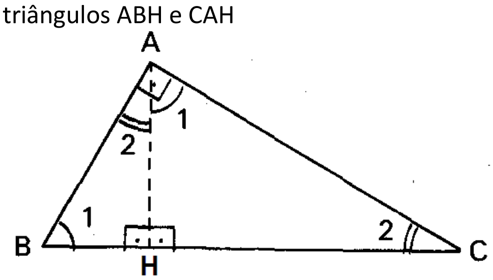
BH = m $\rightarrow$ medida da projeção $\overline{BH}$

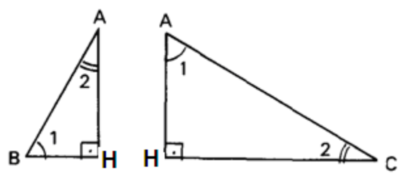
HC = n $\rightarrow$ medida da projeção $\overline{CH}$

Semelhanças

Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo original em dois triângulos semelhantes ao original e por consequência, semelhantes entre si.

Perceba que a altura $\overline{AH}$ separa o triângulo ABC nos triângulos ABH e CAH

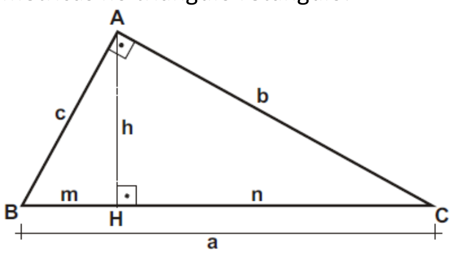




Note que os triângulos ABH e CAH são semelhantes ao triângulo CBA e por consequência, semelhantes entre si.

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta ABH \sim \Delta CBA \\ \Delta CAH \sim \Delta CBA \\ \Delta ABH \sim \Delta CAH\end{array}}$$

Das semelhanças vistas anteriormente e com os elementos já definidos, é possível estabelecer as seguintes relações métricas no triângulo retângulo:



- **Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.**

$$\boxed{\mathbf{h^2 = m.n}}$$

Justificativa:

$$\Delta ABH \sim \Delta CAH \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m.n$$

- **Num triângulo retângulo, o produto das medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos catetos.**

$$\boxed{\mathbf{a.h = b.c}}$$

Justificativa:

$$\Delta ABH \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow a.h = b.c$$

- **Num triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.**

$\boxed{\mathbf{b^2 = a.n}}$ e $\boxed{\mathbf{c^2 = a.m}}$

Justificativa:

$$\Delta ACH \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a.n$$

$$\Delta ABH \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = a.m$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

- **Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.**

$$\boxed{\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}}$$

Justificativa:

$$\Delta ACH \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a.n\,(I)$$

$$\Delta ABH \sim \Delta CBA \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = a.m(II)$$

Fazendo (I) + (II), vem:

$b^2 + c^2 = a.n + a.m$

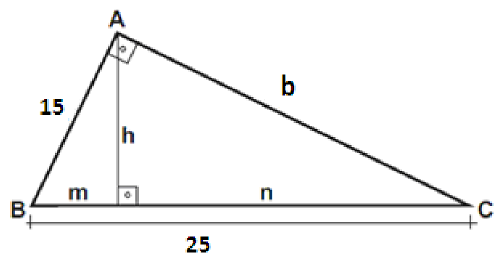
$b^2 + c^2 = a.(n+m)$ Como $n + m = a$, vem:

$b^2 + c^2 = a.a$

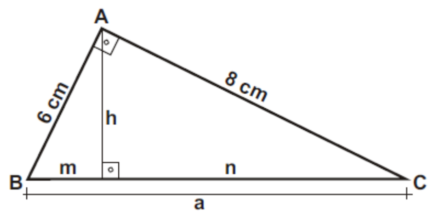
$b^2 + c^2 = a^2$

Exercícios

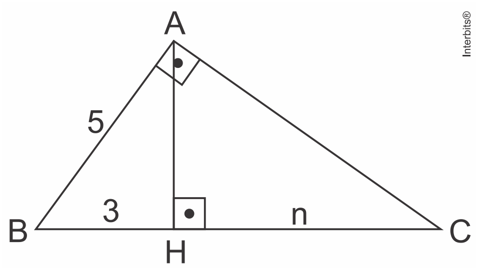
01) No triângulo retângulo da figura abaixo, calcule **b**, **h**, **m** e **n**



02) No triângulo retângulo da figura abaixo, calcule **a**, **m**, **n** e **h**.

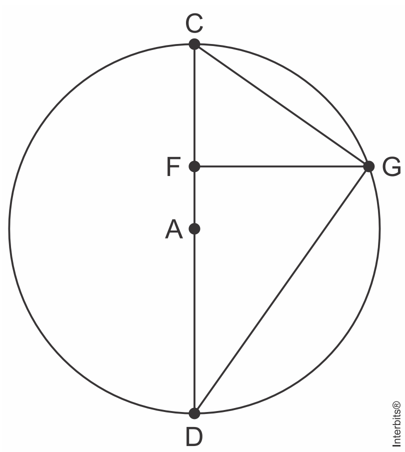


03) Se ABC é um triângulo retângulo em A, o valor de n é



a) $\frac{22}{3}$
b) $\frac{16}{3}$
c) 22
d) 16

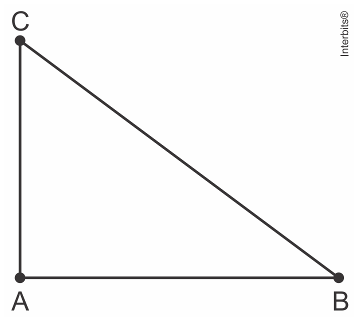
04) (CEFET – MG) Na figura, A é o centro da circunferência, CD é o diâmetro e GF é a altura do triângulo CDG.



Sendo $CG = 3\text{ cm}$ e $DG = 4\text{ cm}$, o segmento AF mede, em centímetros,
a) $0,3$.
b) $0,5$.
c) $0,7$.
d) $0,9$.

05) (CP2) Observe o esquema a seguir, que representa certo trecho do Oceano Atlântico na costa brasileira. Um navio de pesquisas, situado inicialmente no ponto B, deve seguir rumo ao ponto C, em linha reta. Sabe-se que a distância BC é igual a 10 km. No ponto A encontra-se uma ilha e o navio deve parar, na sua trajetória, em um ponto o mais próximo possível dessa ilha, para que uma equipe de biólogos siga em um barco auxiliar a fim de coletar algumas espécies de plantas nativas para análise.

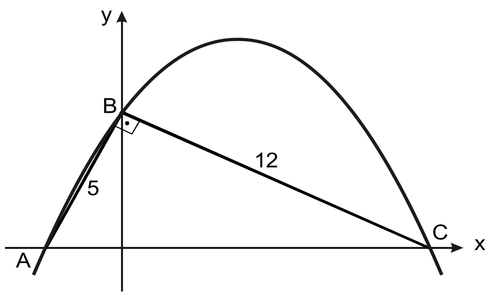
Considere que a região limitada por $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ seja plana e que o ângulo BAC meça $90°$.



Se a distância do navio à ilha, ao iniciar sua trajetória em B, era de 8 km, podemos afirmar que, nesse percurso, a menor distância do navio à ilha será igual a

a) $5,2\text{ km}$.
b) $5,0\text{ km}$.
c) $4,8\text{ km}$.
d) $3,6\text{ km}$.

06) (CEFET – MG) Na figura seguinte, as raízes da equação da parábola expressa por
$y = a(x – x_1)(x – x_2)$, com $a \in \mathbb{R}^*$, são $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$.



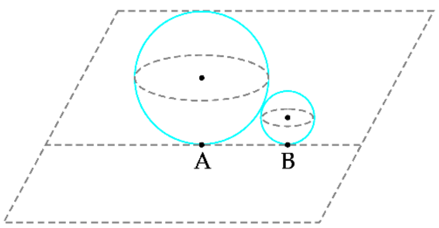
Os valores de **a**, $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ são, respectivamente,

a) $\frac{-13}{60}, \frac{-25}{13}, \frac{144}{13}$
b) $\frac{-1}{60}, \frac{-25}{13}, \frac{144}{13}$
c) $\frac{13}{60}, \frac{25}{13}, \frac{144}{13}$
d) $\frac{1}{60}, \frac{25}{13}, \frac{144}{13}$

07) (UFSC – SC) Assinale no cartão-resposta a soma dos números associados à(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

01. Os catetos de um triângulo retângulo medem 30cm e 50cm. Pelo ponto do menor cateto, que dista 6cm do vértice do ângulo reto, traça-se uma reta paralela à hipotenusa. O menor dos segmentos determinados por essa reta no outro cateto mede 10cm.
02. Uma rampa plana com 10m de comprimento faz um ângulo de 15º com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe inteiramente a rampa eleva-se verticalmente 9,66m. Dados: sen 15º = 0,259; cos 15º = 0,966 e tg 15º = 0,268.
04. Num triângulo isósceles com 24cm de altura e 36cm de base, cada um dos lados iguais mede 60cm.
08. Dois triângulos são semelhantes quando têm os lados correspondentes proporcionais.

08) (FUVEST – SP) No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão é

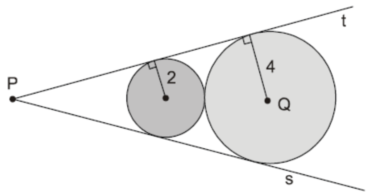


a) 8
b) $6\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{3}$

09) As dimensões de um retângulo são AB = 4m e BC = 2m. O valor da distância AH do vértice A perpendicular à diagonal BD, em metros, é:

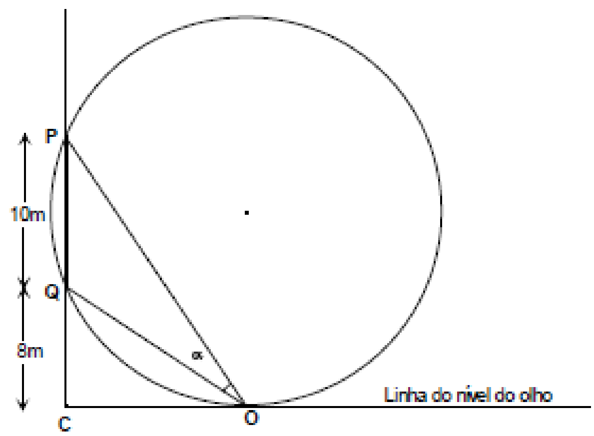
a) $4\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{5}$
c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
d) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$
e) n.d.a.

10) (UFRGS – RS) Observe os discos de raios 2 e 4, tangentes entre si e às semirretas s e t, representados na figura abaixo.



A distância entre os pontos P e Q é
a) 9.
b) 10.
c) 11.
d) 12.
e) 13

11) (UFSC – SC) Em um centro de eventos na cidade de Madri, encontra-se um mural de Joan Miró (1893-1983) confeccionado pelo ceramista Artigas. O mural está colocado no alto da parede frontal externa do prédio e tem 60 m de comprimento por 10 m de altura. A borda inferior do mural está 8 m acima do nível do olho de uma pessoa. A que distância da parede deve ficar essa pessoa para ter a melhor visão do mural, no sentido de que o ângulo vertical que subtende o mural, a partir de seu olho, seja o maior possível? O matemático Regiomontanus (1436-1476) propôs um problema semelhante em 1471 e o problema foi resolvido da seguinte maneira: imagine uma circunferência passando pelo olho O do observador e por dois pontos P e Q, verticalmente dispostos nas bordas superior e inferior do mural. O ângulo α será máximo quando esta circunferência for tangente à linha do nível do olho, que é perpendicular à parede onde se encontra o mural, como mostra a figura. Com estas informações, calcule a que distância OC da parede deve ficar o observador para ter a melhor visão do mural de Joan Miró e apresente o resultado no cartão-resposta.



12) (UFMG) Se as medidas, em metros, das diagonais de um losango são **a** e **b**, então a medida do raio do círculo inscrito nesse losango é, em metros:

a) $\dfrac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

b) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

c) $\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

d) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

e) $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

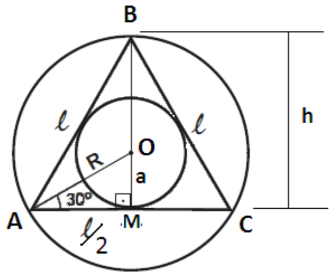
GABARITO – AULA 07

1) b = 20 h = 12 m = 9 n = 16
2) a = 10cm; m = 3,6cm; n = 6,4cm; h = 4,8cm
3) b **4)** c **5)** c **6)** a **7)** 09 **8)** c **9)** d
10) d **11)** 12 **12)** a

AULA 08

POLÍGONOS REGULARES

Triângulo Equilátero



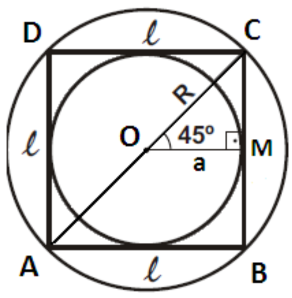
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$a = r = \frac{1}{3}.h$$

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

Quadrado



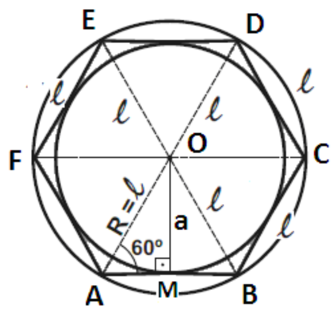
$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$a = r = \frac{\ell}{2}$$

$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$$

$$A = \ell^2$$

Hexágono Regular



$$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \ell$$

$$A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Exercícios

01) (UFSC – SC) No livro *A hora da estrela*, de Clarice Lispector, a personagem Macabéa é atropelada por um veículo cuja logomarca é uma estrela inscrita em uma circunferência, como mostra a figura. Se os pontos *A, B* e *C* dividem a circunferência em arcos de mesmo comprimento e a área do triângulo *ABC* é igual a $27\sqrt{3}\ cm^2$, determine a medida do raio desta circunferência em centímetros.

02) A área de um hexágono regular inscrito em um círculo de $\sqrt{6}$ cm de raio é _____ $\sqrt{3}\ cm^2$.

a) 6
b) 9
c) 12
d) 15

03) Uma circunferência está inscrita em um quadrado cuja diagonal mede $10\sqrt{2}$ cm. O comprimento dessa circunferência é:

a) 10π cm
b) 5π cm
c) 6π cm
d) 8π cm
e) 7π cm

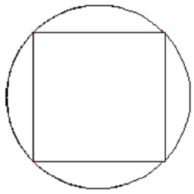
04) Assinale V para as alternativas verdadeiras e F para as Falsas:

a) ( ) (UFSC – SC) Considere um quadrado circunscrito a uma circunferência e um triângulo equilátero inscrito na mesma circunferência. Se o lado do triângulo equilátero mede $6\sqrt{3}\ cm$, então o lado do quadrado mede 12cm

b) ( ) (UFSC – SC) Um quadrado de lado $\frac{5}{\sqrt{2}}$ está inscrito numa circunferência de comprimento 5π..

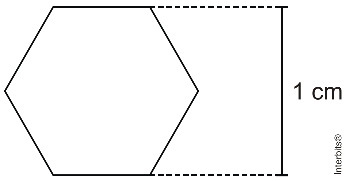
05) (UFSC – SC) Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *12cm* de comprimento e um quadrado em que uma das diagonais coincida com uma das alturas desse triângulo. Nessas condições, determine a área (em cm^2) do quadrado.

06) O comprimento da circunferência abaixo é 16π. A área do quadrado é:



a) 128
b) 256
c) 200
d) 100
e) 220

07) (PUC – RS) Para uma engrenagem mecânica, deseja-se fazer uma peça de formato hexagonal regular. A distância entre os lados paralelos é de 1 cm, conforme a figura abaixo.

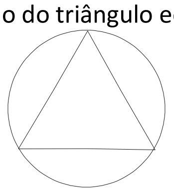


O lado desse hexágono mede ______ cm.

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
e) 1

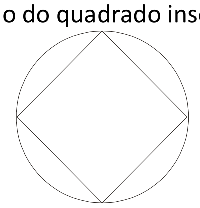
08) Dado uma círculo de raio 10cm. Determine:

a) o lado do triângulo equilátero inscrito nesse círculo

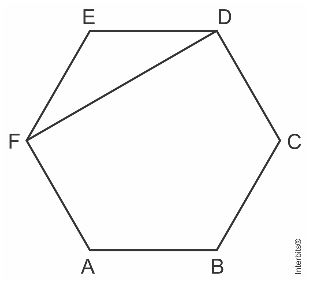


b) o lado do hexágono inscrito nesse círculo

c) o lado do quadrado inscrito nesse círculo



09) (UFRGS – RS) Considere o hexágono regular ABCDEF, no qual foi traçado o segmento FD medindo 6 cm, representado na figura abaixo.



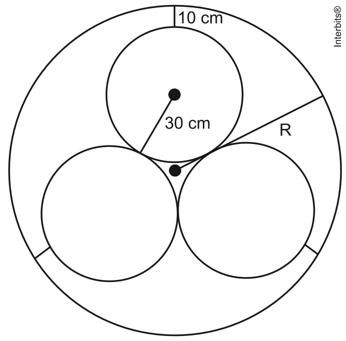
A área do hexágono mede, em cm^2,

a) $18\sqrt{3}$.
b) $20\sqrt{3}$.
c) $24\sqrt{3}$.
d) $28\sqrt{3}$.
e) $30\sqrt{3}$.

10) (UFRGS – RS) O perímetro do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio 3 é:

a) $18\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) 36
d) $15\sqrt{6}$
e) 38

11) (ENEM) Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O valor de R, em centímetros, é igual a

a) 64,0.
b) 65,5.
c) 74,0.
d) 81,0.
e) 91,0.

12) (ENEM) Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida *R* do raio adequado para a plataforma em termos da medida *L* do lado da base da estátua. Qual relação entre *R* e *L* o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

a) $R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$
b) $R \geq \frac{2L}{\pi}$
c) $R \geq \frac{L}{\sqrt{\pi}}$
d) $R \geq \frac{L}{2}$
e) $R \geq \frac{L}{2\sqrt{2}}$

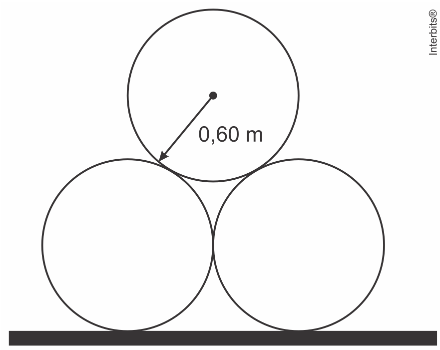
13) (ENEM) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponivel em: www.caminhoes-e-carretas.com.
Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja $0{,}60\text{ m}$ e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a $1{,}30\text{ m}$ do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, $0{,}50\text{ m}$ menor do que a altura do vão do viaduto.
Considere $1{,}7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

a) $2{,}82$
b) $3{,}52$
c) $3{,}70$
d) $4{,}02$
e) $4{,}20$

GABARITO – AULA 08

1) 06 **2)** b **3)** a
4) a) V b) V **5)** 54 **6)** a **7)** b
8) a) $10\sqrt{3}$ b) 10 c) $10\sqrt{2}$
9) a **10)** a **11)** c **12)** a **13)** d

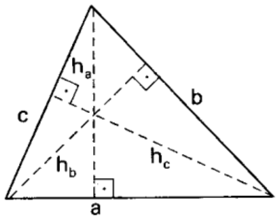
AULAS 09 e 10

ÁREA DE FIGURAS PLANAS I

ÁREA DE TRIÂNGULOS

Área em função de um lado e da altura relativa a ele.

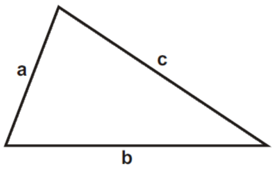
A área de um triângulo é o semiproduto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base.



$$\boxed{A_\Delta = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_B}{2} = \frac{c.h_C}{2}}$$

Área de um triângulo em função das medidas dos lados. (Fórmula de Herão)

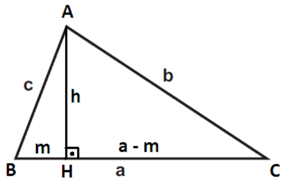
Sendo **a**, **b** e **c** as medidas dos lados do triângulo ABC de área **A**, temos:



$$\boxed{A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

onde $\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$ é o semiperímetro.

Justificativa:



Inicialmente vamos calcular a altura **h** relativa ao lado **a**.
Aplicando o Teorema de Pitágoras, nos triângulos AHB e AHC, temos:

$h^2 + m^2 = c^2 \rightarrow \boxed{h^2 = c^2 - m^2}$ (I)

$h^2 + (a-m)^2 = b^2 \rightarrow \boxed{h^2 = b^2 - (a-m)^2}$ (II)

De (I) e (II) vem:

$c^2 - m^2 = b^2 - (a-m)^2$

$c^2 - m^2 = b^2 - a^2 + 2am - m^2$

$\boxed{m = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}}$ (III)

Substituindo (III) em (I), temos:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2$$

$$h^2 = c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}$$

$$4a^2h^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$$

Veja que o segundo membro da igualdade é uma diferença de dois quadrados, logo:

$$4a^2h^2 = (2ac + a^2 - b^2 + c^2).(2ac - a^2 + b^2 - c^2)$$

$$4a^2h^2 = (a^2 + 2ac + c^2 - b^2).(-a^2 + 2ac - c^2 + b^2)$$

$$4a^2h^2 = [(a+c)^2 - b^2].[b^2 - (a-c)^2]$$

Novamente fatorando as diferenças de dois quadrados, vem:

$$4a^2h^2 = (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$$

Fazendo $a+b+c = 2p$ onde p é o semiperímetro, vem:

$$4a^2h^2 = 2p(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)$$

$$4a^2h^2 = 16p(p-b)(p-c)(p-a)$$

$$4a^2h^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

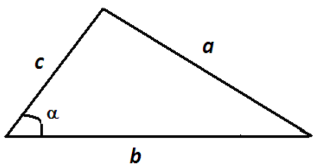
$$2ah = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

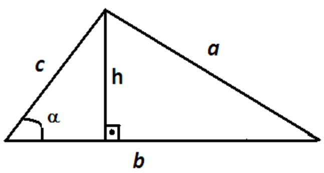
1.3) Área de um triângulo em função das medidas de dois lados e o ângulo formado entre eles.

A área de um triângulo qualquer ABC é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado entre eles.



$$\boxed{A = \frac{b.c}{2}.sen\alpha}$$

Justificativa:



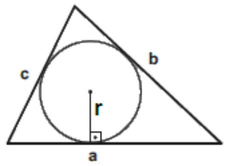
$$A = \frac{b.h}{2} \quad (I)$$

$$sen\ \alpha = \frac{h}{c} \rightarrow h = c.sen\ \alpha \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), vem: $A = \frac{b.c.}{2}.sen\alpha$

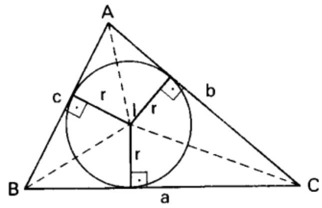
Área de um triângulo em função do raio da circunferência inscrita

Sendo **p** o semiperímetro do triângulo e **r** o raio da circunferência inscrita no triângulo, sua área **A** pode ser calculada por:



$$\boxed{A = p.r}$$

Justificativa:



$$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta BIC} + A_{\Delta AIC} + A_{\Delta AIB}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{a.h}{2} + \frac{b.h}{2} + \frac{c.h}{2}$$

$$A_{\Delta ABC} = h\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

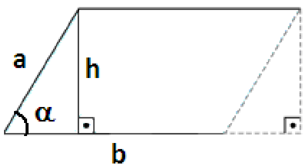
$$A_{\Delta ABC} = p.a$$

IMPORTANTE: A Mediana de um triângulo divide-o em dois triângulos de mesma área.

ÁREA DE QUADRILÁTEROS

Área do Paralelogramo

A área **A** de um paralelogramo é dada pelo produto da medida da base **b** pela medida da altura **h** relativa a essa base.

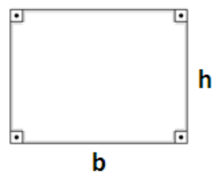


$$\boxed{A = b.h}$$

Observação: Podemos calcular a área **A** do paralelogramo acima também pela expressão: $\boxed{A = b.a.sen\alpha}$

Área do Retângulo

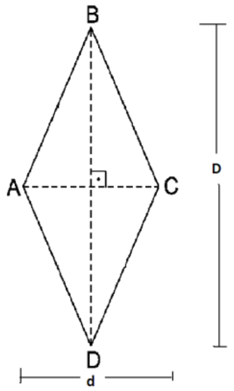
A área **A** de um retângulo é dada pelo produto da medida da base **b** pela medida da altura **h** relativa a essa base.



$$\boxed{A = b.h}$$

Área do Losango

A área **A** de um losango é igual ao semiproduto das medidas das suas diagonais.



$$\boxed{A = \frac{D.d}{2}}$$

Lembre-se de que as diagonais do losango se interceptam nos seus respectivos pontos médios.
Podemos então, dizer que a área do losango é a soma das áreas dos triângulos ABD e BDC, ou seja:

$$A_{Losango} = \frac{D.{}^{d}\!/_{2}}{2} + \frac{D.{}^{d}\!/_{2}}{2}$$

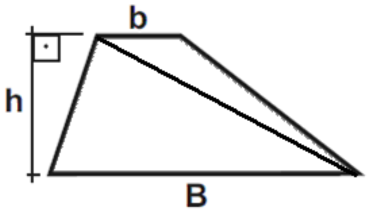
$$\therefore A_{Losango} = \frac{D.d}{2}$$

Área do Trapézio

A área de qualquer trapézio é dada pela expressão:

$$\boxed{A = \frac{(\text{Base Maior} + \text{Base Menor}).\text{Altura}}{2}}$$

Entenda Base Maior, Base Menor e Altura na expressão acima como a medida de cada um dos segmentos.



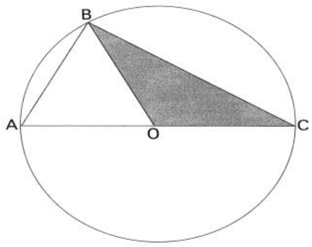
$\therefore$

Exercícios

01) Seja ABC um triângulo isósceles onde $AB = AC = 10cm$ e $BC = 12cm$. Determine:

a) A área desse triângulo
b) A altura relativa ao lado AC

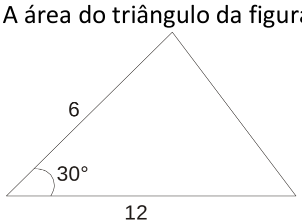
02) (UFSC – SC) O triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de centro O, cujo diâmetro mede 10cm. Se a corda AB mede 6cm, então a área sombreada, em centímetros quadrados, é:



03) Seja um triângulo de lados a = 5cm, b = 6cm e c = 7cm. Determine:

a) A área do triângulo.
b) O raio da circunferência inscrita no triângulo.

04) A área do triângulo da figura, é:



a) 18
b) 9
c) 10
d) 36
e) 40

05) Calcule a área dos quadriláteros em cada situação abaixo:

a) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem $2\sqrt{3}$ cm e 5cm, respectivamente, e formam um ângulo de 60°. A área desse paralelogramo, em cm^2, é igual a:
b) Obter a área de um losango de lado 12 cm, sendo que um de seus ângulos internos mede 60°.
c) Obter a área de um trapézio isósceles de bases 20cm e 12cm e lados não paralelos iguais a 5cm.

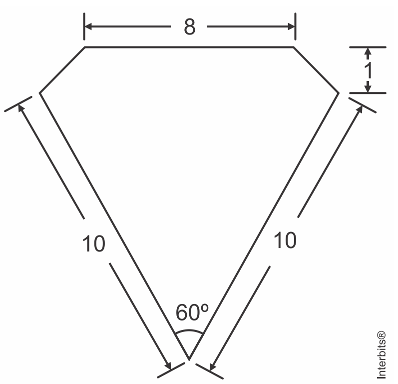
06) (FGV – SP) Num triângulo isósceles, os lados de mesma medida medem 2 e o ângulo formado por eles mede 120°. A área desse triângulo é:

a) 2
b) 1
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\sqrt{3}$

07) Qual é a área de um triângulo de lados a = 8cm, b = 15cm e c = 17cm?

a) 60 cm²
b) 80 cm²
c) 90 cm²
d) 120cm²
e) 100 cm²

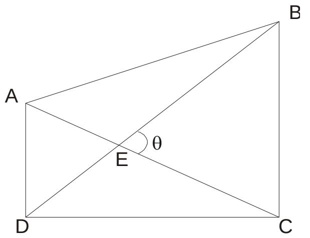
08) (UFRGS – RS) O emblema de um super-herói tem a forma pentagonal, como representado na figura abaixo.



A área do emblema é

a) $9 + 5\sqrt{3}.$
b) $9 + 10\sqrt{3}.$
c) $9 + 25\sqrt{3}.$
d) $18 + 5\sqrt{3}.$
e) $18 + 25\sqrt{3}.$

09) (FUVEST – SP) Na figura seguinte, E é o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero ABCD e θ é o ângulo agudo BÊC. Se EA = 1, EB = 4, EC = 3 e ED = 2, então a área do quadrilátero ABCD será:



a) 12 sen θ
b) 8 sen θ
c) 6 sen θ
d) 10 sen θ
e) 8 sen θ

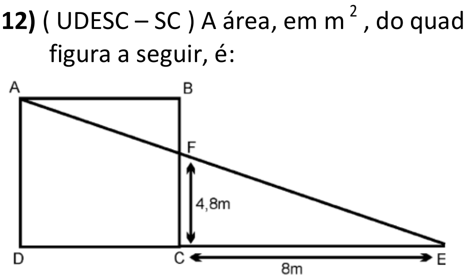
10) Determine a soma dos números associados ás proposições VERDADEIRAS:

01. A base de um triângulo mede 132m e sua altura, em metros, é h. Se a base é aumentada em 22m e altura, em 55m obtém-se um novo triângulo cuja área é o dobro da área do primeiro. Sendo assim, o valor de h é 77m.
02. Num triângulo isósceles, os lados de mesma medida medem 2 e o ângulo formado por eles mede 120°. A área desse triângulo é $\sqrt{3}$
04. O raio da circunferência inscrita num triângulo de lados 5, 12 e 13 é 2.
08. Um triângulo retângulo tem hipotenusa igual 5 cm e os catetos medindo um o dobro do outro. É CORRETO afirmar que a medida de sua área em cm^2 é 5.

11) (UEL – PR) Considere todos os triângulos que têm dois lados de medida 2cm, formando um ângulo de medida x graus. O menor valor de x para o qual a área do triângulo é igual a $\sqrt{3}$ cm^2 é:

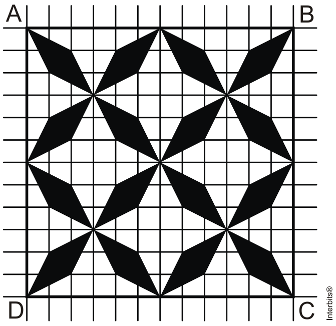
a) 30
b) 45
c) 60
d) 75
e) 90

12) (UDESC – SC) A área, em m^2, do quadrado ABCD, da figura a seguir, é:



a) 100.
b) 144.
c) 169.
d) 128.
e) 112.

13) (IBMEC – RJ) O mosaico da figura adiante foi desenhado em papel quadriculado 1×1. A razão entre a área da parte escura e a área da parte clara, na região compreendida pelo quadrado ABCD, é igual a



a) $\frac{1}{2}$.

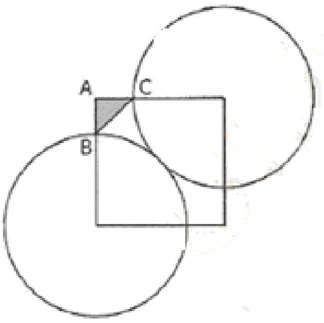
b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{3}{5}$.

d) $\frac{5}{7}$.

e) $\frac{5}{8}$.

14) (UFRGS – RS) Dois círculos tangentes e de mesmo raio têm seus respectivos centros em vértices opostos de um quadrado, como mostra a figura abaixo.



Se a medida do lado do quadrado é 2, então a área do triângulo ABC mede

a) $3 - 2\sqrt{2}$

b) $6 - 4\sqrt{2}$

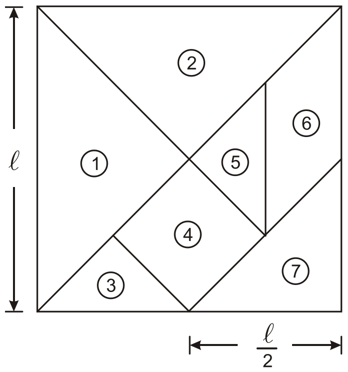
c) $12 - 4\sqrt{2}$

d) $\pi(3 - 2\sqrt{2})$

e) $\pi(6 - 4\sqrt{2})$

15) (UFSC – SC) Calcule a área, em *cm*^{2}, de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede *10 cm* e cujo raio da circunferência inscrita mede *1 cm*. A seguir, assinale a resposta obtida no cartão-resposta.

16) (UFRGS – RS) O tangran é um jogo chinês formado por uma peça quadrada, uma peça em forma de paralelogramo e cinco peças triangulares, todas obtidas a partir de um quadrado de lado ℓ, como indica a figura a seguir.



Três peças do tangran possuem a mesma área. Essa área é

a) $\frac{\ell^2}{16}$.

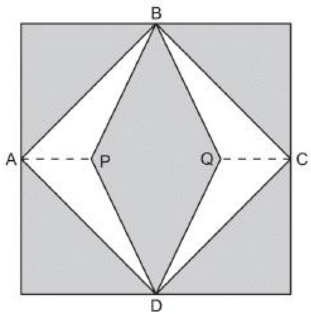
b) $\frac{\ell^2}{12}$.

c) $\frac{\ell^2}{8}$.

d) $\frac{\ell^2}{6}$.

e) $\frac{\ell^2}{4}$.

17) (ENEM) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



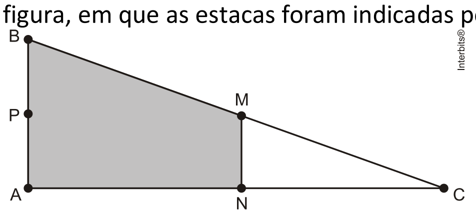
Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.
De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50

b) R$ 35,00

c) R$ 40,00
d) R$ 42,50
e) R$ 45,00

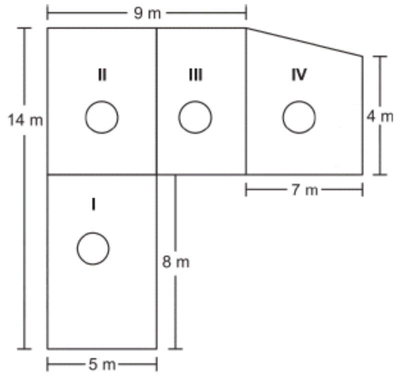
18) (ENEM) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.
Nessas condições, a área a ser calcada corresponde
a) a mesma área do triângulo AMC.
b) a mesma área do triângulo BNC.
c) a metade da área formada pelo triângulo ABC.
d) ao dobro da área do triângulo MNC.
e) ao triplo da área do triângulo MNC.

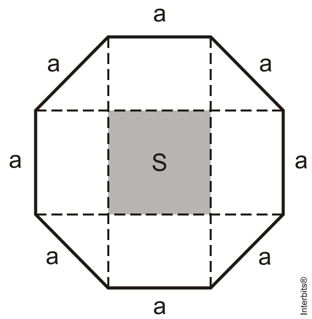
19) (FGV – SP) Três irmãos receberam de herança um terreno plano com a forma de quadrilátero convexo de vértices A, B, C e D, em sentido horário. Ligando os vértices B e D por um segmento de reta, o terreno fica dividido em duas partes cujas áreas estão na razão $2:1$, com a parte maior demarcada por meio do triângulo ABD. Para dividir o terreno em áreas iguais entre os três irmãos, uma estratégia que funciona, independentemente das medidas dos ângulos internos do polígono ABCD, é fazer os traçados de $\overline{BD}$ e $\overline{DM}$, sendo
a) M o ponto médio de $\overline{AB}$.
b) M o ponto que divide $\overline{AB}$ na razão $2:1$.
c) M a projeção ortogonal de D sobre $\overline{AB}$.
d) $\overrightarrow{DM}$ a bissetriz de $A\hat{D}B$.
e) $\overleftrightarrow{DM}$ a mediatriz de $\overline{AB}$.

20) (ENEM) Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m^2 de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m^2 de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



Avaliando-se todas as informações, serão necessários
a) quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
b) três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
c) duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
d) uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
e) nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

21) (INSPER) As disputas de MMA (Mixed Martial Arts) ocorrem em ringues com a forma de octógonos regulares com lados medindo um pouco menos de 4 metros, conhecidos como “Octógonos”. Medindo o comprimento exato de seus lados, pode-se calcular a área de um “Octógono” decompondo-o, como mostra a figura a seguir, em um quadrado, quatro retângulos e quatro triângulos retângulos e isósceles.

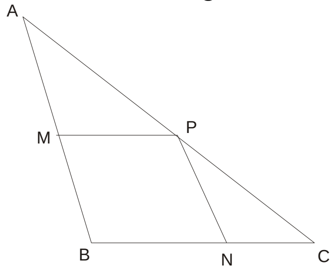


A medida do lado do quadrado destacado no centro da figura é igual à medida a do lado do “Octógono”. Se a área desse quadrado é S, então a área do “Octógono” vale

a) $S(2\sqrt{2}+1)$.
b) $S(\sqrt{2}+2)$.
c) $2S(\sqrt{2}+1)$.
d) $2S(\sqrt{2}+2)$.

e) $4S(\sqrt{2}+1)$.

22) (FUVEST – SP) No triângulo ABC, AB = 20cm, BC = 5cm e o ângulo ABC é obtuso. O quadrilátero MBNP é um losango de área 8cm^2



A medida, em graus, do ângulo BNP é:

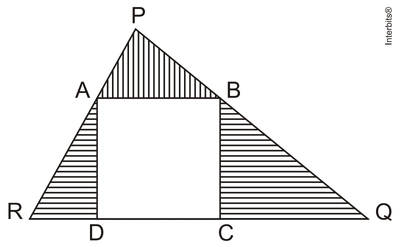
a) 15
b) 30
c) 45
d) 60
e) 75

23) (ACAFE – SC) Analise as proposições abaixo e classifique-as em V - verdadeiras ou F - falsas.

( ) O triângulo ABC é equilátero e seu perímetro é 12cm. Sabendo que temos uma circunferência inscrita e outra circunscrita ao triângulo ABC, então, a razão entre a área da circunferência inscrita e a área da circunferência circunscrita é $\frac{1}{4}$.

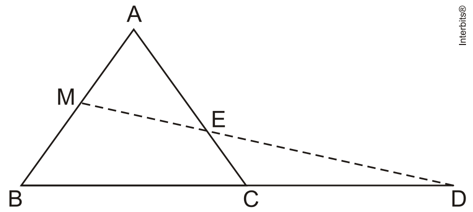
( ) Uma das diagonais de um quadrado está contida na reta $x-y-4=0$. Sabendo que a reta suporte da outra diagonal passa pelo ponto de coordenadas $(5,-3)$, pode-se concluir que o perímetro desse quadrado, em unidades de comprimento, é igual a $16\sqrt{2}$.

( ) Na figura abaixo, ABCD, é um quadrado inscrito num triângulo PRQ. Sendo $\overline{RQ}=36\text{cm}$ e a altura relativa a essa base igual a 24cm, então, a área da região hachurada vale, aproximadamente, 225cm^2.



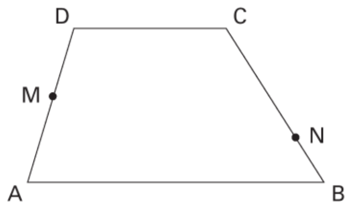
A sequência **correta**, de cima para baixo, é:
a) V - V - F
b) V - F - V
c) V - F - F
d) F - F - V

24) O triângulo da figura abaixo é equilátero, $\overline{AM}=\overline{MB}=5$ e $\overline{CD}=6$. A área do triângulo MAE vale



a) $\frac{200\sqrt{3}}{11}$
b) $\frac{100\sqrt{3}}{11}$
c) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{200\sqrt{2}}{11}$
e) $\frac{200\sqrt{2}}{2}$

25) (FUVEST – SP) No trapézio ABCD, M é o ponto médio do lado AD; N está sobre o lado BC e 2BN = NC. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros ABNM e CDMN são iguais e que DC = 10. Calcule AB.



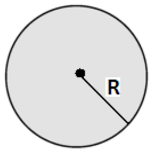
GABARITO – AULAS 09 E 10

1) a) 48 cm^2 b) 9,6cm
2) 12
3) a) $6\sqrt{6}$ cm^2 b) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$cm
4) a
5) a) 15cm^2 b) $72\sqrt{3}$ cm^2 c) 48cm^2
6) e **7)** a **8)** c **9)** a
10) 15 **11)** c **12)** b **13)** a **14)** a **15)** 11 **16)**c
17) b **18)** e **19)** a **20)** c **21)** c **22)** b **23)**b
24)b **25)** 20

AULA 11

ÁREA DE FIGURAS PLANAS III

1. Círculo



Denomina-se círculo à reunião de uma circunferência com seus pontos interiores.
Na figura acima, temos um círculo de centro O e raio R.

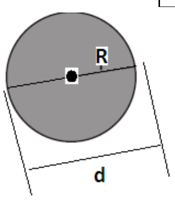
Área de um círculo

A área do círculo é o produto do número π pelo quadrado do raio.

$$\boxed{A = \pi . R^2}$$

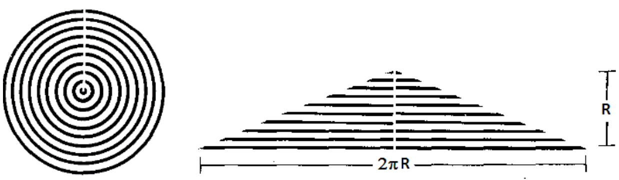
Vale lembrar que π é o número irracional que representa a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

$\boxed{\pi = 3,14159265....}$

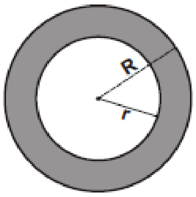


Assim, temos: $\frac{C}{d} = \pi \to C = d.\pi \to$ $\boxed{C = 2\pi R}$

A igualdade acima é a fórmula que dá o comprimento de uma circunferência de raio R.
Observação: Perceba que a área do círculo é análoga à área de uma região triangular. A figura abaixo dá uma boa ideia disso.

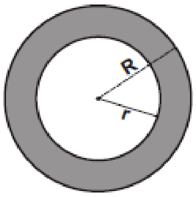


2. Coroa Circular



Considere dois círculos concêntricos de raios R e r com R > r. Denomina-se coroa circular a intersecção da região interna do círculo de raio R com a região externa do círculo de raio r.

Área de uma coroa circular

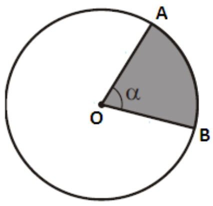


A área da coroa circular é calculada assim:

$A = \pi R^2 - \pi r^2$

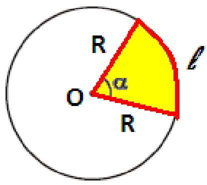
Logo: $\boxed{A = \pi\left(R^2 - r^2\right)}$

3. Setor Circular



Denomina-se setor circular a intersecção de uma região circular com um ângulo que tenha seu vértice no interior do círculo.

Área de um setor circular



1) Conhecendo α em graus:

$$\begin{cases} 360° - \pi R^2 \\ \alpha - A_{setor} \end{cases} \Rightarrow \qquad \boxed{A = \frac{\alpha \pi . R^2}{360°}}$$

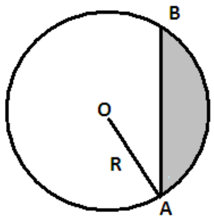
2) Conhecendo α em radianos:

$$\begin{cases} 2\pi rad - \pi R^2 \\ \alpha rad - A_{setor} \end{cases} \Rightarrow \qquad \boxed{A = \frac{\alpha R^2}{2}}$$

3) Conhecendo o comprimento do arco ℓ

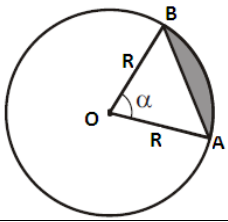
$$\begin{cases} 2\pi R - \pi R^2 \\ \ell - A_{setor} \end{cases} \Rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{A = \frac{\ell R}{2}}}$$

4. Segmento Circular



Denomina-se segmento circular qualquer uma das partes que um círculo fica fracionado por uma corda qualquer.

Área de um segmento circular



$$\boxed{\mathbf{A_{segmento} = A_{setor} - A_{\Delta AOB}}}$$

Dica: A área do triângulo AOB pode ser calculada pela fórmula vista na aula 8:

$$\boxed{A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\alpha}$$

Aplicando essa fórmula no triângulo indicado, vem:

$$\boxed{A = \frac{R^2}{2}.\text{sen}\alpha}$$

Exercícios

01) (ENEM) Em uma plataforma de exploração de petróleo, localizada no mar, ocorreu um vazamento. A equipe técnica de operação dessa plataforma percebeu que a mancha de óleo espalhado na superfície do mar tinha formato circular e estimou, visualmente, que a área atingida era de aproximadamente $100\ \text{km}^2$.

Utilize 3 como aproximação para π.

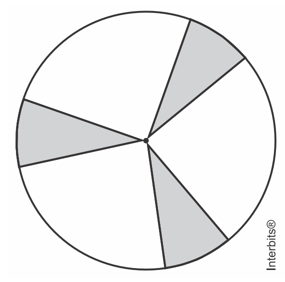
O valor inteiro mais próximo do raio da mancha de óleo formada, em km, é

a) 4.
b) 6.
c) 10.
d) 17.
e) 33.

02) Se o raio de um círculo cresce 30%, sua área cresce:

a) 30%
b) 30,4%
c) 40%
d) 69%
e) 169%

03) (PUC – RS) Uma pracinha com formato circular ocupa uma área de $100\pi\ \text{m}^2$. No terreno dessa área, foram colocados 3 canteiros em forma de setor circular, cada um formado por um ângulo central de $30°$, como na figura. A área total ocupada pelos canteiros é, em m^2,

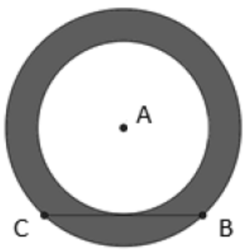


a) π
b) 3π
c) 25π
d) 50π
e) 75π

04) (UEL – PR) Com a crise nas penitenciárias brasileiras decorrentes das rebeliões simultâneas em várias instituições, houve discussões sobre o uso de bloqueadores de celulares. "O princípio do bloqueio é gerar um sinal, por meio de uma antena instalada internamente no presídio, que interfere na freqüência da rede celular e que seja mais forte do que o sinal da operadora" Fonte: Eduardo Neger em entrevista publicada por IDG NOW! www.idgnow.com.br em 16/05/06. Acesso em 20/07/2006.
A dificuldade, porém, está em evitar que o bloqueio extrapole a área do presídio. Supondo um determinado presídio inteiramente contido em um círculo com raio de 500 m, no qual a antena para o bloqueio esteja instalada no centro deste círculo e o bloqueio de celulares extrapole este círculo em 10% do raio, assinale qual a alternativa que corresponde à área indevidamente bloqueada fora deste círculo:

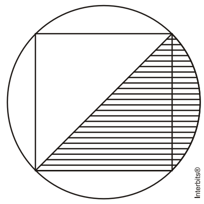
a) 52.000 π m²
b) 52.500 π m²
c) 53.000 π m²
d) 53.500 π m²
e) 54.000 π m²

05) (ACAFE – SC) A figura apresentada representa um projeto de construção de uma calçada que limitará um jardim, no formato de uma coroa circular, ou seja, esta calçada é limitada por duas circunferências concêntricas em A. Nessa figura a calçada está representada em cinza. A única informação dada ao construtor é que a distância BC é igual a 10 m, e que o segmento BC é tangente à circunferência de raio menor.



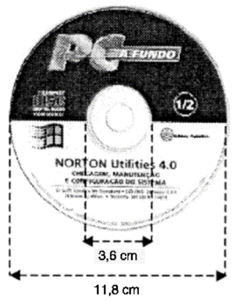
Dessa maneira, é **correto** afirmar que a área da calçada a ser construída é:
a) um valor entre 25 m² e 50 m².
b) um valor entre 50 m² e 100 m².
c) menor que 25 m².
d) um valor maior que 100 m².

06) (ACAFE – SC) Na figura abaixo, o quadrado está inscrito na circunferência. Sabendo que a medida do lado do quadrado é 8cm, então, a área da parte hachurada, em cm², é igual a:

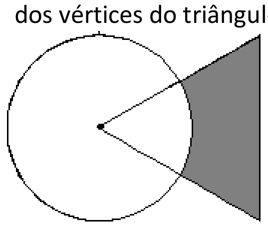


a) $4(\pi+2)$.
b) $8(\pi+4)$.
c) $8(\pi+2)$.
d) $4(\pi+4)$.

07) (UFMT) A etiqueta do CD mostrado na figura tem a forma de uma coroa circular cujo diâmetro da circunferência externa mede 11,8 cm e da circunferência interna 3,6 cm. Considerando π= 3,14, determine o número inteiro mais próximo da medida (em cm²) da área da etiqueta.



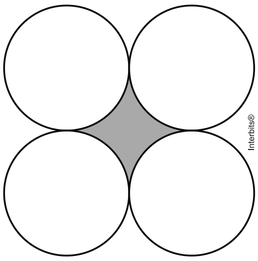
08) (UDESC – SC) Uma circunferência intercepta um triângulo eqüilátero nos pontos médios de dois de seus lados, conforme mostra a **Figura**, sendo que um dos vértices do triângulo é o centro da circunferência



Se o lado do triângulo mede 6 cm, a área da região destacada na **Figura** é:

a) $9(2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6})$ cm²
b) $9(\sqrt{3}-\frac{\pi}{18})$ cm²
c) $9(\sqrt{3}-\pi)$ cm²
d) $9(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$ cm²
e) $9(\sqrt{3}-\frac{\pi}{6})$ cm²

09) (UFRGS – RS) Os círculos desenhados na figura ao lado são tangentes dois a dois.

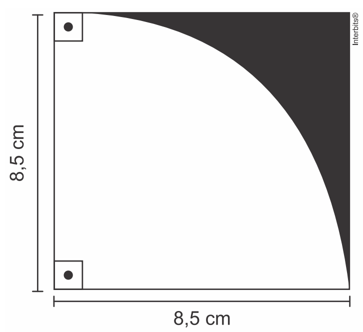


A razão entre a área de um círculo e a área da região sombreada é

a) 1.
b) 2.
c) $\dfrac{3}{4-\pi}$.
d) $\dfrac{\pi}{4-\pi}$.
e) $\dfrac{2\pi}{4-\pi}$.

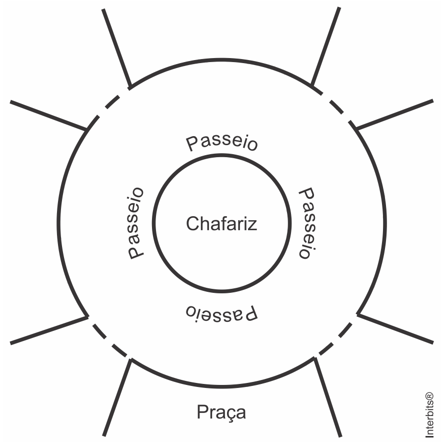
10) Brincando de construir circunferências e quadrados, Antônio construiu uma figura semelhante à que está representada abaixo. A área pintada dessa figura corresponde a quantos por cento da área total do quadrado?

Considere $\pi = 3{,}14$

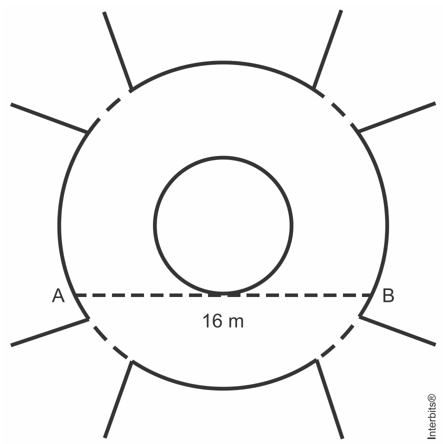


a) $15{,}53\%$
b) $17{,}00\%$
c) $21{,}50\%$
d) $33{,}40\%$
e) $34{,}00\%$

11) (ENEM) A figura mostra uma praça circular que contém um chafariz em seu centro e, em seu entorno, um passeio. Os círculos que definem a praça e o chafariz são concêntricos.



O passeio terá seu piso revestido com ladrilhos. Sem condições de calcular os raios, pois o chafariz está cheio, um engenheiro fez a seguinte medição: esticou uma trena tangente ao chafariz, medindo a distância entre dois pontos A e B, conforme a figura. Com isso, obteve a medida do segmento de reta AB = 16m

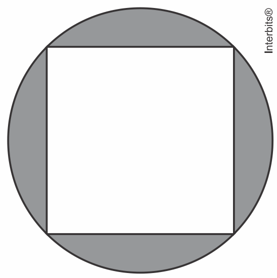


Dispondo apenas dessa medida, o engenheiro calculou corretamente a medida da área do passeio, em metro quadrado.

A medida encontrada pelo engenheiro foi

a) 4π
b) 8π
c) 48π
d) 64π
e) 192π

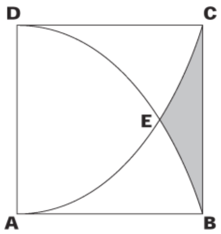
12) (ENEM) Um arquiteto deseja construir um jardim circular de 20 m de diâmetro. Nesse jardim, uma parte do terreno será reservada para pedras ornamentais. Essa parte terá a forma de um quadrado inscrito na circunferência, como mostrado na figura. Na parte compreendida entre o contorno da circunferência e a parte externa ao quadrado, será colocada terra vegetal. Nessa parte do jardim, serão usados 15 kg de terra para cada m^2. A terra vegetal é comercializada em sacos com exatos 15 kg cada. Use 3 como valor aproximado para π.



O número mínimo de sacos de terra vegetal necessários para cobrir a parte descrita do jardim é

a) 100.
b) 140.
c) 200.
d) 800.
e) 1.000.

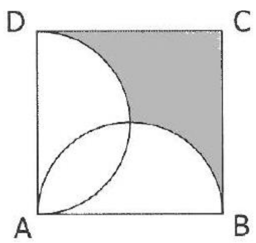
13) (FUVEST – SP) Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1.



Logo, a área da região hachurada é:

a) $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
b) $1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

14) (UFRGS – RS) Observe a figura abaixo:



No quadrado ABCD de lado 2, os lados AB e BC são diâmetros dos semicírculos. A área da região sombreada é:

a) $3 - \frac{\pi}{4}$
b) $4 - \frac{\pi}{2}$
c) $3 - \pi$
d) $4 - \pi$
e) $3 - \frac{\pi}{2}$

GABARITO – AULA 11

1) b	**2)** d	**3)** c	**4)** b	**5)** b	**6)** c
7) 99	**8)** e	**9)** d	**10)** c	**11)** d	**12)** a
13) c	**14)** e				