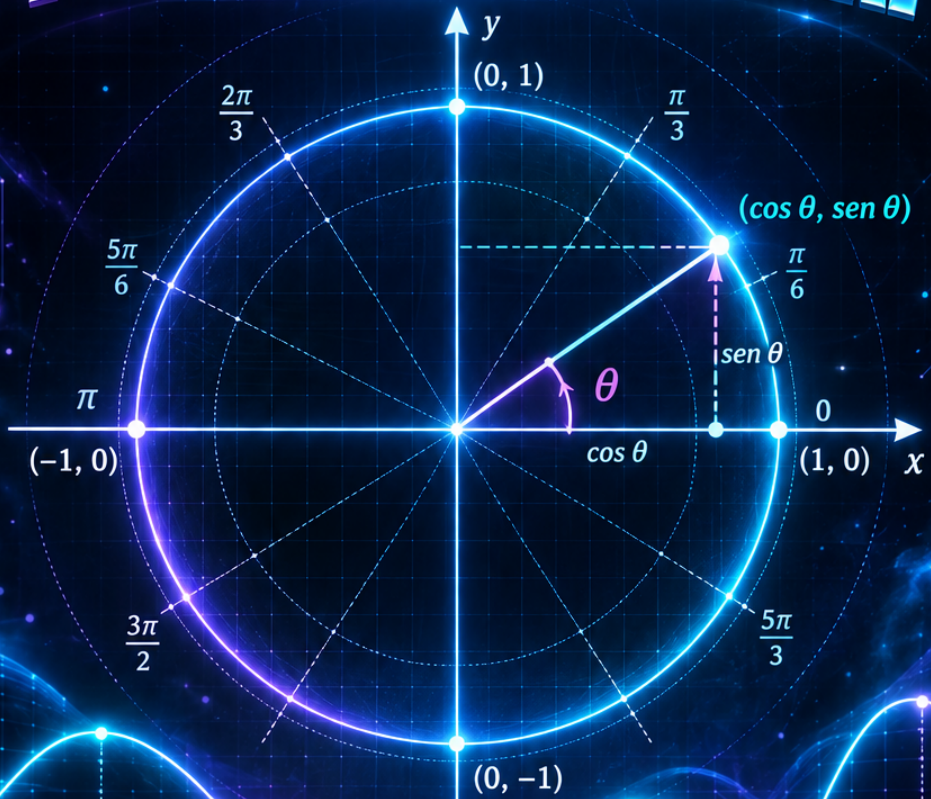


TRIGONOMETRIA





TRIGONOMETRIA

SUMÁRIO

Professor Ricardinho



AULA

01

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO



AULA

02

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER



AULA

03

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA



AULA

04

SENO E COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO



AULA

05

RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA - EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



AULA

06

TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO



AULA

07

SECANTE, COSSECANTE E COTANGENTE



AULA

08

OPERAÇÃO COM ARCOS



AULA

09

ARCO DUPLO



AULA

10

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

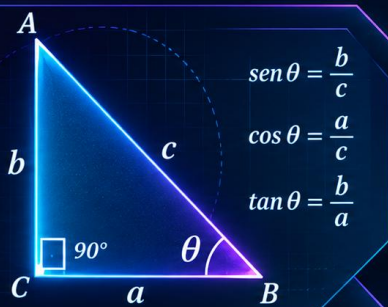


AULA

11

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS - APLICAÇÕES





TRIGONOMETRIA

AULA 01

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

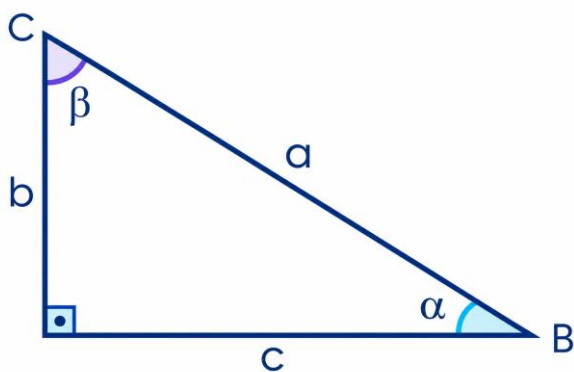


ASSISTA À AULA



Razões Trigonométricas no triângulo retângulo

Inicialmente, considere o triângulo retângulo ABC



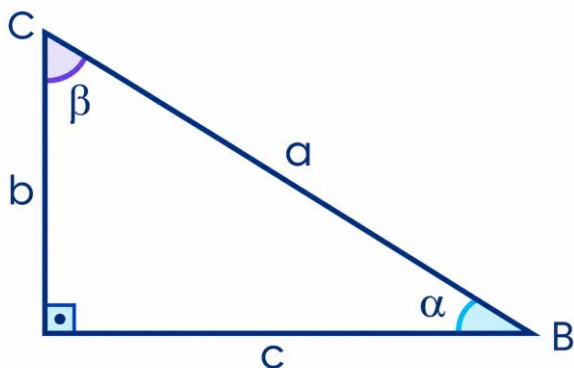
Nesse triângulo podemos destacar os seguintes elementos:

- **b** e **c** são os catetos
- **a** é a hipotenusa
- **α** e **β** são os ângulos agudos

Pelo teorema angular de Thales prova-se que os ângulos agudos são complementares, ou seja:
 $\alpha + \beta = 90^\circ$

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS:

Seja o triângulo retângulo abaixo:



● **SENO:** $\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$

seno de um ângulo agudo é o quociente entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

● **COSSENO:** $\text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$

cosseno de um ângulo é o quociente entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

● **TANGENTE:** $\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$

tangente de um ângulo é o quociente entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.

Razões trigonométricas dos ângulos de 30° , 45° e 60°

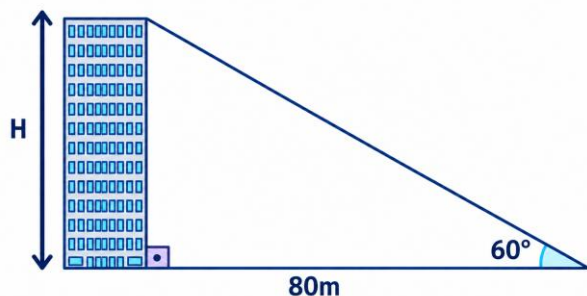
As razões trigonométricas dos ângulos de 30° , 45° e 60° são usadas com frequência.

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



EXEMPLO

Determinar a altura do edifício da figura abaixo:



Resolução:

H é o cateto oposto ao ângulo de 60° e 80 é o cateto adjacente do ângulo de 60° . Logo:

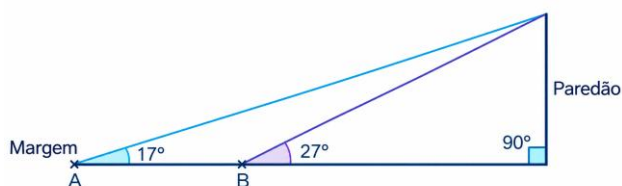
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{80}$$

$$\sqrt{3} = \frac{H}{80}$$

$$\therefore H = 80\sqrt{3}\text{m}$$

EXEMPLO

(IFPE – PE) Os alunos pré-egressos do campus Jaboatão dos Guararapes resolveram ir até a Lagoa Azul para celebrar a conclusão dos cursos. Raissa, uma das participantes do evento, ficou curiosa pra descobrir a altura do paredão rochoso que envolve a lagoa. Então pegou em sua mochila um transferidor e estimou o ângulo no ponto A, na margem onde estava, e, após nadar, aproximadamente, 70 metros em linha reta em direção ao paredão, estimou o ângulo no ponto B, conforme mostra a figura a seguir:

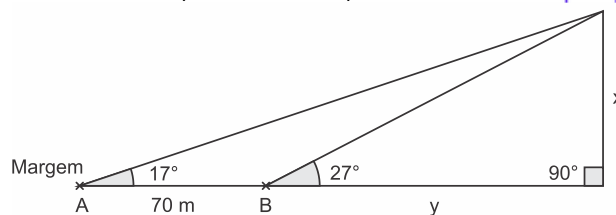


De acordo com os dados coletados por Raissa, qual a altura do paredão rochoso da Lagoa Azul?

Dados: $\sin(17^\circ) = 0,29$, $\tan(17^\circ) = 0,30$,
 $\cos(27^\circ) = 0,89$ e $\tan(27^\circ) = 0,51$.

Resolução:

Considerando x a altura do paredão e y a distância do ponto B ao paredão, temos:



$$\operatorname{tg} 27^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \cdot \operatorname{tg} 27^\circ \Rightarrow x = 0,51y \quad (I)$$

$$\operatorname{tg} 17^\circ = \frac{x}{y+70} \Rightarrow x = (y+70) \cdot \operatorname{tg} 17^\circ \Rightarrow x = 0,30y + 21 \quad (II)$$

Fazendo (I) = (II), temos:

$$0,51y = 0,30y + 21 \Rightarrow 0,21y = 21 \Rightarrow y = 100$$

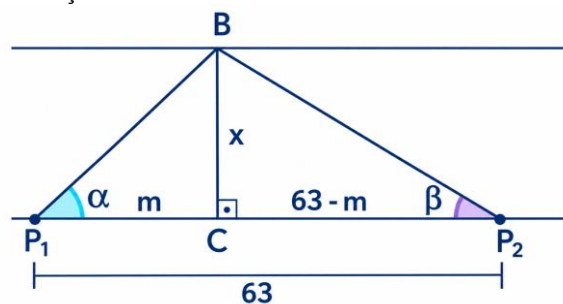
Logo, a altura do paredão será:

$$x = 0,51 \times 100 = 51\text{m}.$$

EXEMPLO

(UFSC – SC) Dois pescadores P_1 e P_2 estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver um bote B na outra margem. Sabendo que $P_1P_2 = 63\text{m}$, os ângulos $BP_1P_2 = \alpha$ e $BP_2P_1 = \beta$ e que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ e $\operatorname{tg} \beta = 4$, a distância entre as margens (em metros) é:

Resolução:



Do triângulo retângulo BCP_1 podemos concluir que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{m} \Rightarrow 2 = \frac{x}{m} \Rightarrow m = \frac{x}{2}$$

Do triângulo retângulo BCP_2 podemos concluir que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{63-m} \Rightarrow 4 = \frac{x}{63-m} \Rightarrow x = 252 - 4m$$

Como $m = m = \frac{x}{2}$, temos:

$$x = 252 - 4 \cdot \frac{x}{2}$$

$$x = 252 - 2x$$

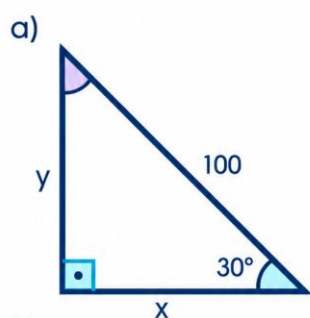
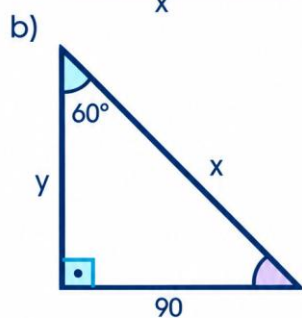
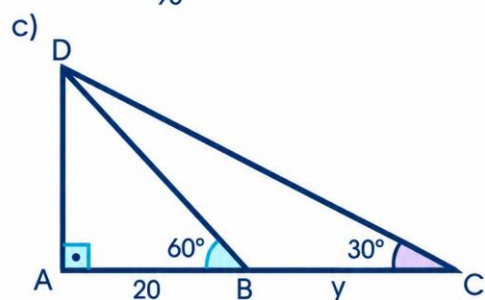
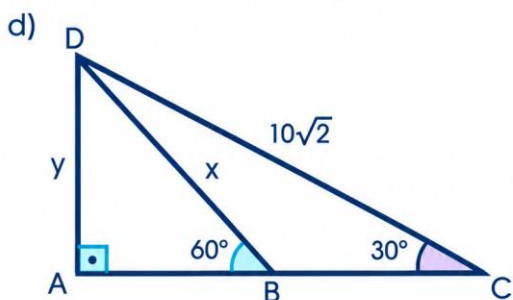
$$x = 84\text{m}$$



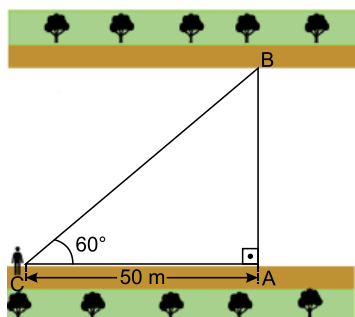
EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Em cada figura abaixo, determine as medidas dos valores desconhecidos:



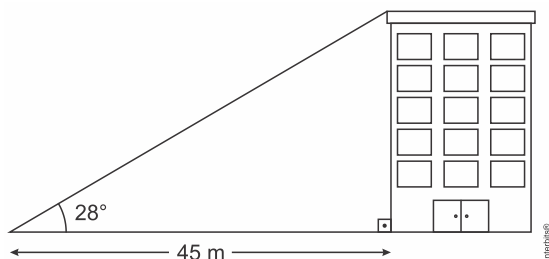
2. Em um exercício militar, uma Companhia de Engenharia deve construir uma ponte para ligar as margens paralelas de um rio. Para isso, o Cap Delta, engenheiro militar responsável pela missão, fixou um ponto A na margem do rio em que estava, e um ponto B na margem oposta, de forma que $\overline{AB}$ fosse perpendicular às margens do rio. Para determinar o comprimento da ponte a partir do ponto A, o Cap Delta caminhou 50 metros paralelamente à margem até o ponto C e mediu o ângulo $\widehat{ACB}$, obtendo 60° . Considerando $\sqrt{3} = 1,7$. Marque a alternativa que apresenta o comprimento da ponte que deverá ser construída para o exercício.



- a) 25 metros
- b) 42,5 metros
- c) 50 metros
- d) 85 metros
- e) 100 metros

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Um estudante precisou medir a altura de um edifício de 6 andares. Para isso, afastou-se 45 metros do edifício e, com um teodolito, mediu o ângulo de 28° , conforme a imagem abaixo.



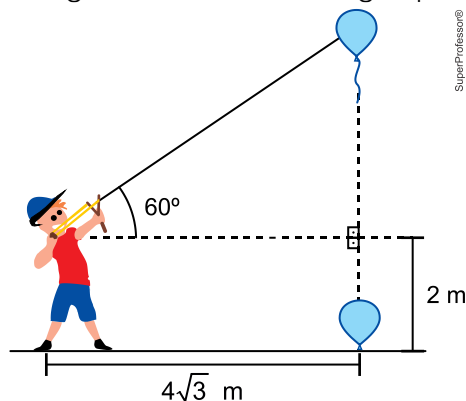
Usando as aproximações $\sin 28^\circ = 0,41$, $\cos 28^\circ = 0,88$ e $\operatorname{tg} 28^\circ = 0,53$, esse estudante concluiu corretamente que a altura desse edifício é

- a) 21,15 m.
- b) 23,85 m.
- c) 39,6 m.
- d) 143,1 m.
- e) 126,9 m.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. Um balão partirá perpendicularmente do chão, em trajetória retilínea, deslocando-se constantemente 2 metros a cada segundo. Sabendo disso, Fábio, que está a $4\sqrt{3}$ m do ponto de onde o balão partirá, posicionou seu estilingue a uma altura de 2 metros do chão e o armou, apontando uma pedra a ser disparada pelo estilingue, a 60° , no mesmo plano que contém a trajetória do balão, como indica a figura. Admita que:

- as dimensões do balão são desprezíveis;
- para acertar o balão, Fábio deverá apenas aguardar o tempo t que o balão leva do chão até atingir a mira do seu estilingue para dispará-lo.

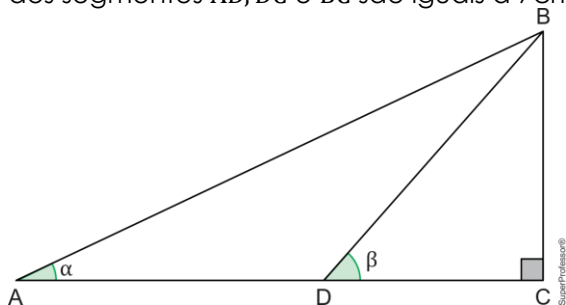


Na situação descrita, t é igual a

- 7,5 s.
- 7 s.
- 6,5 s.
- 5,5 s.
- 6 s.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. A figura mostra o triângulo retângulo ABC e um ponto D pertencente ao lado AC. O comprimento dos segmentos AD, DC e BC são iguais a 7 cm, 5 cm e 5 cm, respectivamente.



Os valores do ângulo β e de $\text{sen}(\alpha)$ são:

- $\beta = 45^\circ$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{5}{7}$.
- $\beta = 60^\circ$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{5}{13}$.
- $\beta = 60^\circ$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{12}{13}$.
- $\beta = 30^\circ$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{5}{7}$.
- $\beta = 45^\circ$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{5}{13}$.

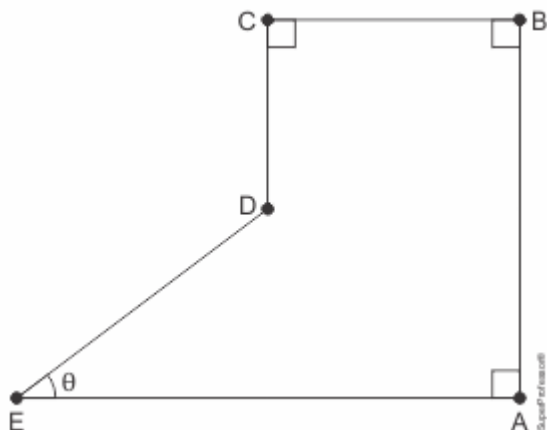
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



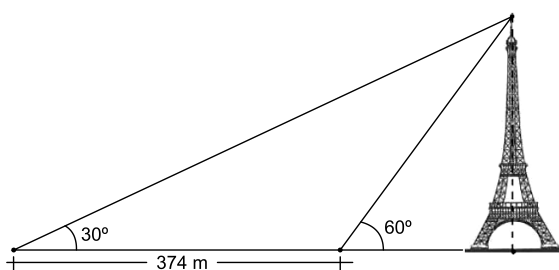
6. (UFPR – PR) O pentágono da figura abaixo tem ângulos retos $\bar{A}$, $\bar{B}$ e $\bar{C}$. Conhecendo as medidas dos lados $AE = 15$, $AB = 12$, $BC = 7$ e $CD = 5$, assinale a alternativa que corresponde ao valor da tangente do ângulo $\theta = \bar{E}$.



- a) $4/5$
- b) $5/4$
- c) $5/8$
- d) $8/7$
- e) $7/8$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (INTEGRADO MEDICINA) A Torre Eiffel foi construída para o evento "Exibição Universal" (*Exposition Universelle*) que ocorreu em 1889 em Paris. O evento foi realizado no centenário da Revolução Francesa (1789). Em estilo Art Nouveau, ela foi feita em ferro e inaugurada em 31 de março de 1889.

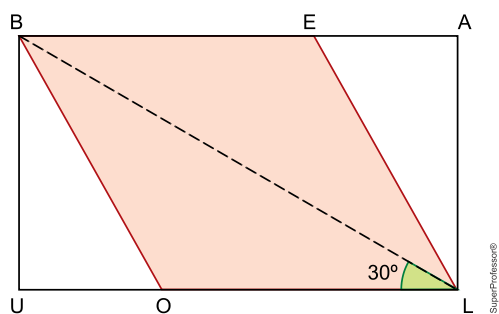


Com as informações obtidas a partir da ilustração, e usando $\sqrt{3} = 1,7$, qual é a altura da Torre Eiffel, em Paris?

- a) 266,4m b) 291,3m c) 317,9m d) 350,5m e) 374,2m

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UNESP – SP) Na figura, BELO é um losango com vértices E e O nos lados $\overline{BA}$ e $\overline{LU}$, respectivamente, do retângulo BALU. A diagonal $\overline{BL}$ de BALU forma um ângulo de 30° com o lado $\overline{LU}$, como mostra a figura.



Se a medida do lado do losango BELO é igual a 2 cm, a área do retângulo BALU será igual a

- a) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
- b) $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- c) $5\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- d) $\frac{7\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$
- e) $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

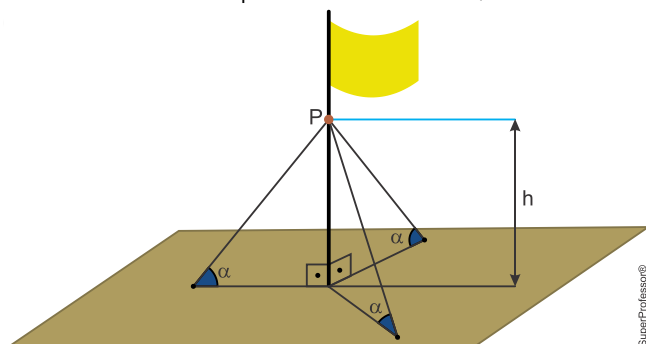
9. (UECE – CE) José caminhou na praia em linha reta deslocando-se do ponto X ao ponto Y, perfazendo o total de 1.200 m. Quando estava no ponto X, vislumbrou um navio ancorado no ponto Z de tal modo que o ângulo YXZ era de aproximadamente 60 graus. Ao chegar ao ponto Y verificou que o ângulo XYZ era de 45 graus. Nessas condições, a distância do navio à praia, em metros, é aproximadamente igual a

Considere $\text{tg}(60^\circ)$ aproximadamente igual a $\frac{19}{11}$.

- a) 720
- b) 760
- c) 780
- d) 740

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (ENEM) O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto P do mastro, a uma altura h do solo, e a outra extremidade, num ponto no



Os cabos de aço formam um ângulo α com o plano do chão e instalação:
Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:

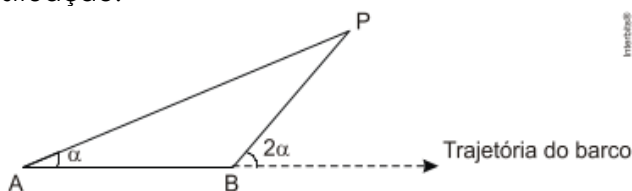
- opção I: $h = 11\text{ m}$ e $\alpha = 30^\circ$
- opção II: $h = 12\text{ m}$ e $\alpha = 45^\circ$
- opção III: $h = 18\text{ m}$ e $\alpha = 60^\circ$

A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível. Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados?

- a) $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ b) $11\sqrt{2}$ c) $12\sqrt{2}$ d) $12\sqrt{3}$ e) 22

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

11. (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α . A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\text{ m}$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

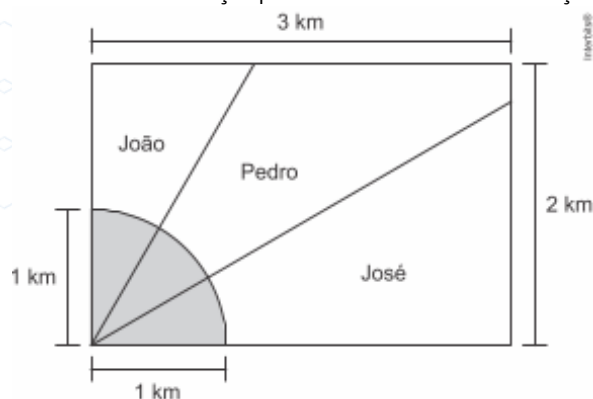
- a) 1000 m . b) $1000\sqrt{3}\text{ m}$. c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ m}$. d) 2000 m . e) $2000\sqrt{3}\text{ m}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3



12. (ENEM) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de $3\text{ km} \times 2\text{ km}$ que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



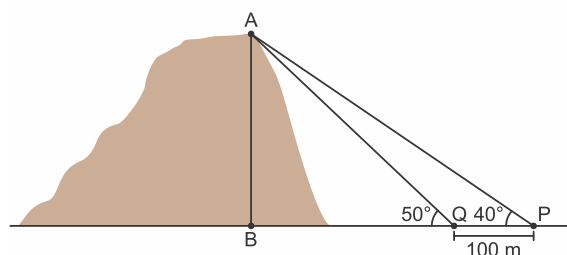
Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

Considere: $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$.

- a) 50% b) 43% c) 37% d) 33% e) 19%.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

13. (UERJ – RJ) Admita que uma pessoa na posição P avista o ponto A mais alto de um morro sob um ângulo de 40° . Ao caminhar 100 m sobre a reta horizontal PB, até a posição Q, ela avista o mesmo ponto sob o ângulo de 50° . O esquema a seguir representa essa situação, sendo AB a altura do morro em relação à reta horizontal PB.



Considere os seguintes valores das razões trigonométricas:

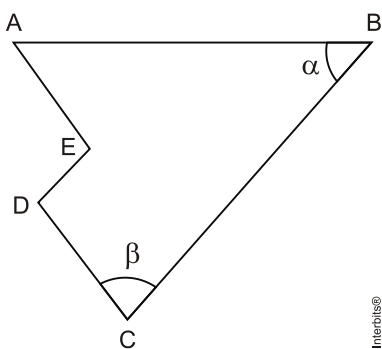
α	$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\text{tg } \alpha$
40°	0,64	0,77	0,84
50°	0,77	0,64	1,19

A altura $\overline{AB}$, em metros, é igual a:

- a) 212,0 b) 224,6 c) 232,0 d) 285,6

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

14. (FUVEST – SP) Na figura, tem-se $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{CD}$, $\overline{BC}$, paralelo a $\overline{DE}$, $AE = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 75^\circ$. Nessas condições, a distância do ponto E ao segmento $\overline{AB}$ é igual a



- a) $\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 01



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		*	D	B	B	E	E	C	B	B
1	C	B	E	D	A					

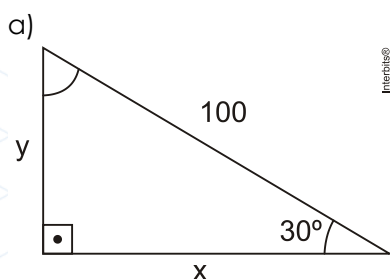
1)

- a) $x = 50\sqrt{3}$ e $y = 50$
- b) $x = 60\sqrt{3}$ e $y = 30\sqrt{3}$
- c) $x = 10\sqrt{3}$ e $y = 10$
- d) $x = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ e $y = 5\sqrt{2}$

$\sin(\theta)$ $\cos(\theta)$ $\tan(\theta)$

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 01

Resolução do Exercício 1:



$$y = 100 \cdot \sin 30^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$x = 100 \cdot \cos 30^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50 \cdot \sqrt{3}$$

b) Aplicando o seno de 30° temos:

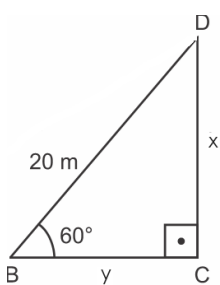
$$\sin(60^\circ) = \frac{90}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{90}{x}$$

$$x\sqrt{3} = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 60\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{y}{60\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{60\sqrt{3}}$$

$$2y = 60\sqrt{3} \Rightarrow y = 30\sqrt{3} \text{ m}$$

c) O triângulo ABD é isósceles, logo podemos trabalhar assim:



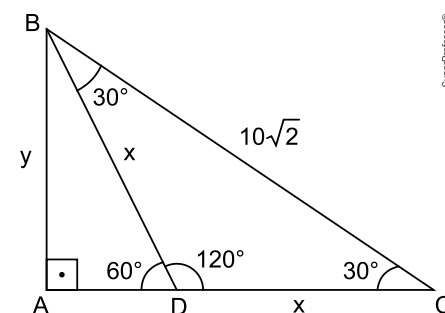
$$\sin 60^\circ = \frac{x}{20}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20} \Leftrightarrow x = 10\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{y}{20}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y}{20} \Leftrightarrow y = 10$$

d) Como $\angle DCB = \angle CBD = 30^\circ$, $\overline{BD} = \overline{DC} = x$. No triângulo ABC, temos:



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{y}{10\sqrt{2}} \Rightarrow y = 5\sqrt{2}$$

No triângulo ABD, temos:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{x} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

Resolução do Exercício 2: [D]

O comprimento L da ponte vale:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{L}{50}$$

$$\therefore L = 85 \text{ m}$$

Resolução do Exercício 3: [B]

Utilizando a relação de tangente do ângulo 28° , temos:

$$\operatorname{tg}(28^\circ) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow 0,53 = \frac{\text{altura}}{45}$$

$$\text{altura} = 23,85 \text{ m.}$$

Resolução do Exercício 4: [B]

Seja h, em metros, a altura do balão em relação ao solo. Logo, temos

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h-2}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = h-2$$

$$\Leftrightarrow h = 14 \text{ m.}$$

Portanto, segue que a resposta é $\frac{14}{2} = 7 \text{ s.}$

Resolução do Exercício 5: [E]

Como $DC = BC$, o triângulo retângulo BCD é também isosceles, e $\widehat{BDC} = \widehat{CBD} = \beta$. Logo, $\beta = 45^\circ$.

Medida da hipotenusa AB :

$$AB^2 = 12^2 + 5^2$$

$$AB = \sqrt{169}$$

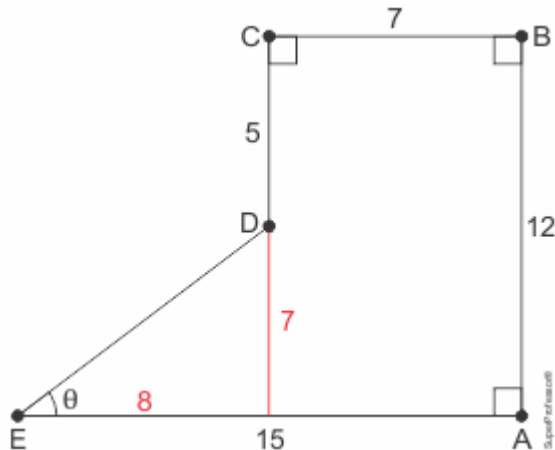
$$AB = 13 \text{ cm}$$

Sendo assim:

$$\text{sen} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$$

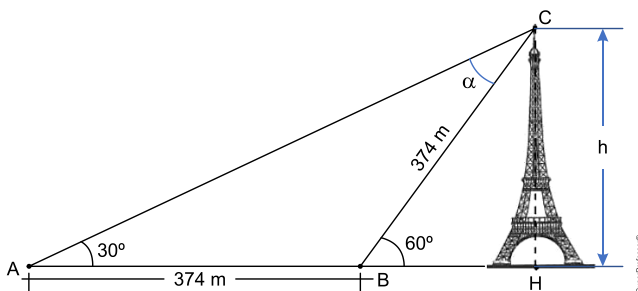
Resolução do Exercício 6: [E]

Colocando as medidas na figura, tem-se os seguintes valores:



Com isso, é possível calcular a tangente a partir da definição, $\text{tg} \theta = \frac{\text{C.O.}}{\text{C.A.}} = \frac{7}{8}$.

Resolução do Exercício 7: [C]



No triângulo ABC , temos:

$$\alpha + 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \Rightarrow BC = 374 \text{ m}$$

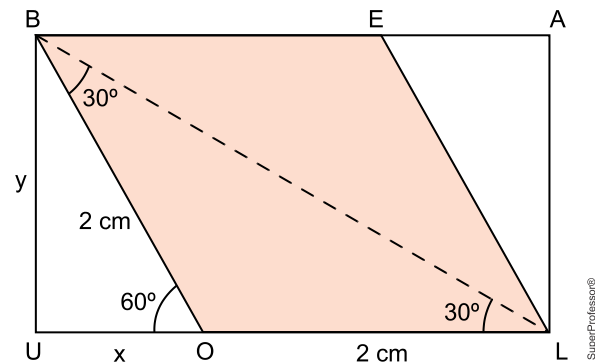
No triângulo HBC , temos:

$$\text{sen} 60^\circ = \frac{h}{374}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{374} \Rightarrow h = 374 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h \approx 317,9 \text{ m}$$

Resolução do Exercício 8: [B]

Como $\widehat{BOU} = 60^\circ$ (ângulo externo do triângulo BOL), no triângulo BOU , temos:



$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ cm}$$

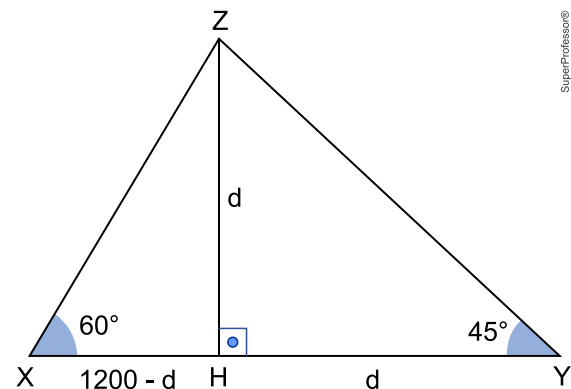
$$\text{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Logo, a área do retângulo $BALU$ é igual a:

$$A = (1+2) \cdot \sqrt{3}$$

$$\therefore A = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Resolução do Exercício 9: [B]



$YH = ZH = d$ e $XH = 1200 - d$.

Logo, no triângulo XHZ , temos:

$$\text{tg} 60^\circ = \frac{d}{1200 - d}$$

$$\frac{19}{11} = \frac{d}{1200 - d}$$

$$11 \cdot d = 19 \cdot 1200 - 19 \cdot d$$

$$30 \cdot d = 19 \cdot 1200$$

$$d = \frac{19 \cdot 1200}{30}$$

$$d = 760 \text{ m}$$

Resolução do Exercício 10: [C]

O comprimento x dos cabos é dado por:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Para cada opção, temos:

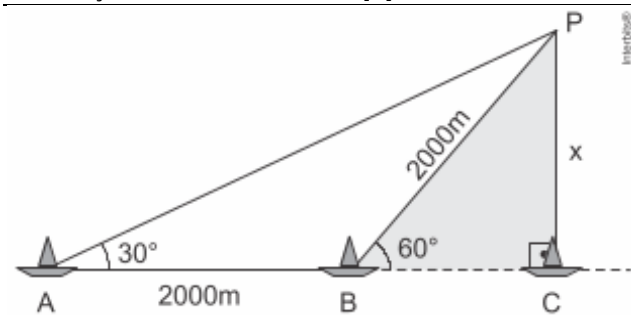
$$x_I = \frac{11}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{11}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_I = 22 \text{ m}$$

$$x_{II} = \frac{12}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x_{II} = 12\sqrt{2} \text{ m} \approx 16,9 \text{ m}$$

$$x_{III} = \frac{18}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{18}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x_{III} = 12\sqrt{3} \text{ m} \approx 20,8 \text{ m}$$

Logo, a medida dos cabos a serem instalados é de $12\sqrt{2} \text{ m}$.

Resolução do Exercício 11: [B]



$\triangle ABP$ é isósceles ($AB=BP=2000$)

No $\triangle PBC$ Temos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{d}{2000}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{2000}$$

$$d = 1000\sqrt{3} \text{ m}$$

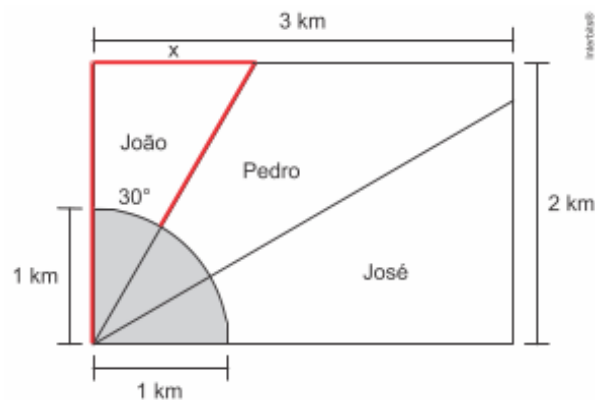
Resolução do Exercício 12: [E]

No triângulo assinalado (João) temos:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} = 20,58 = 1,16$$

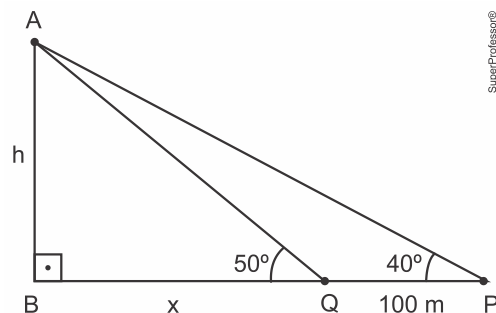
$$A = \frac{1,16 \cdot 2}{2} = 1,16$$

Em porcentagem: $\frac{1,16}{6} \approx 19\%$



Resolução do Exercício 13: [D]

Dos triângulos retângulos da figura, obtemos:

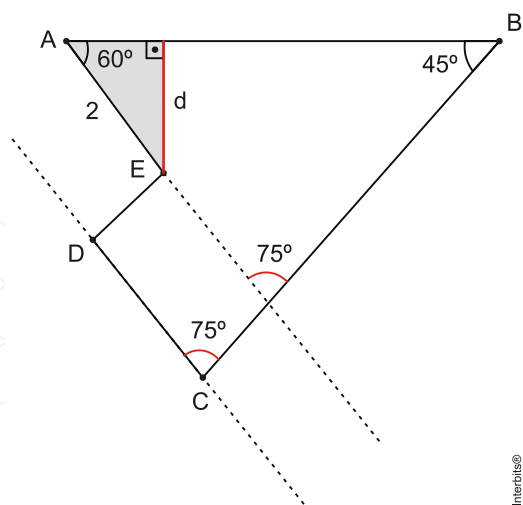


$$\begin{cases} \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{x+100} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{h}{1,19} \\ x+100 = \frac{h}{0,84} \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{1,19} + 100 = \frac{h}{0,84} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h}{0,84} - \frac{h}{1,19} = 100 \Rightarrow \frac{1,19h - 0,84h}{0,84 \cdot 1,19} = 100 \Rightarrow 0,35h = 99,96$$

$$\therefore h = 285,6 \text{ m}$$

Resolução do Exercício 14: [A]



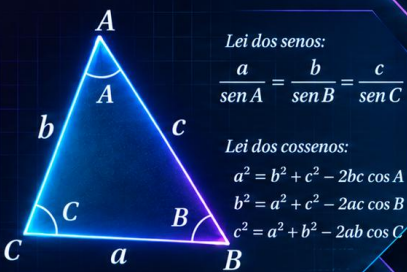
Interbits®

No triângulo destacado, temos:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{d}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{2}$$

$$d = \sqrt{3}$$



TRIGONOMETRIA

AULA 02

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER

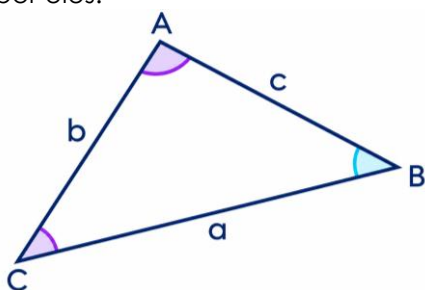


ASSISTA À AULA



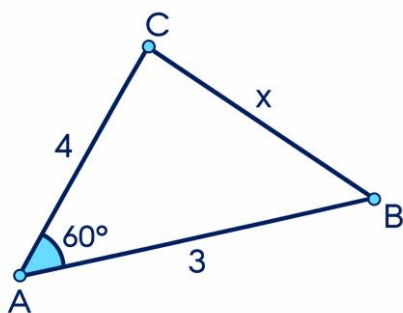
Lei dos Cossenos

Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas destes lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



EXEMPLO

Calcule a medida do lado x no triângulo abaixo:



Resolução:

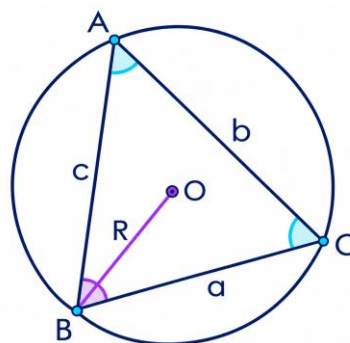
Aplicando o teorema dos cossenos, vem:

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} \\ x^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \\ x^2 &= 16 + 9 - 24 \cdot (1/2) \\ x^2 &= 25 - 12 \\ x^2 &= 13 \\ \therefore x &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Lei dos Senos

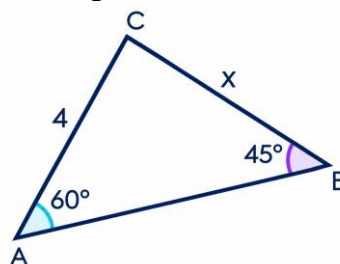
Num triângulo qualquer, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. A razão de proporção é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



EXEMPLO

No triângulo ABC, calcular



- A medida do lado BC
- A medida do raio da circunferência circunscrita

Resolução:

a) Pelo teorema dos senos, vem:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sin 60^\circ} &= \frac{4}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \Rightarrow \sqrt{2} \cdot x &= 4\sqrt{3} \\ \Rightarrow x &= \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \therefore x &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$



b)

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow 2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R$$

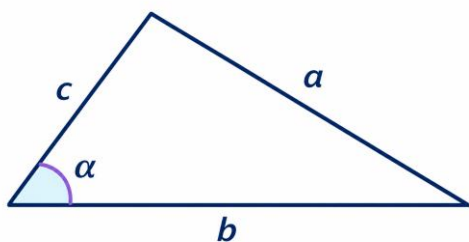
$$\Rightarrow R = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore R = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

Classificação dos Triângulos

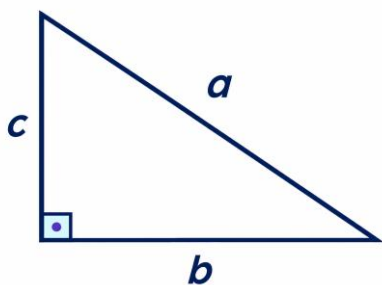
Com o auxílio do Teorema dos Cossenos, a partir dos valores dos valores lados a , b , c podemos classificar os triângulos em acutângulo (3 ângulos agudos), retângulo (1 ângulo reto) ou obtusângulo (1 ângulo obtuso). Considere para isso, o valor da medida do lado a como a medida do maior lado. Acompanhe:

Triângulo Acutângulo



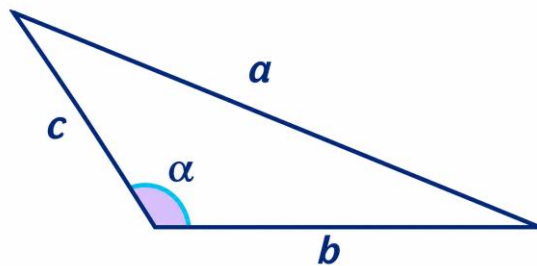
Nesse caso, $\alpha < 90^\circ$. Logo $\cos \alpha > 0$.
 $-2b \cdot c \cdot \cos \alpha < 0$ Somando $b^2 + c^2$ aos dois membros, vem:
 $b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha < 0 + b^2 + c^2$
 $a^2 < b^2 + c^2$

Triângulo Retângulo



Nesse caso, $\alpha = 90^\circ$. Logo $\cos \alpha = 0$.
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha$
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot (0)$
 $a^2 = b^2 + c^2$

Triângulo Obtusângulo



Nesse caso, $\alpha > 90^\circ$. Logo $\cos \alpha < 0$.
 $-2b \cdot c \cdot \cos \alpha > 0$ Somando $b^2 + c^2$ aos dois membros, vem:
 $b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha > 0 + b^2 + c^2$
 $a^2 > b^2 + c^2$

Em resumo, temos:

Sejam a , b e c lados de um triângulo e considerando a , o lado maior temos:

$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo acutângulo



$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo retângulo



$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ triângulo obtusângulo



Fique atento!



Para $\alpha + \beta = 180^\circ$, temos:

$\sin \alpha = \sin \beta$ e $\cos \beta = -\cos \alpha$

Exemplos:

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

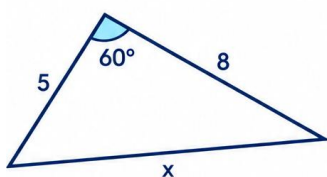



EXERCÍCIOS NÍVEL 1

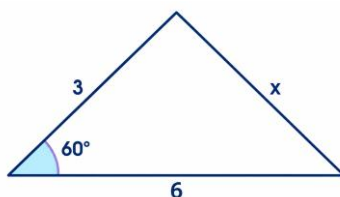


1. Calcule a medida do lado x nos triângulos abaixo:

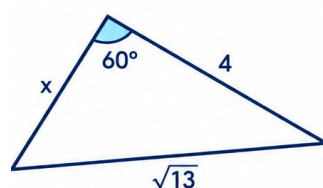
a)



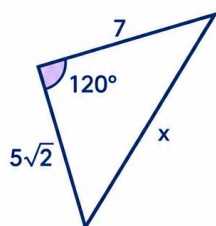
b)



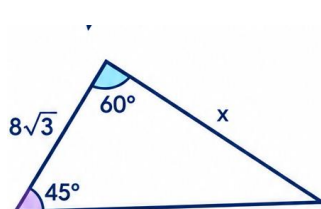
c)



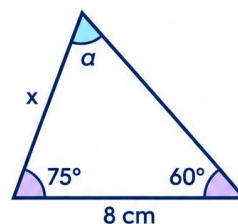
d)



e)



f)



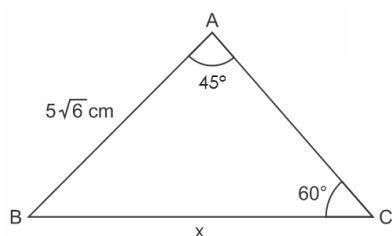
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Num paralelogramo, cada ângulo agudo mede 30° e os lados que formam cada um desses ângulos medem $3\sqrt{3}$ cm e 5 cm. Calcule a medida da menor das diagonais desse paralelogramo.

a) $\sqrt{6}$ cm b) $\sqrt{3}$ cm c) $3\sqrt{3}$ cm d) $\sqrt{7}$ cm e) $15\sqrt{3}$ cm

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Considerando a figura calcula-se que a medida do lado x é:



- a) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
b) $1 + \sqrt{3}$
c) 10
d) $\sqrt{3}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (UFPR – PR) Dois navios deixam um porto ao mesmo tempo. O primeiro viaja a uma velocidade de 16 km/h em um curso de 45° em relação ao norte, no sentido horário. O segundo viaja a uma velocidade 6 km/h em um curso de 105° em relação ao norte, também no sentido horário. Após uma hora de viagem, a que distância se encontrarão separados os navios, supondo que eles tenham mantido o mesmo curso e velocidade desde que deixaram o porto?

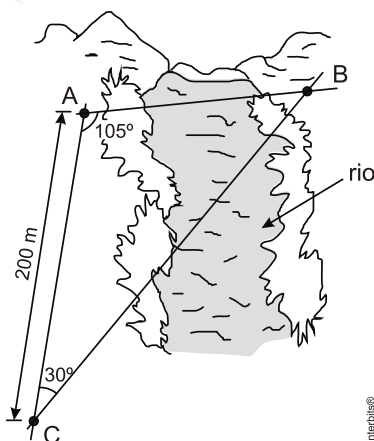
a) 10 km. b) 14 km. c) 15 km. d) 17 km. e) 22 km.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 2



5. (UFPB – PB) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200m do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $\widehat{BCA}$ e $\widehat{CAB}$ mediam, respectivamente, 30° e 105° , conforme ilustrado na figura a seguir.

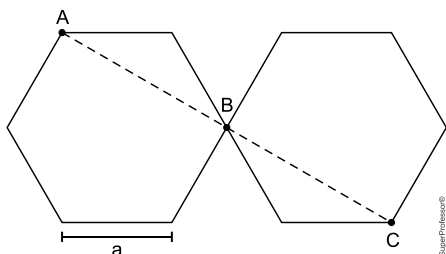


Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

- a) $200\sqrt{2}$
- b) $180\sqrt{2}$
- c) $150\sqrt{2}$
- d) $100\sqrt{2}$
- e) $50\sqrt{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

6. (UFRGS – RS) Na figura abaixo, há dois hexágonos regulares de lado a com o vértice B em comum. Os pontos A, B e C são colineares.

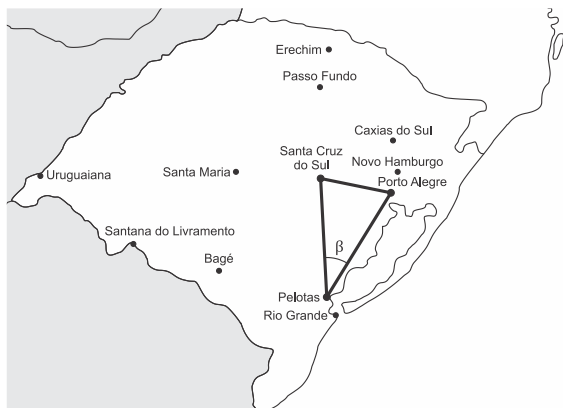


A distância entre os pontos A e C é

- a) $\frac{\sqrt{3}}{4}a$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
- c) $\sqrt{3}a$
- d) $2\sqrt{3}a$
- e) $3\sqrt{3}a$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (PUC – RS) Uma empresa gaúcha possui três grandes centros de distribuição nas cidades de Pelotas, Porto Alegre e Santa Cruz do Sul. O transporte de suas cargas é feito por aeronave e o percurso entre as cidades é feito em linha reta, conforme a figura abaixo.

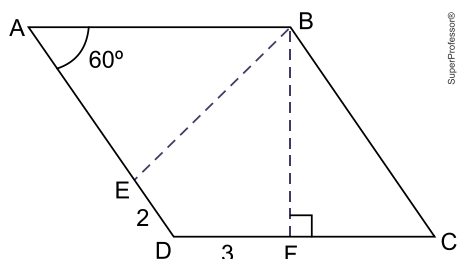


A distância, em linha reta, de Pelotas a Porto Alegre é de 200 km e a distância de Pelotas a Santa Cruz do Sul é de 250 km. Sabendo que a aeronave saiu de Porto Alegre e levou 30 minutos para chegar a Santa Cruz do Sul, qual foi a velocidade média da aeronave, em km/h? Considere $\cos \beta \approx 0,8$.

- a) 100
- b) 150
- c) 300
- d) 350

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

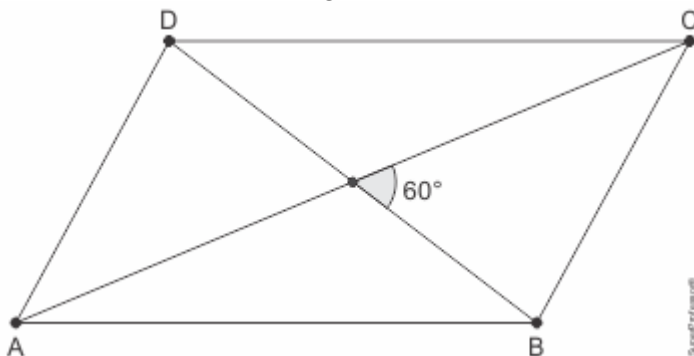
8. (UNICAMP – SP) No losango abaixo, qual é a medida do comprimento do segmento BE?



- a) $\sqrt{26}$.
- b) $\sqrt{27}$.
- c) $\sqrt{28}$.
- d) $\sqrt{29}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

9. (UFRGS – RS) Na figura abaixo, ABCD é um paralelogramo tal que suas diagonais medem $AC = 16$ e $BD = 10$ formam um ângulo de 60° .

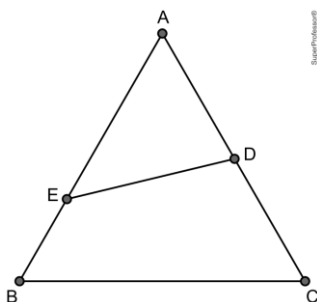


As medidas dos lados do paralelogramo ABCD são

- a) 6 e 12.
- b) 7 e 15.
- c) 6 e $2\sqrt{17}$.
- d) 7 e $\sqrt{129}$.
- e) 9 e $\sqrt{129}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UFRGS – RS) Na figura abaixo, ABC é um triângulo equilátero de lado 6. O ponto D é ponto médio do lado AC, e a medida de EB é 2.



O perímetro do triângulo AED é

- a) $5 + \sqrt{5}$.
- b) $7 + \sqrt{5}$.
- c) $10 + \sqrt{5}$.
- d) $7 + \sqrt{13}$.
- e) $10 + \sqrt{13}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



11. (UECE - CE) Em relação a um triângulo cujas medidas dos lados são respectivamente 3 m, 5 m e 7 m, pode-se afirmar corretamente que a soma das medidas, em graus, dos seus dois menores ângulos internos é igual a

a) 50.

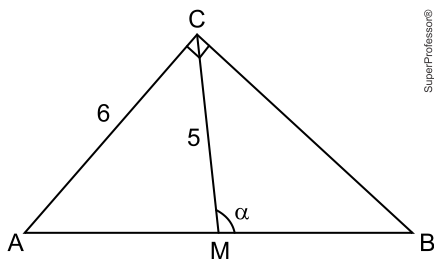
b) 60.

c) 70.

d) 80.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

12. (UNICAMP – SP - adaptada) A figura seguinte mostra um triângulo retângulo ABC. O ponto M é o ponto médio do lado AB, que é a hipotenusa.



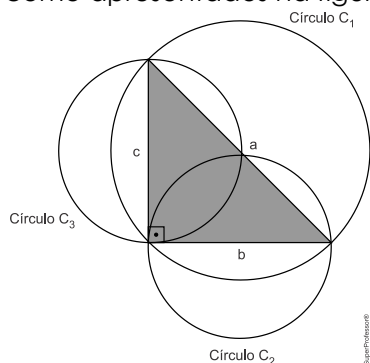
SuperProfessor®

O valor de $\cos \alpha$ é

- a) $-\frac{7}{25}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

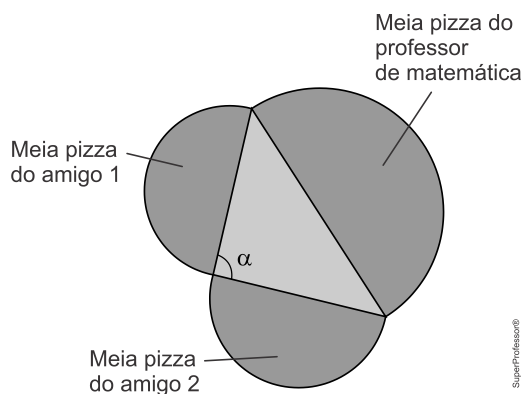
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

13. (ENEM) Sejam a , b e c as medidas dos lados de um triângulo retângulo, tendo a como medida da hipotenusa. Esses valores a , b e c são, respectivamente, os diâmetros dos círculos C_1 , C_2 e C_3 , como apresentados na figura.



Observe que essa construção assegura, pelo teorema de Pitágoras, que $\text{área } C_1 = \text{área } (C_2) + \text{área } (C_3)$.

Um professor de matemática era conhecedor dessa construção e, confraternizando com dois amigos em uma pizzeria onde são vendidas pizzas somente em formato de círculo, lançou um desafio: mesmo sem usar um instrumento de medição, poderia afirmar com certeza se a área do círculo correspondente à pizza que ele pedisse era maior, igual ou menor do que a soma das áreas das pizzas dos dois amigos. Assim, foram pedidas três pizzas. O professor as dividiu ao meio e formou um triângulo com os diâmetros das pizzas, conforme indicado na figura.



A partir da medida do ângulo α , o professor afirmou que a área de sua pizza é maior do que a soma das áreas das outras duas pizzas.

A área da pizza do professor de matemática é maior do que a soma das áreas das outras duas pizzas, pois

- a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ$ c) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ d) $\alpha = 180^\circ$ e) $180^\circ < \alpha < 360^\circ$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 02

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	*	D	C	B	D	D	C	C	D	
1	D	B	A	C						

1)

- a) 7
b) $x = \sqrt{27}$
c) 1 ou 3
d) 13
e) $8\sqrt{2}$
f) $4\sqrt{6}$

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 02

Resolução do Exercício 1:

a)

Aplicando o teorema dos cossenos, vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 64 + 25 - 80 \cdot (1/2)$$

$$x^2 = 89 - 40$$

$$x^2 = 49$$

$$\therefore x = 7$$

b)

Aplicando a Lei dos Cossenos:

$$x^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 36 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 45 - 18$$

$$x^2 = 27$$

$$x = \sqrt{27}$$

c)

Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo ABC, temos:

$$\sqrt{13}^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

$$13 = 16 + x^2 - 8x \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos
 $x = 1$ ou $x = 3$.

Resposta: 1 cm ou 3 cm.

d)

$$x^2 = 7^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow$$

$$x^2 = 49 + 50 - 2 \cdot 35\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x^2 = 169 \Rightarrow$$

$$x = 13.$$

e) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$

Pelo teorema dos senos, vem:

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot x = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$$

$$\therefore x = 8\sqrt{2}$$

f) Aplicando o teorema dos senos no triângulo assinalado e admitindo que $\alpha = 45^\circ$, temos:

$$\frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 4\sqrt{6}$$

Resolução do Exercício 2: [D]

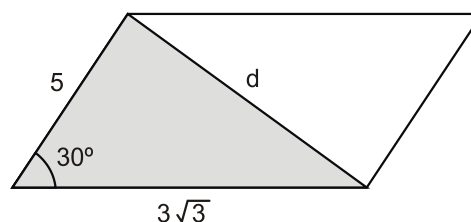
Aplicando o teorema dos cossenos, temos:

$$d^2 = 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$$

$$d^2 = 25 + 27 - 30\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d^2 = 52 - 45$$

$$d = \sqrt{7}$$



Resolução do Exercício 3: [C]

Aplicando a lei dos senos, chegamos a:

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

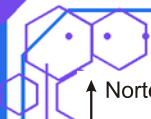
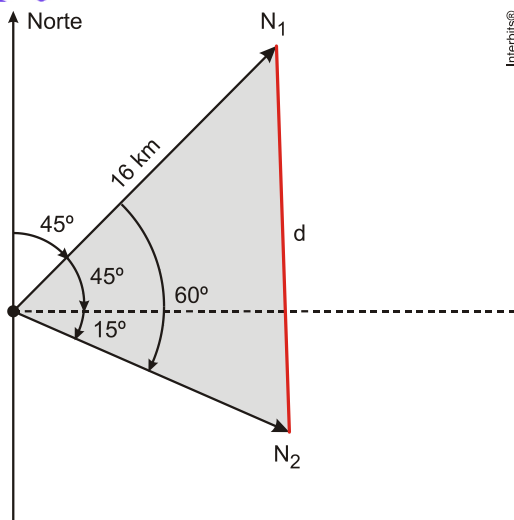
$$\Rightarrow x\sqrt{3} = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{4} \Rightarrow x = 10$$

Resolução do Exercício 4: [B]

Depois de uma hora de viagem o navio 1 (N_1) terá percorrido 16 km e o navio 2 (N_2) terá percorrido 6 km.

Temos, então, a seguinte figura:



Interbits®

Seja d a distância entre os navios, temos:

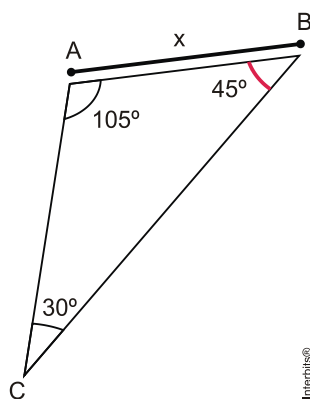
$$d^2 = 16^2 + 6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

$$d^2 = 256 + 36 - 192 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$d^2 = 196$$

$$d = 14 \text{ km}$$

Resolução do Exercício 5: [D]



Interbits®

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{200}{\sin 45^\circ}$$

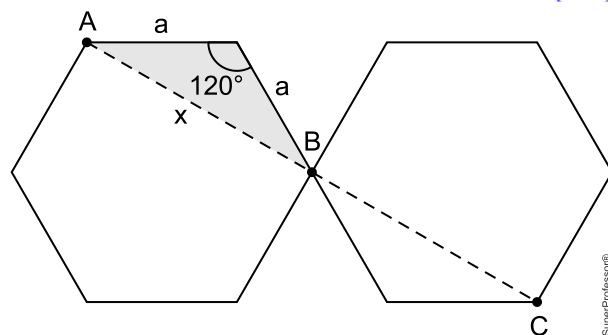
$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 200 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{200}{\sqrt{2}}$$

$$x = 100\sqrt{2} \text{ m}$$

Resolução do Exercício 6: [D]

Valor de x na figura abaixo:



SuperProfessores®

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 2a^2 + a^2$$

$$x = \sqrt{3}a$$

Portanto, a distância entre A e C vale:

$$\overline{AC} = 2\sqrt{3}a$$

Resolução do Exercício 7: [C]

Se x é a distância entre Porto Alegre e Santa Cruz do Sul, então, pela Lei dos Cossenos, temos

$$x^2 = 200^2 + 250^2 - 2 \cdot 200 \cdot 250 \cdot \cos \beta \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 40000 + 62500 - 2 \cdot 200 \cdot 250 \cdot 0,8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 22500 \Rightarrow$$

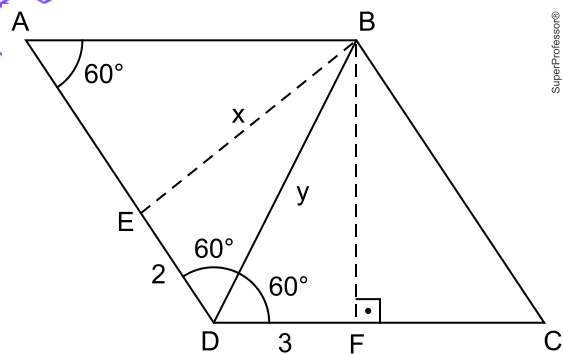
$$x = 150 \text{ km.}$$

Portanto, como $30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h}$, segue que a resposta é

$$\frac{150}{\frac{1}{2}} = 300 \text{ km/h.}$$

Resolução do Exercício 8: [C]

Os ângulos $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ABD}$ são iguais, pois $\overline{AD} = \overline{AB}$. Como $\widehat{DAB} = 60^\circ$, devemos ter $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = 60^\circ$. Analogamente, $\widehat{BDC} = 60^\circ$. No triângulo BDF, temos:



$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{DF}}{\overline{BD}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{y}$$

$$y = 6$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BDE, chegamos a:

$$x^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$$

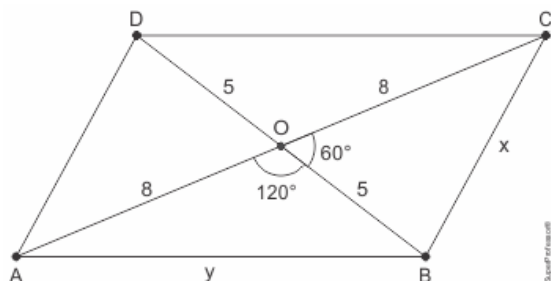
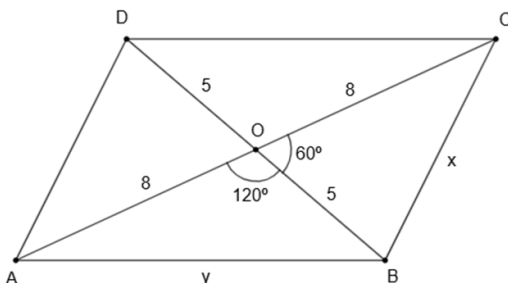
$$x^2 = 4 + 36 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 28$$

$$\therefore x = \sqrt{28}$$

Resolução do Exercício 9: [D]

No triângulo BOC, temos:



$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{49}$$

$$\therefore x = 7$$

No triângulo AOB, temos:

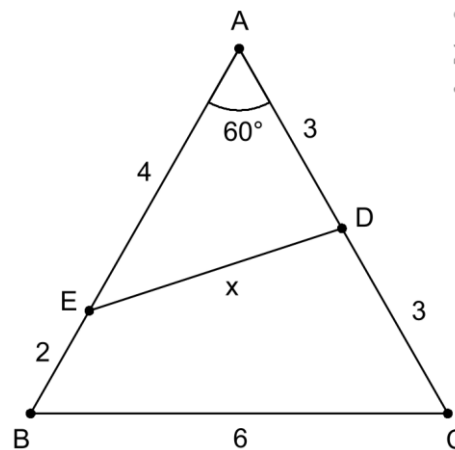
$$y^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

$$y^2 = 64 + 25 + 80 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \sqrt{129}$$

Resolução do Exercício 10: [D]

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo AED, obtemos:



$$x^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{13}$$

Logo, o perímetro do triângulo AED vale $4 + 3 + \sqrt{13} = 7 + \sqrt{13}$.

Resolução do Exercício 11: [B]

Como queremos a soma dos dois menores, podemos encontrar esse valor fazendo a diferença entre 180° e o maior ângulo. Para obter o maior ângulo, podemos usar a lei dos cossenos, assim, $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \theta \rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$. Dessa maneira, $\theta = 120^\circ$ e fazendo $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Resolução do Exercício 12: [A]

Como M é o ponto médio da hipotenusa do triângulo ABC, ele também é o seu circuncentro (centro da circunferência circunscrita ao triângulo). Dessa forma, temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{CM} = 5$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$10^2 = 6^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{100 - 36}$$

$$\overline{BC} = 8$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo BMC, obtemos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MB}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MB} \cos \alpha$$

$$8^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos \alpha$$

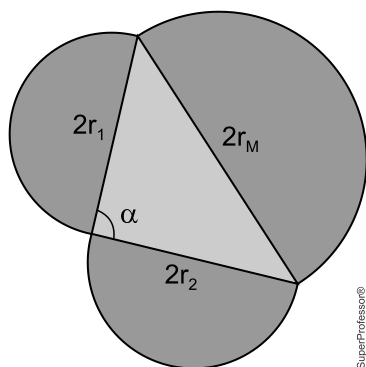
$$64 = 25 + 25 - 50 \cos \alpha$$

$$50 \cos \alpha = -14$$

$$\cos \alpha = -\frac{7}{25}$$

Resolução do Exercício 13: [C]

Sendo $2r_1$, $2r_2$ e $2r_M$, respectivamente, os diâmetros das pizzas do amigo 1, do amigo 2 e do professor de matemática, sabendo que a área da pizza do professor é maior do que a soma das áreas das outras duas pizzas, temos que:



$$\pi r_M^2 > \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$r_1^2 + r_2^2 - r_M^2 < 0 \quad (I)$$

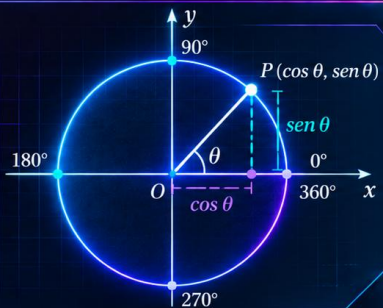
Pela lei dos cossenos, também sabemos que:

$$(2r_M)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2 - 2 \cdot 2r_1 \cdot 2r_2 \cos \alpha$$

$$r_M^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_M^2}{2r_1r_2} \quad (II)$$

Utilizando o resultado (I) em (II), obtemos $\cos \alpha < 0$. Dessa forma, como $\alpha < 180^\circ$ (pois é ângulo interno de triângulo), podemos concluir que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.



TRIGONOMETRIA

AULA 03

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

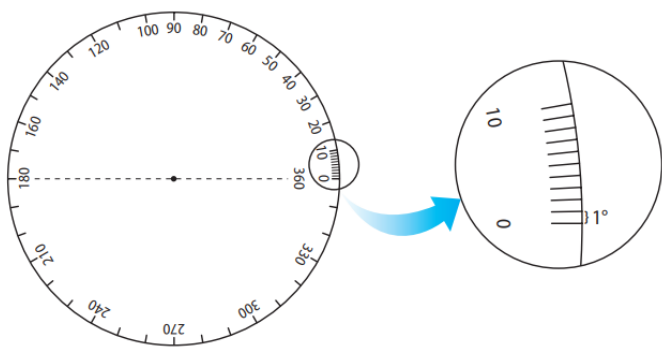


ASSISTA À AULA

MATEMÁTICA

Unidades de medida de ângulos

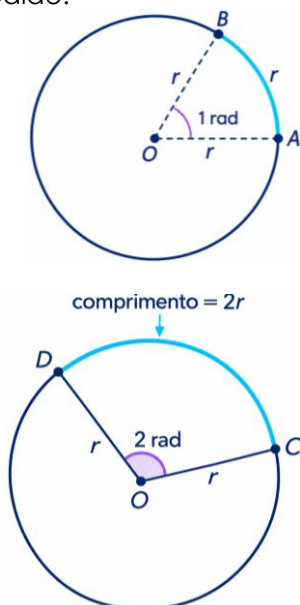
- **Grau:** Se dividirmos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco de medida um grau (1°)



$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ da circunferência que o contém}$$

Submúltiplos do Grau: 1 grau pode ser dividido em 60 minutos ($1^\circ = 60'$) e ainda 1 minuto pode ser dividido em 60 segundos ($1' = 60''$)

- **Radiano:** 1 radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência na qual se encontra o arco a ser medido.



Comprimento de uma circunferência Conversão de unidades

O comprimento de uma circunferência é dado por:

$$C = 2\pi \cdot r$$

Isso nos indica que o raio "cabe" 2π vezes nesse comprimento. Logo, como um arco de comprimento igual a r mede 1 radiano, um arco de comprimento $2\pi r$ mede 2π rad. Daí vem que 2π rad e 360° são equivalentes.

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi \text{ rad} \quad \text{ou ainda:} \quad 180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

Grau	0°	90°	180°	270°	360°
Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

EXEMPLO

Determinar, em radianos, a medida do arco 120°

$$\begin{aligned} \text{Solução: } 180^\circ &\leftrightarrow \pi \text{ rad} \\ 120^\circ &\leftrightarrow x \text{ rad} \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{120^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$$

EXEMPLO

Determinar, em graus, a medida do arco $\frac{5\pi}{3}$ rad.

$$\text{Solução: } x = \frac{5\pi}{3} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{3} \rightarrow x = 300^\circ$$

EXEMPLO

Quanto mede, em graus um arco de 1 radiano?

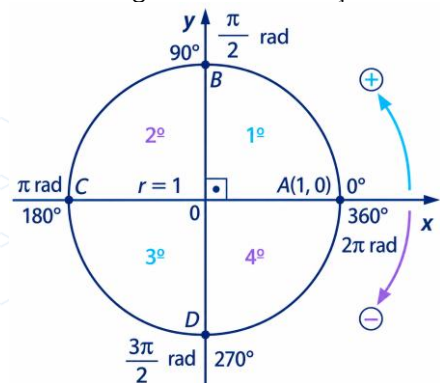
Solução: Como π rad (aproximadamente 3,14 rad) correspondem a 180° , podemos fazer a seguinte comparação:

$$\begin{cases} 3,14 \text{ rad} \leftrightarrow 180^\circ \\ 1 \text{ rad} \leftrightarrow x \end{cases} \rightarrow x = \frac{180^\circ}{3,14} \approx 57,3^\circ$$

Portanto, 1 radiano vale aproximadamente 57°

Circunferência trigonométrica

Denomina-se circunferência trigonométrica à circunferência de raio unitário, com centro na origem de um sistema cartesiano. Adota-se por convenção o sentido anti-horário como sentido positivo de orientação dos arcos, e o sentido horário como sentido negativo de orientação dos arcos.



Perceba que os eixos coordenados dividem a circunferência em quatro partes, que a partir de agora, chamaremos de quadrantes.

- **1º quadrante:** arcos entre 0° e 90° , medidos a partir da origem.
- **2º quadrante:** arcos entre 90° e 180° , medidos a partir da origem.
- **3º quadrante:** arcos entre 180° e 270° , medidos a partir da origem.
- **4º quadrante:** arcos entre 270° e 360° , medidos a partir da origem.

Arcos Côngruos

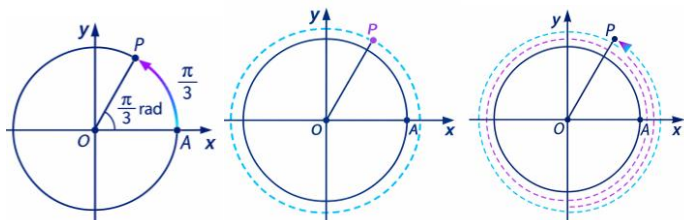
Dois ou mais arcos são côngruos quando a diferença entre seus valores é um múltiplo de 360° ou 2π rad.

Exemplo: $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \dots$

Veja que:

$$\bullet \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 0 \quad \bullet \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 1 \quad \bullet \frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot 2$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Veja que esses arcos possuem a mesma extremidade e diferem apenas no número de voltas. A expressão $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ é

denominada expressão geral do arco de $\frac{\pi}{3}$, onde

$\frac{\pi}{3}$ é a primeira determinação positiva.

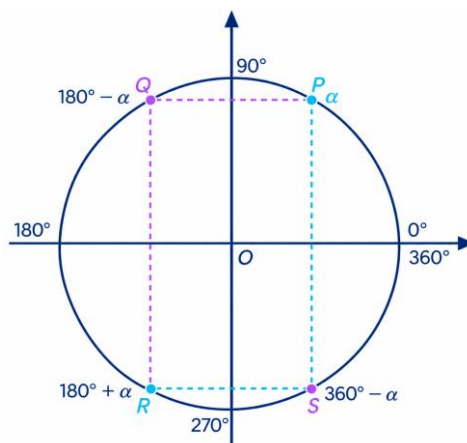
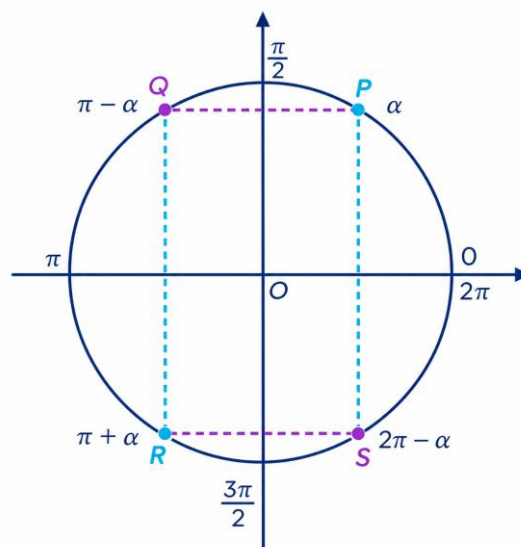
Arcos Simétricos

Um arco de medida x no 1º quadrante possui simétricos nos demais quadrantes. A medida de cada arco simétrico de x nos demais quadrantes, em graus ou radianos, é:

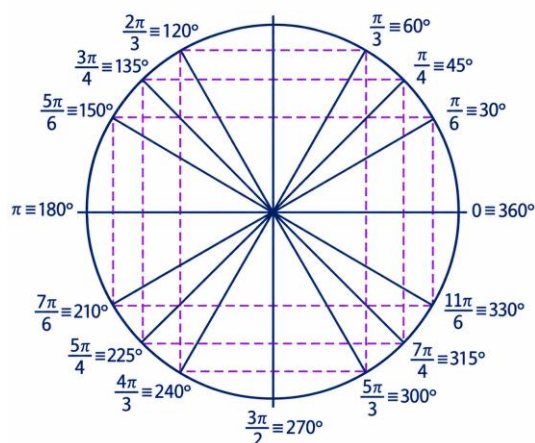
Simétrico de x no 2º quadrante = $180^\circ - x$ ($\pi - x$).

Simétrico de x no 3º quadrante = $180^\circ + x$ ($\pi + x$).

Simétrico de x no 4º quadrante = $360^\circ - x$ ($2\pi - x$).



EXEMPLO





EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Complete a tabela abaixo:

Graus	Radianos
30°	
120°	
315°	
	$\frac{10\pi}{9}$
	$\frac{\pi}{20}$
	$\frac{4\pi}{3}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. (UESC – SC) O relógio Tower Clock, localizado em Londres, Inglaterra, é muito conhecido pela sua precisão e tamanho. O ângulo interno formado entre os ponteiros das horas e dos minutos deste relógio, desprezando suas larguras, às 15 horas e 20 minutos é:

a) $\frac{\pi}{12}$

b) $\frac{\pi}{36}$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{18}$

e) $\frac{\pi}{9}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (UECE – CE) Em um relógio analógico circular usual, quando a hora observada é 6h20min, a medida em graus do menor ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos é

a) 68

b) 62

c) 65

d) 70

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (ENEM) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que no caso, corresponde a

- a) uma volta completa
- b) uma volta e meia
- c) duas voltas completas
- d) duas voltas e meia
- e) cinco voltas completas

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. Determine a soma dos números associados às proposições verdadeiras:

- 01. Quanto ao arco 4555° , é correto afirmar que pertence ao terceiro quadrante e tem como um de seus arcos cômplementares o ângulo de 4195°
- 02. Um relógio marca que faltam 20 minutos para o meio-dia. Então, o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos é 110°
- 04. 400° e 940° são arcos cômplementares
- 08. Na competição de skate a rampa em forma de U tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo skate, uma delas é a "180 *allie frontside*", que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são cômplementares a 180° um atleta que faz as manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.
- 16. A medida de um ângulo α é 1 radiano. A medida de α em graus é tal que $50^\circ < \alpha < 60^\circ$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (UEG – GO) Dois pontos percorrem uma circunferência de raio unitário em sentidos contrários, partindo do mesmo ponto no mesmo instante. Um percorre a distância de $\frac{14\pi}{3}$ rad no sentido anti-horário e para, enquanto o outro percorre $\frac{43\pi}{6}$ rad no sentido horário e também para. Quando os dois pontos terminam o percurso, a distância entre eles é

- a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{3}$ rad c) $\frac{\pi}{4}$ rad d) $\frac{\pi}{2}$ rad e) $\frac{2\pi}{3}$ rad

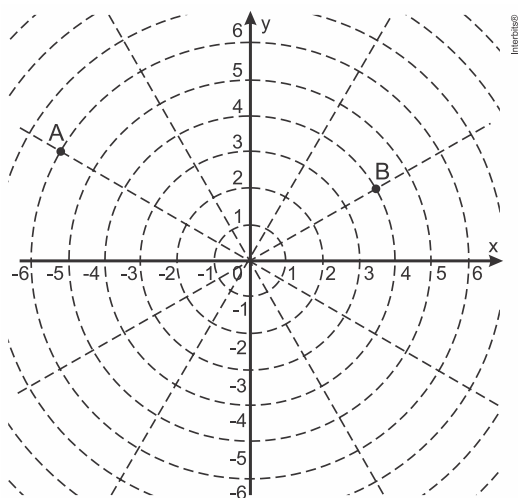
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UEPG – PR) Sobre arcos e ângulos, assinale o que for correto.

01. O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que está marcando 1 hora e 40 minutos é 170° .
02. Um trem desloca-se na velocidade constante de 60km/h num trecho circular de raio igual a 500m. Então, em um minuto ele percorre um arco de 2rad.
04. Uma pessoa caminhando em volta de uma praça circular descreve um arco de 160° ao percorrer 120m. O diâmetro da praça é maior que 100m.
08. Em 50 minutos, o ponteiro dos minutos de um relógio percorre $\frac{5\pi}{3}$ rad.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (ENEM) Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0; 0).

Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a

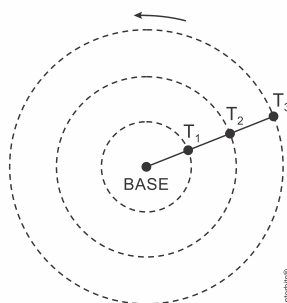
- a) $\frac{2\pi \cdot 1}{3} + 8$ b) $\frac{2\pi \cdot 2}{3} + 6$ c) $\frac{2\pi \cdot 3}{3} + 4$ d) $\frac{2\pi \cdot 4}{3} + 2$ e) $\frac{2\pi \cdot 5}{3} + 2$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (ENEM) Pivô central é um sistema de irrigação muito usado na agricultura, em que uma área circular é projetada para receber uma estrutura suspensa. No centro dessa área, há uma tubulação vertical que transmite água através de um cano horizontal longo, apoiado em torres de sustentação, as quais giram, sobre rodas, em torno do centro do pivô, também chamado de base, conforme mostram as figuras. Cada torre move-se com velocidade constante.



Um pivô de três torres (T_1 , T_2 e T_3) será instalado em uma fazenda, sendo que as distâncias entre torres consecutivas bem como da base à torre T_1 são iguais a 50 m. O fazendeiro pretende ajustar as velocidades das torres, de tal forma que o pivô efetue uma volta completa em 25 horas. Use 3 como aproximação para π .

Para atingir seu objetivo, as velocidades das torres T_1 , T_2 e T_3 devem ser, em metro por hora, de

- a) 12, 24 e 36
- b) 6, 12 e 18
- c) 2, 4 e 6
- d) 300, 1200 e 2700
- e) 600, 2400 e 5400

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UEM – PR) Sobre trigonometria, assinale o que for **correto**.

01. A medida angular de um arco de circunferência é igual ao ângulo central que forma esse arco.
02. O comprimento de um arco de circunferência é numericamente igual ao ângulo central que forma esse arco em qualquer circunferência.
04. Se o comprimento de um arco de uma circunferência é $\frac{\pi}{4}$ e se o ângulo central que o forma é de 45° , então o raio da circunferência é 1.
08. O ângulo de -300° é congruente a $\frac{\pi}{3}$.
16. Suponha que a distância do seu ombro até a ponta do seu dedo tem 1,10m. Então a medida do arco desenhado no ar pela ponta do dedo ao mover o braço da posição paralela ao corpo até a posição perpendicular é de $\frac{11}{20}\pi$ m.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 03



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		*	E	D	D	27	A	11	A	A
1	29									

1)

Graus	Radianos
30°	$\frac{\pi}{6}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$
200°	$\frac{10\pi}{9}$
9°	$\frac{\pi}{20}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$



TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 03

Resolução do Exercício 1:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} & - & 180^\circ \\ x & - & 30^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{(30^\circ)(\pi \text{ rad})}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} & - & 180^\circ \\ x & - & 120^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{(120^\circ)(\pi \text{ rad})}{180^\circ} = \frac{2\pi \text{ rad}}{3}$$

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} & - & 180^\circ \\ x & - & 315^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{(315^\circ)(\pi \text{ rad})}{180^\circ} = \frac{35\pi \text{ rad}}{20} = \frac{7\pi \text{ rad}}{4}$$

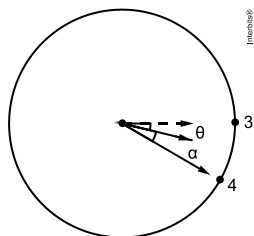
$$\frac{10\pi}{9} \text{ rad} = \frac{10(180^\circ)}{9} = \frac{1800^\circ}{2} = 200^\circ$$

$$\frac{\pi}{20} \text{ rad} = \frac{(180^\circ)}{20} = 9^\circ$$

$$\frac{4\pi}{3} \text{ rad} = \frac{4(180^\circ)}{3} = \frac{720^\circ}{3} = 240^\circ$$

Resolução do Exercício 2: [E]

Considere a figura.



A cada 5 minutos corresponde um ângulo de $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Logo, $\theta + \alpha = 30^\circ$, sendo α o

resultado pedido.

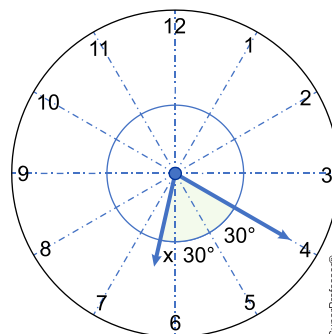
Por outro lado, como o ângulo θ corresponde ao deslocamento do ponteiro das horas, em 20 minutos, segue que

$$\theta = \frac{20 \text{ min} \cdot 30^\circ}{60 \text{ min}} = 10^\circ.$$

Desse modo,

$$10^\circ + \alpha = 30^\circ \Leftrightarrow \alpha = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ rad}.$$

Resolução do Exercício 3: [D]



Quando o relógio marca 6h20min, a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio será dada por:

$$\alpha = 30^\circ + 30^\circ + x$$

Determinando o valor de x através de uma regra de três simples e diretamente proporcional, temos:

Ponteiro das horas	Ponteiro dos minutos
30°	60 minutos
x	20 minutos

Portanto:

$$\frac{30}{x} = \frac{60}{20} \Rightarrow x = 10^\circ$$

Logo:

$$\alpha = 30^\circ + 30^\circ + 10^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 70^\circ}$$

Resolução do Exercício 4: [D]

$$900^\circ = 180^\circ + 2.360^\circ$$

Ou seja, 900° equivale a 2 voltas completas mais meia volta.

Resolução do Exercício 5: [27]

01) Verdadeiro

Dividindo 4555° por 360° obtemos quociente 12 e resto 235°

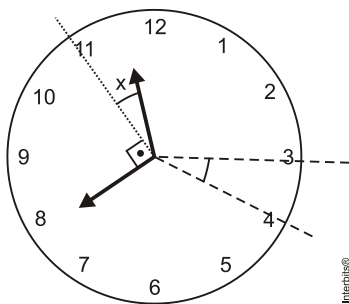
Concluimos, então que o arco tem extremidade no terceiro quadrante.

Dividindo 4195° por 360 obtemos quociente 11 e resto 235°

Concluimos, então que 4555° é côngruo de 4195°

Logo a resposta **E** é a correta.

02) Verdadeiro



Considere α a medida do ângulo procurado e calculando x , temos:

ponteiro das horas	ponteiro dos minutos
30°	60 min
x	40 min

Por tanto, $x = 20^\circ$

Logo, $\alpha = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$

04) Falso

$$\begin{cases} 400^\circ \div 360^\circ = 1(\text{voltas}) \rightarrow \text{resto}(40^\circ) \\ 930^\circ \div 360^\circ = 2(\text{voltas}) \rightarrow \text{resto}(210^\circ) \end{cases}$$

08) Verdadeiro

$$540^\circ : 360^\circ = 1,5 \text{ voltas}$$

$$900^\circ : 360^\circ = 2,5 \text{ voltas}$$

16) Verdadeiro

Sabendo que $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ e $\pi \cong 3,14$, temos

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{3,14} \cong 57,32^\circ.$$

Portanto, segue que $50^\circ < \alpha < 60^\circ$.

Resolução do Exercício 6: [A]

Sendo

$$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

e

$$-\frac{43\pi}{6} = -6\pi - \frac{7\pi}{6} \equiv 2\pi - \frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

podemos concluir que a resposta é

$$\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Resolução do Exercício 7: [11]

[01] Correto. O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio à 1h 40min é dado por $5 \cdot 30^\circ + 20^\circ = 170^\circ$.

[02] Correto. Como $60 \text{ km/h} = 1000 \text{ m/min}$, o trem percorre, em 1 minuto, um arco de $\frac{1000 \cdot 1}{500} = 2 \text{ rad}$.

[04] Incorreto. Um arco de 160° corresponde a $\frac{160\pi}{180} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad}$. Logo, tomando $\pi \cong 3,14$, segue que o raio da praça é dado por $\frac{120}{8 \cdot 3,14} \cong 43 \text{ m}$. Portanto, o diâmetro da praça é, aproximadamente, igual a 86 m.

[08] Correto. Em 50 minutos, o ponteiro dos minutos de um relógio percorre $\frac{50}{60} \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$.

Resolução do Exercício 8: [A]

O menor caminho, por inspeção, corresponde ao comprimento de 8 segmentos de reta de medida igual a 1, somado ao comprimento do arco definido pelo ângulo central de

$$\frac{4\pi}{6} \cdot 1 = \frac{2\pi}{3} \text{ rad e raio 1, ou seja, } \frac{2\pi}{3} + 8.$$

Resolução do Exercício 9: [A]

$$\omega = \frac{2\pi}{25} = 0,24 \text{ m/h}$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$v_{T1} = 0,24 \cdot 50 = 12$$

$$v_{T2} = 0,24 \cdot 100 = 24$$

$$v_{T3} = 0,24 \cdot 150 = 36$$

Resolução do Exercício 10: [29]

[01] Verdadeira. A medida angular de um arco de circunferência é dada pelo valor do ângulo central que forma esse arco.

[02] Falsa. O ângulo central que forma o arco é numericamente igual à medida angular desse arco, e não do seu comprimento.

[04] Verdadeira. Como $45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, o raio da circunferência é:

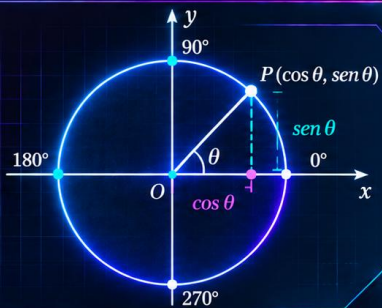
$$C = \theta R \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} R \Rightarrow R = 1$$

[08] Verdadeira. O ângulo de -300° é congruente a:

$$-300^\circ + 360^\circ = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

[16] Verdadeira. A medida do arco descrito é dada por:

$$M = 2\pi R \cdot \frac{\theta}{360^\circ} = 2\pi \cdot 1,1 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} \Rightarrow M = \frac{11\pi}{20} \text{ m}$$



TRIGONOMETRIA

AULA 04

SENO E COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

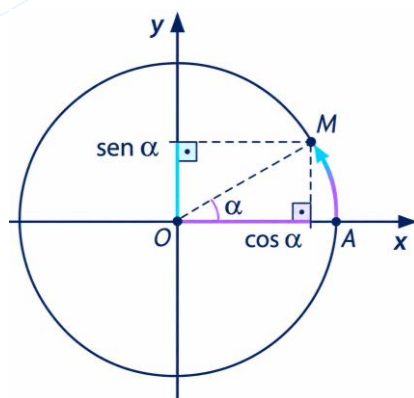


ASSISTA À AULA



Definições

Seja α medida do arco AM na circunferência trigonométrica a seguir:



O seno de α é a ordenada do ponto M.

O cosseno de α é a abscissa do ponto M.

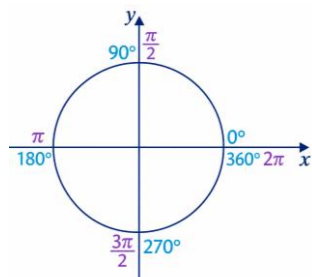
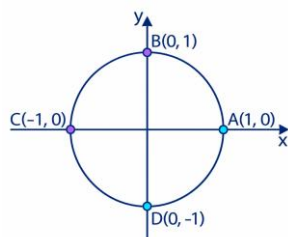
O eixo vertical é chamado de **eixo dos senos** e o eixo horizontal é chamado de **eixo dos cossenos**.

Observe que seno e cosseno assumem valor máximo igual a 1 e mínimo iguais a -1 visto que o raio da circunferência trigonométrica tem medida unitária.

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \text{ e } -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

Seno e cosseno de alguns arcos

Arcos Extremos – Pontos dos eixos (A, B, C, D)



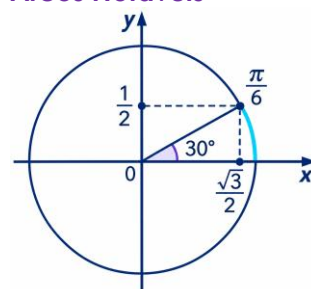
Ponto A: $\begin{cases} \cos 0^\circ = \cos 0 = 1 \\ \sin 0^\circ = \sin 0 = 0 \end{cases}$

Ponto B: $\begin{cases} \cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$

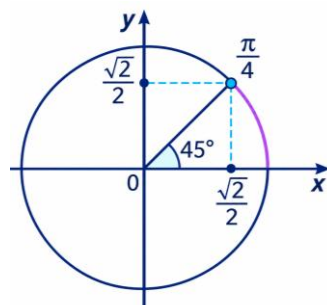
Ponto C: $\begin{cases} \cos 180^\circ = \cos \pi = -1 \\ \sin 180^\circ = \sin \pi = 0 \end{cases}$

Ponto D: $\begin{cases} \cos 270^\circ = \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \\ \sin 270^\circ = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \end{cases}$

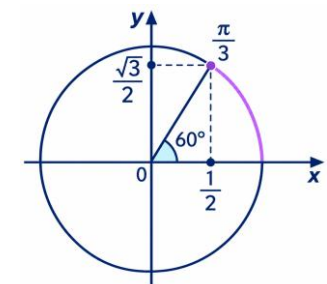
Arcos Notáveis



$$\begin{cases} \cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Medida do arco	0° (0)	30° ($\frac{\pi}{6}$)	45° ($\frac{\pi}{4}$)	60° ($\frac{\pi}{3}$)	90° ($\frac{\pi}{2}$)	180° (π)	270° ($\frac{3\pi}{2}$)	360° (2π)
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



Arcos Simétricos

Em graus:

2º QUADRANTE:

$$\begin{cases} \cos(180^\circ - x) = -\cos x \\ \sin(180^\circ - x) = \sin x \end{cases}$$

3º QUADRANTE:

$$\begin{cases} \cos(180^\circ + x) = -\cos x \\ \sin(180^\circ + x) = -\sin x \end{cases}$$

4º QUADRANTE:

$$\begin{cases} \cos(360^\circ - x) = \cos x \\ \sin(360^\circ - x) = -\sin x \end{cases}$$

Em radianos:

2º QUADRANTE:

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

3º QUADRANTE:

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$

4º QUADRANTE:

$$\begin{cases} \cos(2\pi - x) = \cos x \\ \sin(2\pi - x) = -\sin x \end{cases}$$



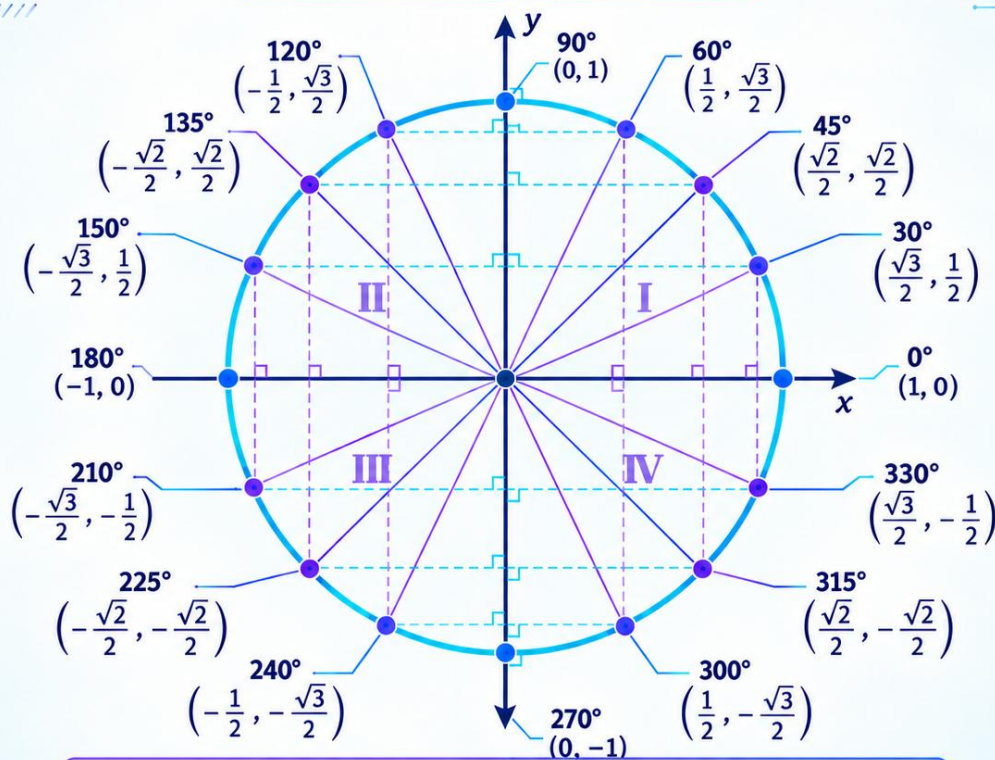
$$\begin{cases} \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 225^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

SENO E COSSENO DOS ARCOS NOTÁVEIS

Em cada ponto: $(\cos \theta, \sin \theta)$



--- PROJEÇÃO NO EIXO x: COSSENO

--- PROJEÇÃO NO EIXO y: SENO

QI: (+, +) QII: (-, +) QIII: (-, -) QIV: (+, -)



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Determine a soma dos números associados às proposições verdadeiras:

01. O valor numérico da expressão $\frac{\sin 90^\circ \cdot \cos 0^\circ + \cos 180^\circ \cdot \sin 270^\circ}{\sin^2 0^\circ + \cos^2 180^\circ}$ é 2.

02. Sendo $A = 60^\circ$ e $B = 120^\circ$, temos $\sin B = \sin A$ e $\cos B = -\cos A$

04. Se $A + B = 360^\circ$, então $\sin A = \sin B$

08. A equação $\sin x = 2m - 9$ admite solução para $4 \leq m \leq 5$

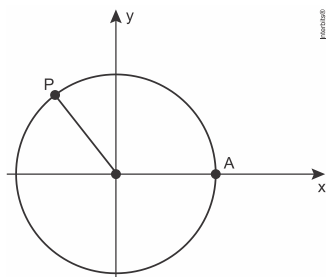
16. $\cos 165^\circ + \sin 155^\circ - \sin 25^\circ + \cos 15^\circ = 0$

32. $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$

64. $\cos 250^\circ = \cos 70^\circ$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. (UERJ – RJ) O círculo a seguir tem o centro na origem do plano cartesiano xy e raio igual a 1. Nele, AP determina um arco de 120°



As coordenadas de P são:

a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

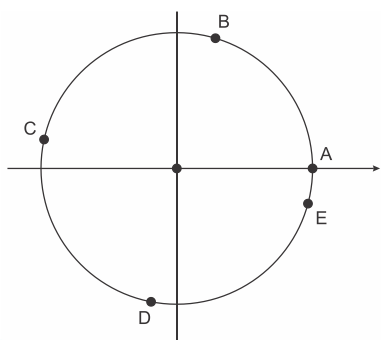
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Determine o seno de 1935° e marque a opção correta.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (UFJF – MG) Considere o ciclo trigonométrico, os pontos A, B, C, D, E e os números b, c, d, e conforme a figura abaixo



$$\begin{aligned} b &= \cos \widehat{AB} \\ c &= \cos \widehat{AC} \\ d &= \cos \widehat{AD} \\ e &= \cos \widehat{AE} \end{aligned}$$

A relação correta entre b, c, d, e:

- a) $c < d < b < e$
 b) $c < b < e < b$
 c) $b < e < c < d$
 d) $d < b < c < e$
 e) $d < e < b < c$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. O valor de $\cos(2.280^\circ)$ é

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2

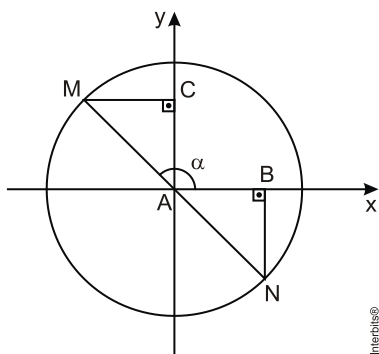


6. (PUC – RJ) Seja $x = 12\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Assinale o valor de x :

- a) -3 b) -1 c) 0 d) π

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (CEFET – MG) A figura abaixo representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo α mede $\frac{5\pi}{6}$ radianos.



A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é

- a) $26\sqrt{3}$. b) $\sqrt{3}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UPF – RS) Reescrevendo os dados da tabela em forma de matriz, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 11,75 & 24,5 & 6,7 \\ 2,4 & 12 & 1,2 \\ 3,06 & 14,6 & 1,44 \end{bmatrix}$$

Considerando que a_{ij} , com $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$, são os elementos da matriz

A, então $\cos\left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{33}}\pi\right)$ rad vale:

- a) $-\frac{1}{2}$ b) -1 c) 0 d) 1 e) $\frac{1}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (ENEM) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot \cos(0,06t)}$$

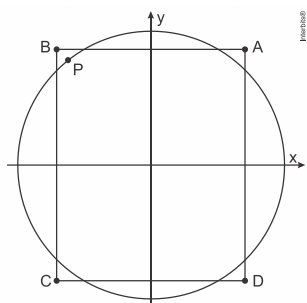
Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r , no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S .

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

- a) 12 765 km. b) 12 000 km. c) 11 730 km. d) 10 965 km. e) 5 865 km.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (INSPER) Na figura, em que está representada a circunferência trigonométrica, P é a extremidade de um arco trigonométrico da 1ª volta cuja medida, em radianos, é igual a α . Observe que P é um ponto do 2º quadrante localizado no interior do retângulo $ABCD$.



As coordenadas dos vértices do retângulo são dadas por:

$$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad D = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Assim, é necessariamente verdadeira a desigualdade

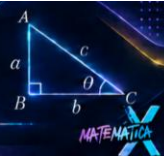
- a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$ e) $\pi < \alpha < \frac{7\pi}{6}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 04

<div><div><div>$\text{sen}(\theta)$$\text{cos}(\theta)$$\text{tg}(\theta)$</div></div><div></div></div>										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		59	A	A	A	A	A	B	A	B
1	B									

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 04



Resolução do Exercício 1: [59]

01. (V)

$$\frac{\sin 90^\circ \cdot \cos 0^\circ + \cos 180^\circ \cdot \sin 270^\circ}{\sin^2 0^\circ + \cos^2 180^\circ} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{0^2 + (-1)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

02. (V)

Como A e B são suplementares segue que $\sin B = \sin A$
 $\cos B = -\cos A$

04. (F)

Observe que $\sin 330^\circ \neq \sin 30^\circ$

08. (V)

$$-1 \leq 2m - 9 \leq 1$$

$$8 \leq m \leq 10$$

$$4 \leq m \leq 5$$

16. (V)

$$(\cos 165^\circ + \sin 155^\circ - \sin 25^\circ + \cos 15^\circ) = -\cos 15^\circ + \sin 25^\circ - \sin 25^\circ + \cos 15^\circ = 0$$

32. (V)

$$\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 140^\circ) = \sin 40^\circ$$

64. (F)

O sinal está errado

Resolução do Exercício 2: [A]

Calculando:

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

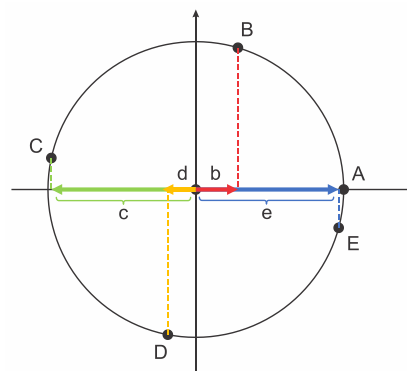
Resolução do Exercício 3: [A]

Temos que:

$$\sin(1935^\circ) = \sin(5 \cdot 360^\circ + 135^\circ) = \sin(135^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolução do Exercício 4: [A]

Localizando o cosseno de cada um dos arcos no ciclo trigonométrico, obtemos:



$$\begin{aligned} b &= \cos \widehat{AB} \\ c &= \cos \widehat{AC} \\ d &= \cos \widehat{AD} \\ e &= \cos \widehat{AE} \end{aligned}$$

Logo: $c < d < b < e$

Resolução do Exercício 5: [A]

$$2.280^\circ = 360^\circ \cdot 6 + 120^\circ$$

$$\text{Logo, } \cos(2.280^\circ) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

Resolução do Exercício 6: [A]

Temos que:

$$\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{16\pi}{3} - 4\pi\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

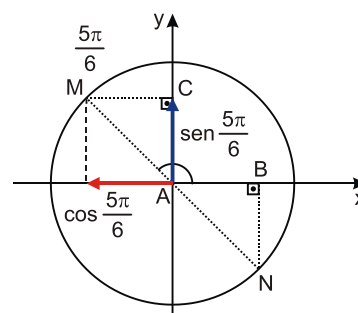
Logo:

$$x = 12 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -3$$

Resolução do Exercício 7: [B]



$$AB = -\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Resolução do Exercício 8: [A]

Sabendo que $\cos(k \cdot 2\pi + \alpha) = \cos \alpha$, com $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$ e $\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$, sendo β um arco do segundo quadrante, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{33}} \pi\right) &= \cos\left(\frac{12 - 2,4}{1,44} \pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{9,60\pi}{1,44}\right) \\ &= \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 9: [B]

Maior valor ($\cos(0,06t) = -1$) $\Rightarrow$

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot (-1)} = 6900$$

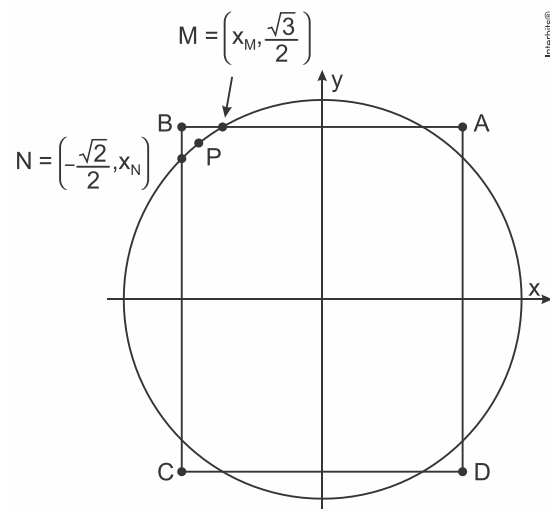
Menor valor ($\cos(0,06t) = 1$) $\Rightarrow$

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot (1)} = 5100$$

Somando, temos:

$$6900 + 5100 = 12000$$

Resolução do Exercício 10: [B]



O ponto M tem a mesma ordenada que o ponto B , portanto o seno do arco do segundo

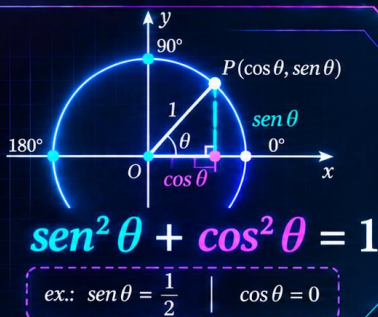
quadrante com extremidade em M é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Portanto, este arco mede $\frac{2\pi}{3}$ rad.

O ponto N tem a mesma abscissa que o ponto B , portanto o cosseno do arco do segundo quadrante com extremidade em N é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, este arco mede $\frac{3\pi}{4}$ rad.

Portanto, $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.



TRIGONOMETRIA

AULA 05

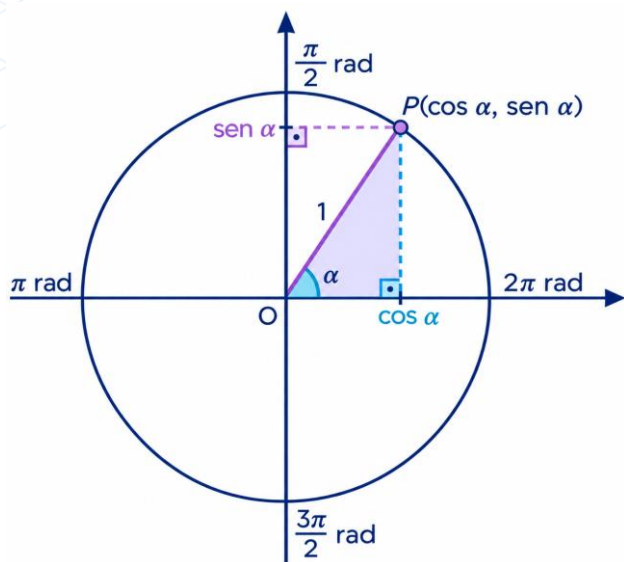
RELAÇÃO FUNDAMENTAL - EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



ASSISTA À AULA



Relação Fundamental da Trigonometria



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo cinza, obtém-se:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

A relação vista também vale para arcos com extremidades fora do primeiro quadrante.

EXEMPLO

Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{sen}(x) = \frac{12}{13}$, calcular $\text{cos}(x)$.

Solução:

$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \text{cos}^2 x = 1$$

$$\text{cos}^2 x = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\text{cos}^2 x = \frac{25}{169} \rightarrow \text{cos} x = \pm \frac{5}{13}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos:

$$\text{cos} x = -\frac{5}{13}$$

Equações Trigonômétricas

Equações Trigonômétricas são aquelas na qual a incógnita faz parte do arco de alguma função trigonométrica. São exemplos de equações trigonométricas:

$$1) \text{cos} x = 1$$

$$2) 2\text{sen}^2 x + 3\text{cos} x - 2 = 0$$

Não é possível estabelecer um método para resolver todas equações trigonométricas, pois existe uma infinidade, para isso apresentaremos alguns tipos básicos.

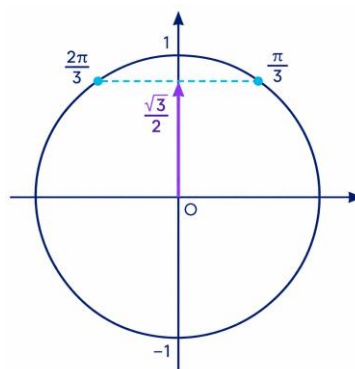
Equações da forma $\text{sen} x = m$

Resolver equações da forma $\text{sen} x = m$ ($-1 \leq m \leq 1$) significa definir os valores de x cujo seno seja igual ao valor de m . Acompanhe o exemplo abaixo:

Resolver a equação $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

Observe que os pontos A e B são extremidades dos arcos cujos senos são iguais a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



No intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ a equação possui duas soluções:

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$



A solução geral, caso o enunciado não forneça o intervalo dado é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

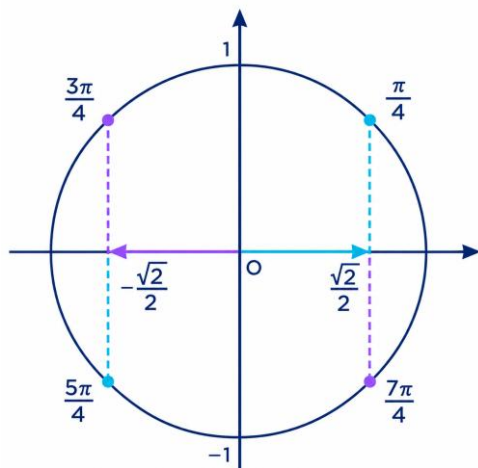
Equações da forma $\cos x = m$

Resolver equações da forma $\cos x = m$ ($-1 \leq m \leq 1$) significa definir os valores de x cujo cosseno seja igual ao valor de m . Acompanhe o exemplo abaixo:

Resolver a equação $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Observe que os pontos A e B são extremidades dos arcos cujos cossenos são iguais a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



No intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ a equação $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

possui duas soluções: $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

No entanto, precisamos encontrar os arcos simétricos aos citados acima visto que procuramos os valores de x que façam o cosseno ser $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pela simetria de arcos vistos

na aula 3, temos:

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

A solução geral, caso o enunciado não forneça o intervalo dado é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Observe que $\frac{5\pi}{4}$ e $-\frac{3\pi}{4}$ são arcos côngruos.

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

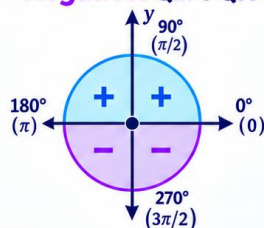
$$0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0^\circ \leq x < 360^\circ$$

SENO

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$x = \alpha \text{ ou } x = \pi - \alpha$$

Positivo: QI e QII
Negativo: QIII e QIV



Exemplo:

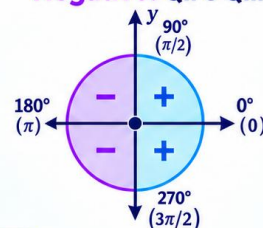
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3}$$

COSSENO

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$x = \alpha \text{ ou } x = 2\pi - \alpha$$

Positivo: QI e QIV
Negativo: QII e QIII



Exemplo:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4}$$



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Observe os itens abaixo:

I. Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{12}{13}$, o valor de $\cos(x)$ é $-\frac{5}{13}$

II. Se $\cos(\alpha) = -\frac{1}{4}$ e α é um ângulo do terceiro quadrante, então, o valor de $\sin \alpha$ é igual a $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

III. Se $\sin x = \frac{2}{\sqrt{6}}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então o valor de $\cos x$ é $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

IV. Se $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ e α é um ângulo do quarto quadrante, então, o valor de $\sin \alpha$ é igual a $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

Está(ão) correto(s) o(s) item(ns):

- a) Somente I e II
- b) Somente I e IV
- c) Todos estão corretos
- d) Somente I, II e III
- e) Somente I, II e IV

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



2. Resolver, no intervalo $0 \leq x < 2\pi$, as seguintes equações:

a) $\sin x = -1$

b) $\cos x = 0$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin x = -\frac{1}{2}$

e) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Determine, em graus, o valor real x , que satisfaz a equação: $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. (UEG – GO) Sabendo-se que $\sin(x) = \frac{1}{2}$ e que x é um ângulo do 1º quadrante, o valor da expressão $\sin(4x) - \cos(4x)$ é

- a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ d) 2

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (INTEGRADO MEDICINA) Pedro é professor de matemática e propôs um desafio aos seus alunos, no qual daria um ponto extra na média de quem conseguisse dizer o número de raízes da seguinte equação trigonométrica:

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Sabendo que $0 \leq x \leq 360^\circ$.

João conseguiu acertar o desafio! Qual foi a resposta de João?

- a) 3. b) 4. c) 0. d) 1. e) 2.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (PUC – RS) Para representar os harmônicos emitidos pelos sons dos instrumentos da orquestra, usam-se funções trigonométricas.

A expressão $2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 5$ envolve estas funções e, para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seu valor de é:

- a) -7 b) -3 c) -1 d) $2\pi - 5$ e) $3\pi - 5$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (ACAFE – SC) Assinale o valor correto de k , sendo $\sin x = 1 + 4k$ e $\cos x = 1$, com $k \in \mathbb{R}$.

- a) 2 b) 4 c) $-\frac{1}{4}$ d) -4

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. Sendo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$, então x vale

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{5}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{5\pi}{6}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

9. Determine o maior valor de a , de forma que se tenha simultaneamente $\operatorname{sen} x = \frac{1}{a}$ e $\operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{a+1}}{a}$, com $0 \leq x \leq 90^\circ$.
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. Se $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$ é igual a:

- a) -0,5 b) 1,5 c) -0,25 d) 0,4 e) -0,4

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

11. (ACAFE – SC) O número de soluções da equação $2\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x) = 1$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é

- a) 2 b) 3 c) 1 d) nenhum

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



12. Qual é o valor da soma $S = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

13. (UFTM) Dado um triângulo isósceles de lados congruentes medindo 20 cm, e o ângulo α formado por esses dois lados, tal que $4\sin\alpha = 3\cos\alpha$, determine:

- a) O valor numérico de $\sin\alpha$.
b) O perímetro desse triângulo.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

14. (UECE – CE) A soma dos elementos do conjunto formado por todas as soluções, no intervalo $[0, 2\pi]$, da equação $2\sin^4(x) - 3\sin^2(x) + 1 = 0$ é igual a

- a) 3π . b) 4π . c) 5π . d) 6π .

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

15. (UPF – RS) A quantidade de soluções que a equação trigonométrica $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ admite no intervalo $[0, 3\pi]$ é:

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 05



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	*	30	C	B	B	C	A	C
1	C	A	E	*	D	D				

2) a) $S = \left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}$ b) $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ c) $S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$

d) $\left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ e) $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ f) $\left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$

13) a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. b) $4(10 + \sqrt{10})\text{cm}$

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 05

Resolução do Exercício 1: [D]

I. Correto

Usando a relação fundamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\cos^2 x = \frac{25}{169} \rightarrow \cos x = \pm \frac{5}{13}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos: $\cos x = -\frac{5}{13}$

II. Correto

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como α pertence ao terceiro quadrante, segue

$$\text{que: } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

III. Correto

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

IV. Falso

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{16} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como α pertence ao quarto quadrante, segue

$$\text{que: } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Resolução do Exercício 2:

$$a) S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\} \quad b) S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \quad c) \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\} \quad d) \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

$$e) \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\} \quad f) \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$$

Resolução do Exercício 3: [30]

$$2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$\sin x = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin x = 2 \text{ (não serve)}$$

$$\text{No intervalo dado, } \sin x = \frac{1}{2} \text{ para } x = 30^\circ.$$

Resolução do Exercício 4: [C]

Se $\sin(x) = \frac{1}{2}$ e está no 1º quadrante, então $x = 30^\circ$. Logo, $4x = 2 \cdot 60^\circ$. Desenvolvendo a equação dada, tem-se:

$$\begin{aligned} \sin(4x) - \cos(4x) &= \sin(120^\circ) - \cos(120^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 5: [B]

Aplicando a relação fundamental e resolvendo, chegamos a:

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1 \Rightarrow 2 - 2\sin^2 x - \sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{OU} \quad \sin x = -1$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Ou seja, a equação possui 3 soluções no intervalo dado.

Resolução do Exercício 6: [B]

$$2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 5 = 2 \times (\sin^2 x + \cos^2 x) - 5 = 2 \times 1 - 5 = -3.$$

Resolução do Exercício 7: [C]

$$\cos x = 1 \rightarrow \sin x = 0$$

$$\text{Então: } 1 + 4k = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

Resolução do Exercício 8: [A]

$$2\sin^2 x - 3\cos x = 0$$

$$2 \cdot (1 - \cos^2 x) - 3 \cdot \cos x = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x - 3 \cdot \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + 3 \cdot \cos x - 2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau na incógnita $\cos x$, temos:

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -2 \text{ (não convém)}$$

Portanto, o valor pedido é $x = \frac{\pi}{3}$.

Resolução do Exercício 9: [C]

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{a+1}}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{a+1}{a^2} = 1 \Rightarrow a+2 = a^2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Resolução do Exercício 10: [C]

$$\text{I) } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ e}$$

$$\text{II) } \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ elevando ao quadrado, vem:}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{2}{4}$$

$$1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin x \cdot \cos x = -0,25$$

Resolução do Exercício 11: [A]

Temos uma equação do segundo grau na incógnita

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$$

$$\sin x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \sin x = 1 \text{ ou } \sin x = -\frac{1}{2}$$

Temos, então, três soluções para $0 \leq x \leq 360^\circ$.

$$x = 90^\circ, x = 210^\circ \text{ e } x = 330^\circ$$

Resolução do Exercício 12: [E]

$$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ; \sin 70^\circ = \cos 20^\circ; \dots$$

Logo:

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ = 1$$

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = 1$$

$$\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ = 1$$

$$\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ = 1$$

$$\therefore 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Resolução do Exercício 13:

a) Sabendo que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e $\cos \alpha = \frac{4}{3} \sin \alpha$, então:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{3} \sin \alpha\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{9} \sin^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

b) Seja ℓ a medida do lado oposto ao ângulo α . Sabendo que $\cos \alpha = \frac{4}{3} \sin \alpha$ e $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,

então $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Logo, pela Lei dos Cossenos, encontramos:

$$\ell^2 = 20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow \ell^2 = 800 - 640$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = 160$$

$$\Rightarrow \ell = 4\sqrt{10} \text{ cm.}$$

Portanto, o perímetro do triângulo é dado por:

$$20 + 20 + 4\sqrt{10} = 4(10 + \sqrt{10}) \text{ cm.}$$

Resolução do Exercício 14: [D]

Se $x \in [0, 2\pi]$, então

$$2\operatorname{sen}^4 x - 3\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\operatorname{sen}^2 x)^2 - 3\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 1 \vee \operatorname{sen} x = -1 \\ \text{ou} \\ \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \left(x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{3\pi}{4}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, tem-se que a resposta é

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 6\pi.$$

Resolução do Exercício 15: [D]

Sabendo que $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, para todo y real, vem

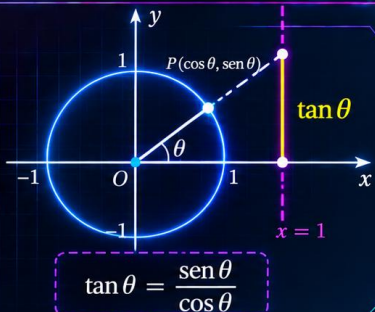
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 1 = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Para $x \in [0, 3\pi]$, a equação $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ possui

as raízes $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$ e $\frac{8\pi}{3}$, enquanto que a

equação $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ possui as raízes $\frac{4\pi}{3}$ e

$\frac{5\pi}{3}$. Desse modo, a resposta é 6.



TRIGONOMETRIA

AULA 06

TANGENTE NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

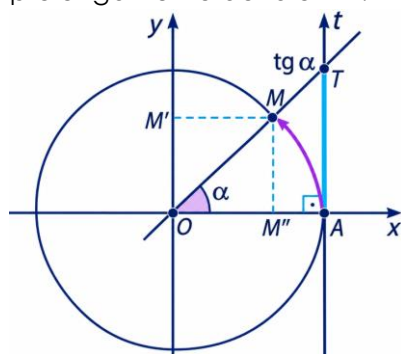


ASSISTA À AULA



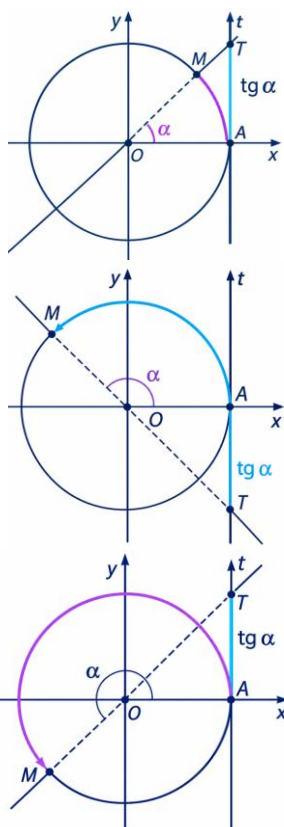
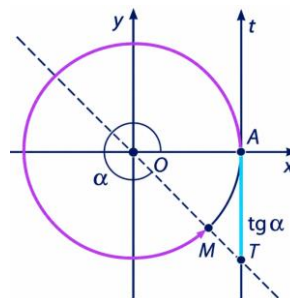
Definição

Considere um arco AM de medida α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$). Define-se como tangente do ângulo α como a ordenada do ponto Q , intersecção do eixo das tangentes com o prolongamento do raio $\overline{OP}$.



$$\operatorname{tg} \alpha = \overline{AT}$$

Sinais da Tangente

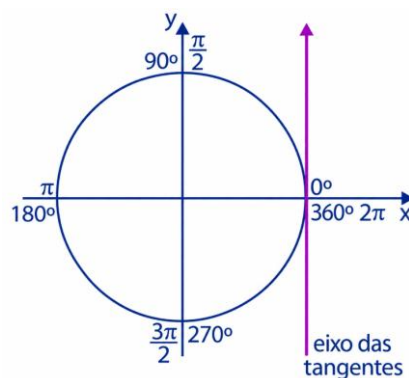


Observe que a tangente assume valores positivos no primeiro e terceiro quadrantes e negativos no segundo e quarto. Abaixo segue um resumo dos sinais das funções seno, cosseno e tangente.



Tangente de alguns arcos

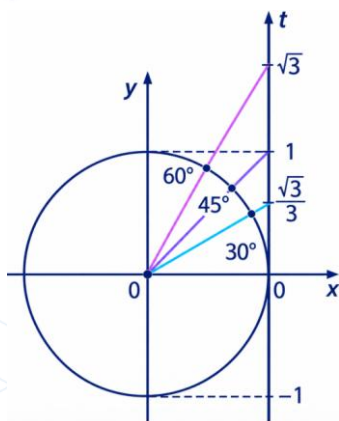
• ARCOS EXTREMOS



É de imediato a verificação das tangentes dos arcos extremos:

α em graus	0°	90°	180°	270°	360°
α em radianos	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Sabemos ainda que:



α em graus	30°	45°	60°
α em radianos	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Arcos Simétricos

Com o auxílio da simetria de arcos, é possível obter, através dos principais arcos, as tangentes de arcos dos demais quadrantes.

Em graus:

2° QUADRANTE: $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

3° QUADRANTE: $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

4° QUADRANTE: $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

Em radianos:

2° QUADRANTE: $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$

3° QUADRANTE: $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

4° QUADRANTE: $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$



$$\begin{cases} \operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 210^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \end{cases}$$

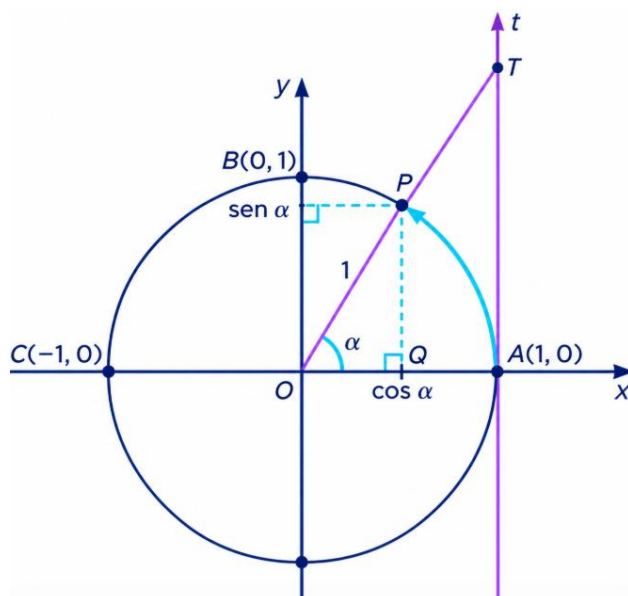
$$\begin{cases} \operatorname{tg} 330^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg} 315^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1 \end{cases}$$

Relação entre tangente, seno e cosseno de um mesmo arco

Seja α a medida de um arco trigonométrico com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$, é sempre válida a relação:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Justificativa:



Note que na figura acima os triângulos OTA e OPQ são semelhantes (os triângulos possuem um ângulo em comum e um ângulo reto).

Então: $\frac{AT}{QP} = \frac{AO}{QO} \rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$

Portanto: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Dados que:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 20^\circ = 0,36 \\ \operatorname{tg} 42^\circ = 0,90 \\ \operatorname{tg} 76^\circ = 4,01 \end{cases}$$

Calcule os valores de:

a) $\operatorname{tg} 160^\circ$

b) $\operatorname{tg} 222^\circ$

c) $\operatorname{tg} 284^\circ$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. O valor de $\operatorname{tg} 1575^\circ$ é:

a) $-\sqrt{3}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) 1

d) -1

e) $\sqrt{3}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Se $\cos(x) = -\frac{12}{13}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então é CORRETO afirmar que o valor de $\operatorname{tg}(x)$ é:

a) $-5/13$

b) $-5/12$

c) $5/13$

d) $5/12$

e) 0,334

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (UDESC – SC) Sendo x um arco do segundo quadrante tal que $\sin x = \frac{3}{7}$, o valor de $\operatorname{tg} x$ é:

a) $\frac{10\sqrt{10}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{20}$

c) $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$

d) $-\frac{3\sqrt{10}}{20}$

e) $-\frac{10\sqrt{10}}{3}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (EFOMM) Considere a matriz quadrada B , de ordem 3, representada abaixo.

$$B = \begin{bmatrix} \sin 210^\circ & \sin 630^\circ & \operatorname{tg} 225^\circ \\ 2 & y & -2 \\ \cos 720^\circ & \cos 1.440^\circ & \operatorname{tg} 180^\circ \end{bmatrix}$$

Se o determinante dessa matriz é igual a 1, o valor de y corresponde a

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. Analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa que aponta as corretas.

I. $\sin 30^\circ = -\sin 930^\circ$.

II. $\cos 30^\circ = \cos 330^\circ$.

III. $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} 240^\circ$.

IV. $A + B > 0$, sendo $A = (\cos a + \cos b)(\cos a - \cos b)$ e $B = (\sin a + \sin b)(\sin a - \sin b)$.

a) Apenas I e II. b) Apenas I e III. c) Apenas II e III. d) Apenas II e IV. e) Apenas III e IV.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UEDESC – SC) Se $\operatorname{tg} 20^\circ = a$, o valor de $\frac{\operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 340^\circ}{\operatorname{tg} 200^\circ}$ é:

a) 2 b) $-a$ c) 0 d) a e) -2

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UEMG – MG) Seja $A = \begin{bmatrix} \sin x & 1 \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$, com $0 < x < 2\pi$ e sabendo que $\det A = 0$, temos que $x =$

a) $\left\{ \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \right\}$ b) $\left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$ c) $\left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$ d) $\left\{ \frac{\pi}{4} \right\}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

9. (UEPG – PR) Considerando que $A = \cos(x)$ e $B = \operatorname{tg}(x)$, em que $\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{5}$ e $x \in 3^\circ$ quadrante, assinale o que for correto.

01. $A \cdot B = -\frac{1}{5}$.

02. $A^2 + B^2 > 0$.

04. $A + B$ é um número irracional.

08. $A < 0$ e $B > 0$.

16. $B^2 < 1$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UFPR – PR) Seja x um arco no primeiro quadrante.

a) Encontre o valor de $\operatorname{sen}(x)$ sabendo que $\cos(x) = \frac{3}{8}$.

b) Encontre o valor de $\operatorname{sen}(x)$, sabendo que $8\operatorname{tg}(x) = 3\cos(x)$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 06

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		*	D	D	D	B	A	E	B	31
1	*									

1) a) -0,36 | b) 0,90 | c) -4,01 10) a) $\frac{\sqrt{55}}{8}$ | b) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 06



Resolução do Exercício 1:

$$a) \operatorname{tg} 160^\circ = -\operatorname{tg} 20^\circ = 0,36$$

$$b) \operatorname{tg} 222^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ = 0,90$$

$$c) \operatorname{tg} 284^\circ = -\operatorname{tg} 76^\circ = -4,01$$

Resolução do Exercício 2: [D]

$$1575^\circ = 4.360 + 135^\circ$$

$$\operatorname{tg} 1575^\circ = \operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$$

Resolução do Exercício 3: [D]

No terceiro quadrante senos e cossenos são negativos. Utilizando a relação fundamental, temos:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(x) = \pm \sqrt{\frac{25}{169}} \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \pm \frac{5}{13}.$$

Como o arco x tem extremidade no terceiro quadrante, temos: $\operatorname{sen}(x) = -\frac{5}{13}$.

Calculado a tangente de x .

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}.$$

Resolução do Exercício 4: [D]

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\text{Logo: } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{7}}{-\frac{2\sqrt{10}}{7}} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

Resolução do Exercício 5: [B]

Temos que:

$$\operatorname{sen} 210^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} 630^\circ = \operatorname{sen} 270^\circ = -1$$

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$\cos 720^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

$$\cos 1440^\circ = \cos 0^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

Logo:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 2 & y & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$3 - y = 1$$

$$\therefore y = 2$$

Resolução do Exercício 6: [A]

[I] Verdadeira.

$$-\operatorname{sen} 930^\circ = -\operatorname{sen}(210^\circ + 2 \cdot 360^\circ) =$$

$$-\operatorname{sen} 210^\circ = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} 30^\circ$$

[II] Verdadeira.

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

[III] Falsa.

$$\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60^\circ$$

[IV] Falsa.

$$A + B = \cos^2 a - \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

$$A + B = (\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a) - (\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b)$$

$$A + B = 1 - 1 = 0$$

Resolução do Exercício 7: [E]

Tendo $\operatorname{tg} 20^\circ = a$, segue:

$$\operatorname{tg} 160^\circ = -\operatorname{tg} 20^\circ = -a$$

$$\operatorname{tg} 340^\circ = -\operatorname{tg} 20^\circ = -a$$

$$\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ = a$$

$$\frac{\operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 340^\circ}{\operatorname{tg} 200^\circ} = \frac{-a - a}{a} = -2$$

Resolução do Exercício 8: [B]

Calculando o determinante da matriz, obtemos:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 1 \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

Resolução do Exercício 9: [31]

Se $A = \cos x$ e $B = \operatorname{tg} x$, então

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Leftrightarrow B = \frac{\operatorname{sen} x}{A} \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = A \cdot B.$$

[01] Verdadeira. Com efeito, se $\operatorname{sen} x = A \cdot B$ e $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{5}$, então $A \cdot B = -\frac{1}{5}$.

[02] Verdadeira. De fato, se $x \in 3^\circ$ quadrante, então $\cos x < 0$ e $\operatorname{tg} x > 0$. Logo, temos $A^2 + B^2 = \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x > 0$.

[04] Verdadeira. Com efeito, se $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{5}$ e $x \in 3^\circ$ quadrante, então

$$\cos x = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} \\ = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Desse modo, vem

$$\operatorname{tg} x = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} \\ = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

É claro que $A + B = -\frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{6}}{12}$ é irracional.

[08] Verdadeira. De fato, conforme mostramos em [02].

[16] Verdadeira. Com efeito, pois

$$B^2 = \operatorname{tg}^2 x = \left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \frac{1}{24} < 1.$$

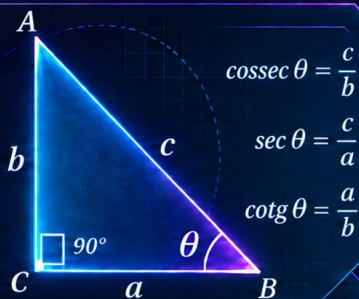
Resolução do Exercício 10:

a) Sabendo que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para todo α real e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} \\ = \frac{\sqrt{55}}{8}.$$

b) Se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $0 < \operatorname{sen} x < 1$ e, portanto, vem

$$8 \operatorname{tg} x = 3 \cos x \Rightarrow 8 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 3 \cos x \\ \Rightarrow 8 \operatorname{sen} x = 3 \cos^2 x \\ \Rightarrow 3 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x - 3 = 0 \\ \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{3}.$$



$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{c}{b}$$

$$\sec \theta = \frac{c}{a}$$

$$\cotg \theta = \frac{a}{b}$$

TRIGONOMETRIA

AULA 07

COSSECANTE - SECANTE - COTANGENTE

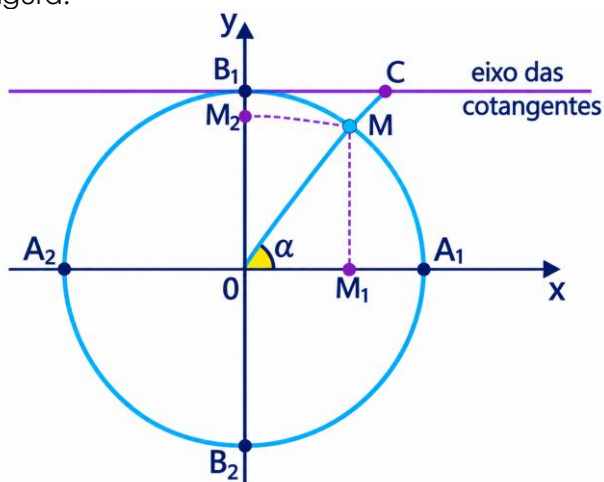


ASSISTA À AULA



1. Cotangente de um arco trigonométrico

Considere a circunferência trigonométrica da figura.



Seja um arco AM de medida α ($\alpha \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$). Define-se como cotangente do ângulo α como a abscissa do ponto C , intersecção do eixo das cotangentes com o prolongamento do raio $\overline{OM}$.

$$\cotg \alpha = \overline{B_1C}$$

- Observe que se α assumir os valores 0° , 180° ou 360° o ponto M estará em A_1 ou A_2 e, logo a reta $\overline{OM}$ ficará paralela ao eixo das cotangentes, sendo assim, a $\cotg \alpha$ não estará definida.
- Observe que os triângulos OM_1M e CB_1O são semelhantes, então:

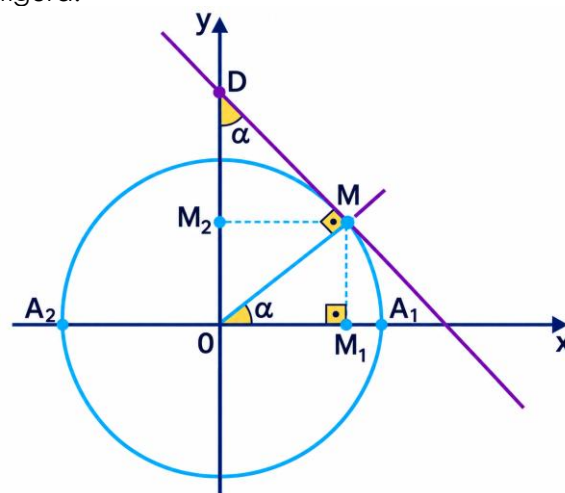
$$\frac{OM_1}{B_1C} = \frac{M_1M}{B_1O} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\cotg \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1}$$

Logo:
$$\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tg \alpha}$$

- Note que as variações dos sinais de $\cotg \alpha$, segundo cada quadrante, são idênticas às variações de sinais de $\tg \alpha$.

2. Cossecante de um arco trigonométrico

Considere a circunferência trigonométrica da figura.



Seja um arco AM de medida α ($\alpha \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$).

Considere uma reta tangente ao circunferência trigonométrica no ponto M e seja D sua intersecção com o eixo y (eixo dos senos). Define-se como cossecante do ângulo α a ordenada do ponto D .

$$\operatorname{cossec} \alpha = \overline{OD}$$

- Observe que se α assumir os valores 0° , 180° ou 360° o ponto M estará em A_1 ou A_2 e, logo a reta $\overline{OM}$ ficará paralela ao eixo y (eixo dos senos), sendo assim, a $\operatorname{cossec} \alpha$ não estará definida.
- Observe que os triângulos OM_1M e DMO são semelhantes, então:

$$\frac{OM}{DO} = \frac{M_1M}{MO} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{cossec} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1}$$

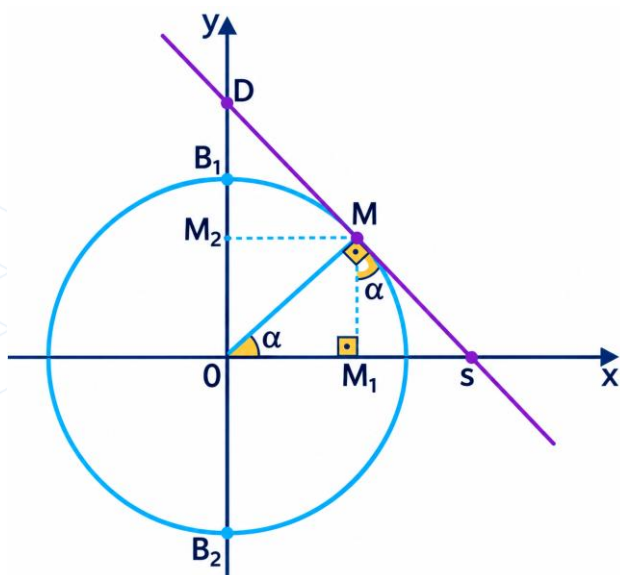
Logo:
$$\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

- Note que as variações dos sinais de $\operatorname{cossec} \alpha$, segundo cada quadrante, são idênticas às variações de sinais de $\sin \alpha$.



3. Secante de um arco trigonométrico

Considere a circunferência trigonométrica da figura.



Seja um arco AM de medida α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$). Considere uma reta tangente à circunferência trigonométrica no ponto M e seja S sua intersecção com o eixo x (eixo dos cossenos). Define-se como secante do ângulo α a abscissa do ponto S .

$$\sec \alpha = \overline{OS}$$

- Observe que se α assumir os valores 90° ou 270° o ponto M estará em B_1 ou B_2 e, logo a reta $\overline{OM}$ ficará paralela ao eixo y (eixo dos senos), sendo assim, a $\sec \alpha$ não estará definida.
- Observe que os triângulos OM_1M e OMS são semelhantes, então:

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{OM}{OS} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{1}{\sec \alpha}$$

Logo:
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

- Note que as variações dos sinais de $\sec \alpha$, segundo cada quadrante, são idênticas às variações de sinais de $\cos \alpha$.

4. Resumo das Relações Trigonômicas

Com as condições de existência estabelecidas, temos:

- $\bullet \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\bullet \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\bullet \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
- $\bullet \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
- $\bullet \operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Sinais

	1ºQ	2ºQ	3ºQ	4ºQ
seno e cossecante	+	+	-	-
cosseno e secante	+	-	-	+
tangente e cotangente	+	-	+	-

Observação:

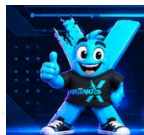
A partir da relação $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ podemos estabelecer duas Identidades trigonométricas:

1) Dividindo ambos os membros da relação fundamental por $\sin^2 x$ tem-se:

- $$1 + \operatorname{cotg}^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$$

2) Dividindo ambos os membros da relação fundamental por $\cos^2 x$ tem-se:

- $$\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Sabendo que $x \in \mathbb{R}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e que $\sin(x) = \frac{4}{5}$, o valor de $y = \sec^2(x) + \tan^2(x)$ é:
- a) $\frac{41}{9}$ b) $\frac{43}{9}$ c) $\frac{41}{7}$ d) $\frac{41}{13}$ e) $\frac{40}{3}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Sabendo que $\sec x = -\sqrt{5}$ e $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ então $\tan x + \cot x$ é igual a:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{2}$ e) 1.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Se $A = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x}$ é um número real, então A é igual a

- a) $2 \operatorname{tg} x$ b) $2 \operatorname{sen} x$ c) $2 \operatorname{cos} x$ d) $2 \operatorname{cotg} x$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. O valor numérico de y na expressão $y = \frac{\operatorname{tg} 240^\circ + \operatorname{cos} 330^\circ}{\operatorname{sen} 870^\circ - \sec 11\pi}$ é:

- a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (ESPECEX) Se θ é um arco do 4º quadrante tal que $\operatorname{cos} \theta = \frac{4}{5}$, então $\sqrt{2 \sec \theta + 3 \operatorname{tg} \theta}$ é igual a

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (UEMG – MG) Se $\sin(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então o valor de $\cotg(x) - \cos(x)$ é igual a

a) $-2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

b) $-2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) $2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) $2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UEG – GO) Dado que $\sin\theta = \frac{1}{5}$, o valor da expressão $\frac{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta - \cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}$ é

a) $7/5$

b) $6/5$

c) $4/5$

d) $3/5$

e) $2/5$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (ACAFE - SC) Se $x \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$ e $\sin x + \cos x = 5^{-1}$, então o valor da expressão

$$\frac{75}{11} \cdot (\sec x + \operatorname{cosec} x - \sin x) \text{ é:}$$

a) $\frac{4}{5}$

b) $-\frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{11}{60}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (UDESC – SC) A expressão $\frac{\sec^2(x)-1}{\operatorname{tg}^2(x)+1} + \frac{\operatorname{cosec}^2(x)+1}{\operatorname{cotg}^2(x)+1}$ é igual a:

a) $1-2\cos^2(x)$

b) $3+2\cos^2(x)$

c) $3+2\sin^2(x)$

d) 1

e) $1+2\sin^2(x)$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UECE – CE) Na trigonometria circular usual, considere os valores dos arcos x para os quais existem e estão bem definidas a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante. Em relação à equação trigonométrica $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$, é correto afirmar que

a) possui uma única solução real.

b) possui exatamente duas soluções reais.

c) possui infinitas soluções reais.

d) não possui solução real.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 07



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		A	D	D	A	B	A	B	C	E
1	D									

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 07

Resolução do Exercício 1: [A]

Se $x \in \mathbb{R}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, e $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$, então

$$\cot^2 x = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 \Rightarrow \cot^2 x = \frac{9}{16}.$$

Daí, vem $\operatorname{tg}^2 x = \frac{16}{9}$ e, portanto, temos

$$\begin{aligned} y &= \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x \\ &= 1 + 2\operatorname{tg}^2 x \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{16}{9} \\ &= \frac{41}{9}. \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 2: [D]

$$\begin{aligned} \sec^2 x &= 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ \sqrt{5}^2 &= 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ \operatorname{tg}^2 x &= 4 \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 2 \text{ (III quadrante)} \\ \operatorname{tg} x &= 2 \text{ e } \cot x = \frac{1}{2} \\ \cot x + \operatorname{tg} x &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 3: [D]

Simplificando:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ A &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ \therefore A &= 2\cot x \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 4: [A]

$$y = \frac{\operatorname{tg} 240^\circ + \cos 330^\circ}{\operatorname{sen} 870^\circ - \sec 11\pi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\operatorname{sen} 150^\circ - \sec \pi} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{3}$$

Resolução do Exercício 5: [B]

Pela relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{16}{25} = 1$$

$$\operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$$

Como o ângulo está no 4º quadrante:

$$\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\sec \theta + 3\operatorname{tg} \theta} &= \sqrt{\frac{2}{\cos \theta} + \frac{3\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} \\ &= \sqrt{\frac{2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 6: [A]

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2(x) \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\cos x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\text{Sabendo que } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \text{ temos } \boxed{\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

Logo:

$$\cot x - \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \cos x$$

$$\cot x - \cos x = \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\boxed{\cot x - \cos x = -2 + \frac{2 \times \sqrt{5}}{5}}$$

Resolução do Exercício 7: [B]

$$\frac{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta - \cos\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\theta + 1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 1 + \operatorname{sen}\theta = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

Resolução do Exercício 8: [C]

Se $\cos x = \frac{1}{5} - \operatorname{sen} x$, então, sabendo que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

vale a relação $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, vem

$$\operatorname{sen}^2 x + \left(\frac{1}{5} - \operatorname{sen} x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 25 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4}{5} \text{ ou } \operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}.$$

Mas $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e, portanto, só pode ser

$$\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}.$$

A resposta é

$$\frac{75}{11} \cdot \left(\frac{5}{4} - \frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) = \frac{75}{11} \cdot \frac{75 - 100 + 36}{60} = \frac{5}{4}.$$

Resolução do Exercício 9: [E]

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + \frac{\operatorname{cosec}^2 x + 1}{\cot^2 x + 1}$$

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\operatorname{sen}^2 x + 1} + \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + 1}{\cos^2 x + 1}$$

$$\frac{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{\operatorname{sen}^2 x + 1} + \frac{\frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}{\cos^2 x + 1}$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + 1} + \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + 1}$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + 1} + \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + 1}$$

$$\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + 1 + \operatorname{sen}^2 x$$

$$1 + 2\operatorname{sen}^2 x$$

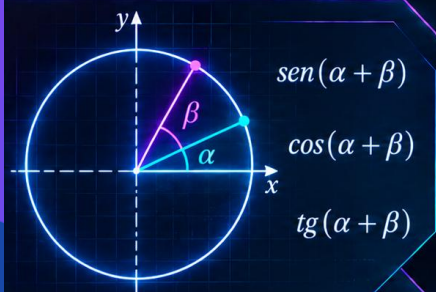
Resolução do Exercício 10: [D]

$$\operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x + 1 + \cot^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x - \cot^2 x = 2$$

$$0 = 2 \text{ (solução vazia)}$$

Portanto, não possui solução.



TRIGONOMETRIA

AULA 08

OPERAÇÃO COM ARCOS



ASSISTA À AULA



1. Cosseno da soma e da diferença

Dados dois arcos trigonométricos **a** e **b**, temos que:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

2. Seno da soma e da diferença

Dados dois arcos trigonométricos **a** e **b**, temos que:

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

3. Tangente da soma e da diferença

Dados os arcos **a**, **b** e **a + b**, temos que:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

Esta fórmula se aplica desde que:

$$\begin{cases} a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dados os arcos **a**, **b** e **a - b**, temos que:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

Esta fórmula se aplica desde que:

$$\begin{cases} a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Consequências – seno e cosseno de arcos complementares

$$\text{I. } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{II. } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Para a demonstração do exposto podemos usar a fórmula do cosseno da diferença, acompanhe:

$$\text{I) } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

II) Substituindo em I x por $\frac{\pi}{2} - x$, vem:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Quadro de Resumo

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb}}{1 \mp \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

EXEMPLO

Calcule o valor de $\cos 105^\circ$.

Solução:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$\cos(60^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(105^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

EXEMPLO

Calcule o valor de $\sin(2\pi - x)$

Solução:

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(2\pi - x) = \sin 2\pi \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 2\pi$$

$$\sin(2\pi - x) = 0 \cdot \cos x - \sin x \cdot 1$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x$$

EXEMPLO

Calcule o valor de $\operatorname{tg} 75^\circ$

Solução:

Aplicando as fórmulas da soma e diferenças de arcos, temos:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ}$$

$$\operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot (1)}$$

$$\operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\right)$$

$$\operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3}$$

$$\operatorname{tg}(75^\circ) = \sqrt{3} + 2$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Calcule o valor de $\sin 105^\circ$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Sabendo que $735^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 15^\circ$, o valor de $\cos 735^\circ$ é

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Calculando o valor de $\sin(2\pi - x)$ obtemos:

a) $\sin x$

b) $-\sin x$

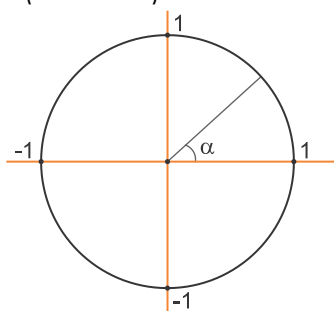
c) $\cos x$

d) $-\cos x$

e) $\sin x + \cos x$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (UERJ – RJ) Observe o ângulo central α do círculo trigonométrico a seguir:



Admitindo que $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, o valor de $\sin(2\pi - \alpha)$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{3}{5}$

d) $-\frac{1}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. Determine o valor das seguintes expressões:

a) $\sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$

b) $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

6. (IFCE – CE) Os números reais α e β são tais que $\operatorname{tg}(\alpha) = 6$ e $\alpha + \beta = 45^\circ$. O valor de $\operatorname{tg}(\beta)$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $-\frac{6}{5}$.

c) $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

e) $-\frac{5}{7}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UDESC – SC) Se em um triângulo ABC o lado oposto ao ângulo C mede 2 cm e os ângulos A e B medem, respectivamente, 60° e 75° , então a área e o perímetro deste triângulo são, respectivamente:

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ e $(3+\sqrt{3}+\sqrt{6}) \text{ cm}$

b) $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ e $(2+\sqrt{3}+\sqrt{6}) \text{ cm}$

c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ e $(1+\sqrt{3}+\sqrt{6}) \text{ cm}$

d) $\frac{3+\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ e $(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \text{ cm}$

e) $(3+\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ e $(3+\sqrt{3}+\sqrt{6}) \text{ cm}$

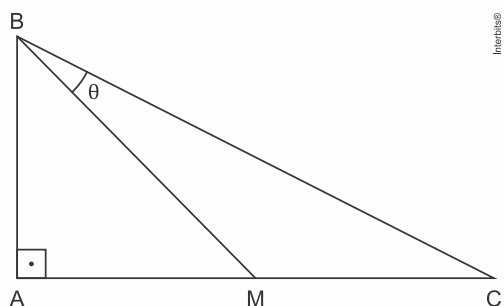
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



8. (UNICAMP – SP) A figura abaixo exhibe o triângulo retângulo ABC, em que $AB = AM = MC$. Então, $\operatorname{tg} \theta$ é igual a



a) $1/2$

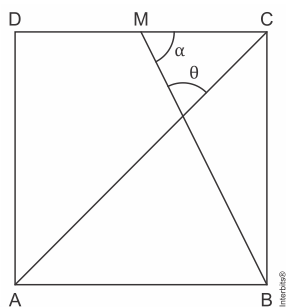
b) $1/3$

c) $1/4$

d) $1/5$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

9. (UNICAMP – SP) A figura abaixo exibe um quadrado ABCD em que M é o ponto médio do lado CD.



Com base na figura, $\text{tg}(\theta) + \text{tg}(\alpha)$ é igual a

- a) 7.
b) 6.
c) 5.
d) 4.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (MACK – SP) Para a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} \cos 17^\circ & 0 & \sin 17^\circ \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 28^\circ & 0 & \cos 28^\circ \end{bmatrix}$ o valor do determinante de M^{10} é

- a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{32}$ c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{1}{128}$ e) $\frac{1}{256}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 08



$\sin(\theta)$

$\cos(\theta)$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		*	C	B	C	*	E	A	B	C
1	B									

1) $\sin(105^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

5) a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 08

Resolução do Exercício 1:

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ$$

$$\sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin(105^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Resolução do Exercício 2: [C]

$$\cos 735^\circ = \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Resolução do Exercício 3: [B]

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(2\pi - x) = \sin 2\pi \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 2\pi$$

$$\sin(2\pi - x) = 0 \cdot \cos x - \sin x \cdot 1$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x$$

Resolução do Exercício 4: [C]

Da relação fundamental, obtemos:

$$\sin^2 a + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 a = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin a = \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\sin a = +\frac{3}{5} \left(0 \leq a < \frac{\pi}{2}\right)$$

Logo:

$$\sin(2\pi - a) = \sin 2\pi \cos a - \sin a \cos 2\pi$$

$$\sin(2\pi - a) = 0 \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 1$$

$$\therefore \sin(2\pi - a) = -\frac{3}{5}$$

Resolução do Exercício 5:

a)

$$\sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ = \sin(50^\circ + 40^\circ)$$

$$\sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ = \sin 90^\circ$$

$$\sin 50^\circ \cdot \cos 40^\circ + \sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ = 1$$

b)

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos(10^\circ + 20^\circ)$$

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos(30^\circ)$$

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolução do Exercício 6: [E]

Sabemos que:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$$

$$\frac{6 + \operatorname{tg} \beta}{1 - 6 \cdot \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} 45^\circ$$

$$\frac{6 + \operatorname{tg} \beta}{1 - 6 \cdot \operatorname{tg} \beta} = 1$$

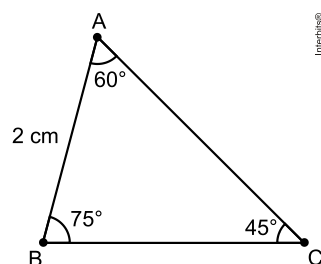
$$6 + \operatorname{tg} \beta = 1 - 6 \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$7 \operatorname{tg} \beta = -5$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{5}{7}$$

Resolução do Exercício 7: [A]

Considere a figura.



Pela Lei dos Senos, obtemos

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \hat{BAC}} = \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{ACB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{6} \text{ cm.}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\
 &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},
 \end{aligned}$$

temos, novamente pela Lei dos Senos, que

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{AC}}{\sin \hat{ABC}} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{ACB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\sin 75^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
 &\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow \overline{BC} = (\sqrt{3} + 1)\text{cm}.
 \end{aligned}$$

Assim, o perímetro do triângulo ABC é dado por

$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{6} = (3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})\text{cm}.$$

Por outro lado, a área é dada por

$$\begin{aligned}
 (ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \hat{BAC} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \text{cm}^2.
 \end{aligned}$$

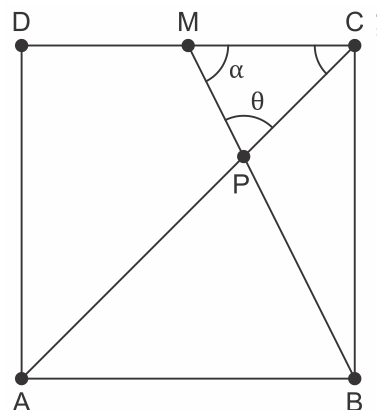
Resolução do Exercício 8: [B]

Como $\overline{AB} = \overline{AM}$, podemos concluir que o triângulo ABM é retângulo isósceles, ou seja, $\hat{ABM} \equiv \hat{BMA} = 45^\circ$. Ademais, $\overline{AB} = \overline{AM} = \overline{MC}$ implica em $\overline{AC} = 2\overline{AB}$. Portanto, do triângulo ABC temos

$$\begin{aligned}
 \text{tg}(45^\circ + \theta) &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\text{tg } 45^\circ + \text{tg } \theta}{1 - \text{tg } 45^\circ \text{tg } \theta} = \frac{2\overline{AB}}{\overline{AB}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1 + \text{tg } \theta}{1 - \text{tg } \theta} = 2 \\
 &\Leftrightarrow \text{tg } \theta = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 9: [C]

Considere a figura, em que P é a interseção de AC e BM



Como AC é diagonal do quadrado, segue que $\hat{DCA} = 45^\circ$.

Sem perda de generalidade, tomemos $\overline{BC} = 2$. Desse modo, como M é ponto médio de CD, vem $\overline{CM} = 1$.

Do triângulo BCM, encontramos

$$\begin{aligned}
 \text{tg } \alpha &= \frac{\overline{BC}}{\overline{CM}} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = \frac{2}{1} \\
 &\Leftrightarrow \text{tg } \alpha = 2.
 \end{aligned}$$

Ademais, do triângulo CMP, vem $\alpha + \theta + 45^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \theta = 135^\circ - \alpha$.

Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
 \text{tg } \theta &= \text{tg}(135^\circ - \alpha) \\
 &= \frac{\text{tg } 135^\circ - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } 135^\circ \cdot \text{tg } \alpha} \\
 &= \frac{-1 - 2}{1 + (-1) \cdot 2} \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

A resposta é $\text{tg } \theta + \text{tg } \alpha = 3 + 2 = 5$.

Resolução do Exercício 10: [B]

$$\text{De } M = \begin{bmatrix} \cos 17^\circ & 0 & \sin 17^\circ \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 28^\circ & 0 & \cos 28^\circ \end{bmatrix},$$

$$\det M = \begin{vmatrix} \cos 17^\circ & 0 & \sin 17^\circ \\ 1 & 1 & 1 \\ \sin 28^\circ & 0 & \cos 28^\circ \end{vmatrix}.$$

Pela regra de Sarrus,

$$\det M = (\cos 17^\circ \cdot 1 \cdot \cos 28^\circ + 0 \cdot 1 \cdot \sin 28^\circ + \sin 17^\circ \cdot 1 \cdot 0) -$$
$$(\sin 17^\circ \cdot 1 \cdot \sin 28^\circ + \cos 17^\circ \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \cos 28^\circ)$$

$$\det M = \cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ$$

$$\det M = \cos(17^\circ + 28^\circ)$$

$$\det M = \cos 45^\circ$$

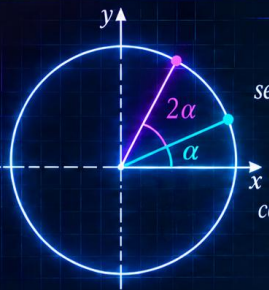
$$\det M = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Então,

$$\det M^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10}$$

$$\det M^{10} = \frac{2^5}{2^{10}}$$

$$\det M^{10} = \frac{1}{32}$$



$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

TRIGONOMETRIA

AULA 09

SENO E COSSENO DO ARCO DUPLO



ASSISTA À AULA



1. Seno do arco duplo

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Justificativa:

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

Fazendo $b = a$, vem:

$$\sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a$$

$$\text{Logo: } \sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

2. Cosseno do arco duplo

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Justificativa:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

Fazendo $b = a$, vem:

$$\cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a$$

$$\text{Logo: } \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

3. Tangente do arco duplo

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \text{tg}(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)}$$

$$\text{Para } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ e } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Justificativa:

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg} a + \text{tg} b}{1 - \text{tg} a \cdot \text{tg} b}$$

Fazendo $b = a$, vem:

$$\text{tg}(a + a) = \frac{\text{tg} a + \text{tg} a}{1 - \text{tg} a \cdot \text{tg} a}$$

$$\text{Logo: } \text{tg } 2a = \frac{2 \cdot \text{tg} a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

EXEMPLO

Sendo $\sin x = \frac{4}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular:

- a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) $\text{tg } 2x$

Solução:

Inicialmente vamos determinar o valor de $\cos x$.

Pela relação fundamental, temos:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm \frac{3}{5}$$

Como x está no 1º quadrante, o seno é positivo.

$$\text{Logo: } \cos x = \frac{3}{5}$$

a)

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{24}{25}$$

b)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos 2x = \frac{9}{25} - \frac{16}{25}$$

$$\cos 2x = -\frac{7}{25}$$

c)

$$\text{tg } 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{4}{\frac{5}{3}}$$

$$\text{tg } 2x = \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{5}$$

$$\text{tg } 2x = \frac{4}{3}$$





EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. (UFRGS – RS) Se x é um arco do primeiro quadrante tal que $\sin(x) = \frac{3}{5}$, então $\sin(2x)$ é igual a

- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{24}{25}$ e) $\frac{25}{24}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Se x é um arco de segundo quadrante de modo que $\cos x = -\frac{3}{5}$, então $\cos 2x =$ ____.

- a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{7}{25}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{24}{25}$ e) $\frac{7}{25}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Identifique no intervalo $[0, 2\pi[$, a solução de cada equação abaixo:

- a) $\text{sen}(2x) = \text{sen}(x)$
- b) $\cos(2x) - \cos(x) = 0$
- c) $\text{sen}(2x) = \cos(x)$
- d) $\cos(2x) + 3\cos(x) = -2$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. Determine a soma dos números associados às proposições VERDADEIRAS:

01. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

02. Se $\sin(x) = -\frac{2}{3}$, $\cos(2x) \cdot \sin(x)$ é $-\frac{2}{27}$.

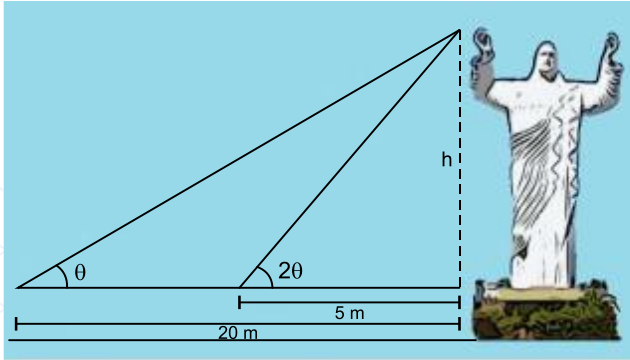
04. Sabemos que $\cos x = \frac{4}{5}$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Podemos afirmar, então, que $\operatorname{tg} 2x = \frac{3}{4}$

08. Se $\sin(2x) = 1/3$ então $\frac{\sec(x)}{\sin(x)}$ é igual a 6.

16. $\sin(\pi + x) \cdot \cos(\pi + x) = \sin 2x$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (UFMS) Para medir a altura da estátua do Cristo Redentor em Três Lagoas, uma pessoa, a uma distância de 20 m da estátua, observa o topo sob um ângulo θ . Caminhando em direção à estátua, quando o observador está a 5 m da estátua, ele observa o topo sob um ângulo 2θ .



Desprezando a altura do pedestal, a altura da estátua em metros é:

- a) $5\sqrt{2}$
- b) $10\sqrt{2}$
- c) $15\sqrt{2}$
- d) $20\sqrt{2}$
- e) $25\sqrt{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

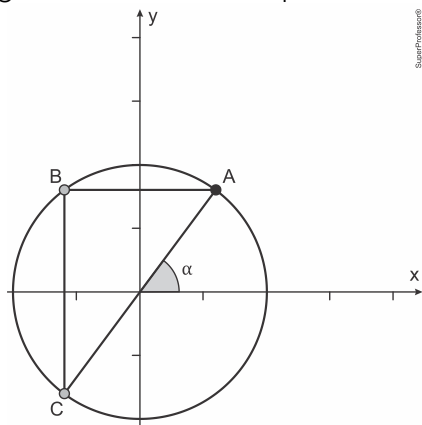
EXERCÍCIOS NÍVEL 2

6. Do arco x sabe-se que $\sin(x) \cdot \cos(x) = -\frac{1}{4}$. Então, o valor de $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x)$ é _____ e a extremidade desse arco x pode estar no _____ quadrante.

- a) $-4; 1^\circ$
- b) $-4; 2^\circ$
- c) $-2; 3^\circ$
- d) $-2; 4^\circ$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (PUC – RJ) Na figura abaixo, a circunferência possui raio 1, e os pontos A, B e C estão sobre ela. Os segmentos AB e BC são paralelos aos eixos x e y, respectivamente.



Em função de α , qual é o valor da área do triângulo ABC?

- a) $\sin(2\alpha)$
- b) $\sin(2\alpha) \cdot \cos(2\alpha)$
- c) $\sin(\alpha)$
- d) $1 - \cos^2(2\alpha)$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (EFOMM) O valor de $\frac{\sec^2(5) + \operatorname{cosec}^2(5)}{\operatorname{cosec}^2(10)}$ é igual a:

- a) $1/2$
- b) 1
- c) 2
- d) $5/2$
- e) 4

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (PUC – PR) Se $A = \begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos x \\ -\cos x & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz cujo determinante não é nulo, então é CORRETO

afirmar que o determinante da matriz inversa de A

- a) pode ser igual a $\frac{1}{2}$.
- b) não pode ser igual a 1.
- c) admite um valor máximo.
- d) admite um valor mínimo.
- e) pode ser maior do que 100.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

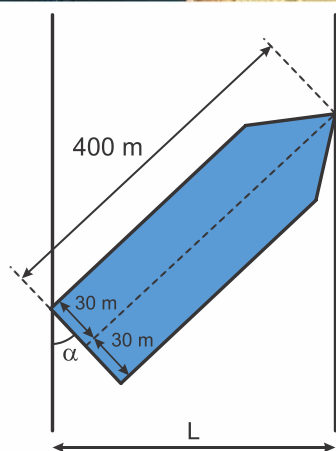


10. (UNICAMP – SP) No dia 23 de março de 2021, um navio encalhou no canal de Suez, no Egito. A embarcação tinha 400 metros de comprimento e 60 metros de largura. No ponto onde aconteceu o acidente, o canal de Suez não tem mais do que 200 metros de largura. Abaixo apresentamos uma foto de satélite e uma figura representando a situação. O ângulo α indicado na figura abaixo mede $67,5^\circ$.



A largura do canal, medida em metros e indicada por L na figura anterior, é:

- a) $400\sqrt{2-\sqrt{2}} - 60\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 195,3$
 b) $200\sqrt{2-\sqrt{2}} - 15\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 125,4$
 c) $200\sqrt{2-\sqrt{2}} + 15\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx 180,8$
 d) $200\sqrt{3-\sqrt{3}} - 15\sqrt{3+\sqrt{3}} \approx 192,6$



ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 09



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	B	*	11	B	B	A	E	E
1	C									

3) a) $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

b) $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = 0$.

c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$

d) $x = \pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 09

Resolução do Exercício 1: [D]

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Como α é um arco do primeiro quadrante, temos:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Resolução do Exercício 2: [B]

Calculando:

$$\sin^2 x = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos 2x = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} - \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos 2x = -\frac{7}{25}$$

Resolução do Exercício 3:

a) Tem-se que

$$\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

b)

$$\cos(2x) - \cos(x) = 0$$

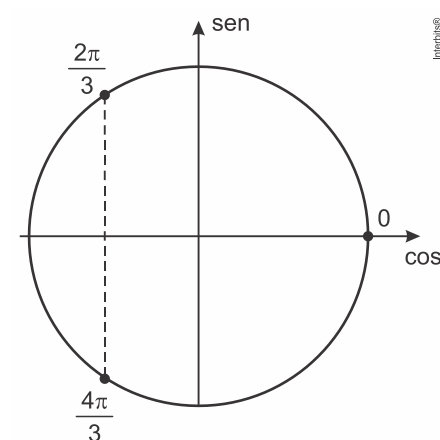
$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$



Logo,

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } x = 0.$$

c)

$$\sin(2\theta) = \cos \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \cos \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \text{ ou } 2 \sin \theta - 1 = 0$$

De $\cos \theta = 0$,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

De $2 \sin \theta - 1 = 0$, ou seja, $\sin \theta = \frac{1}{2}$,

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

d)

$$\cos 2x + 3 \cos x = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0$$

Temos, então uma equação do segundo grau na incógnita $\cos x$.

Resolvendo esta equação, temos:

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} \end{array} \right.$$

Resolução do Exercício 4: [11]

01. Verdadeiro

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 &= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x \end{aligned}$$

02. Verdadeiro

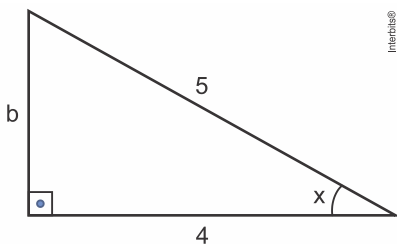
Sabendo que $\cos(2x) = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$, obtemos

$$\begin{aligned} \cos(2x)\sin(-x) &= (1 - 2 \cdot \sin^2 x) \cdot (\sin x) \\ &= \left(1 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(1 - \frac{8}{9}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= -\frac{2}{27} \end{aligned}$$

04. Falso

Se $\cos x = \frac{4}{5}$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, podemos considerar um

triângulo retângulo com um dos ângulos agudos medindo x , o cateto adjacente a ele medindo 4 e a hipotenusa medindo 5.



Calculando a medida do cateto b através do Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$b^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow b = 3.$$

Concluimos então que $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e que:

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{7} = \frac{24}{7}.$$

08. Verdadeiro

A expressão dada equivale a:

$$\frac{\sec x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

16. Falso

$$A = \sin(\pi + x) \cdot \cos(\pi + x)$$

$$A = (-\sin x) \cdot (-\cos x)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sin 2x$$

Resolução do Exercício 5: [B]

Do triângulo maior, temos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{20}$$

Utilizando este resultado no triângulo menor, chegamos a:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{2 \cdot \frac{h}{20}}{1 - \left(\frac{h}{20}\right)^2} = \frac{h}{5} \\ \Rightarrow \frac{\frac{h}{10}}{1 - \frac{h^2}{400}} &= \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\frac{400 - h^2}{400}} = 1 \Rightarrow \frac{200}{400 - h^2} = 1 \\ \Rightarrow 200 &= 400 - h^2 \Rightarrow h = \sqrt{200} \\ \therefore h &= 10\sqrt{2} \text{ m} \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 6: [B]

O valor de $\operatorname{tg} x + \cot x$ é:

$$\operatorname{tg} x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$\operatorname{tg} x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\operatorname{tg} x + \cot x = \frac{1}{-\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \operatorname{tg} x + \cot x = -4$$

E:

$$\operatorname{sen} x \cos x = -\frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 210^\circ \quad \text{ou} \quad 2x = 330^\circ$$

$$x = 105^\circ \quad \text{ou} \quad x = 165^\circ$$

Ou seja, a extremidade do arco x pode estar no 2º quadrante.

Resolução do Exercício 7: [A]

Sendo AB paralelo ao eixo das abscissas, temos $BAC = \alpha$, uma vez que BAC e α são alternos internos. Daí, vem

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

e

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \cos \alpha.$$

A resposta é

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \alpha \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \\ &= \operatorname{sen} 2\alpha. \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 8: [E]

Calculando:

$$\begin{aligned} \frac{\sec^2(5) + \operatorname{cosec}^2(5)}{\operatorname{cosec}^2(10)} &= \frac{\frac{1}{\cos^2(5)} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2(5)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(10)}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2(5) + \cos^2(5)}{\operatorname{sen}^2(5)\cos^2(5)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(10)}} \\ &= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(5)\cos^2(5)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(10)}} = \frac{4}{\operatorname{sen}^2(10)} = 4 \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 9: [E]

Determinante de A:

$$\det A = \operatorname{sen}^2 x \cdot (-1) - \cos x \cdot (-\cos x)$$

$$\det A = -\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$$\det A = \cos 2x$$

Determinante da inversa de A:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\cos 2x}$$

Como $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, a única alternativa que apresenta uma situação possível é a [E].

Resolução do Exercício 10: [C]

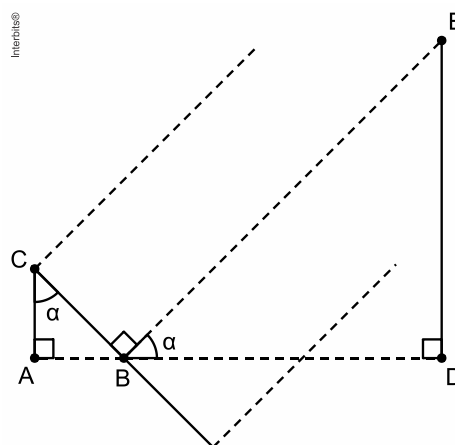
Tem-se que

$$\begin{aligned} \cos 67,5^\circ &= \sqrt{\frac{1 + \cos 135^\circ}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Daí, vem

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 67,5^\circ &= \sqrt{1 - \cos^2 67,5^\circ} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Considere a figura, em que $\overline{BC} = 30$ m e $\overline{BE} = 400$ m.



Portanto, como

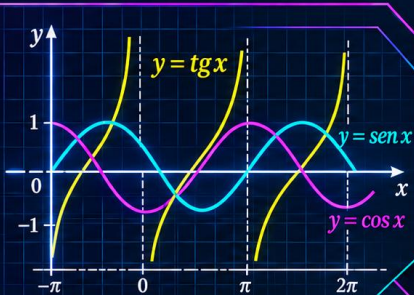
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 30 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} = 15\sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ m} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \overline{BD} = 400 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ &\Leftrightarrow \overline{BD} = 200\sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ m}, \end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned} L &= \overline{AB} + \overline{BD} \\ &= (15\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 200\sqrt{2 - \sqrt{2}}) \text{ m} \end{aligned}$$



TRIGONOMETRIA

AULA 10

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS - GRÁFICOS



ASSISTA À AULA



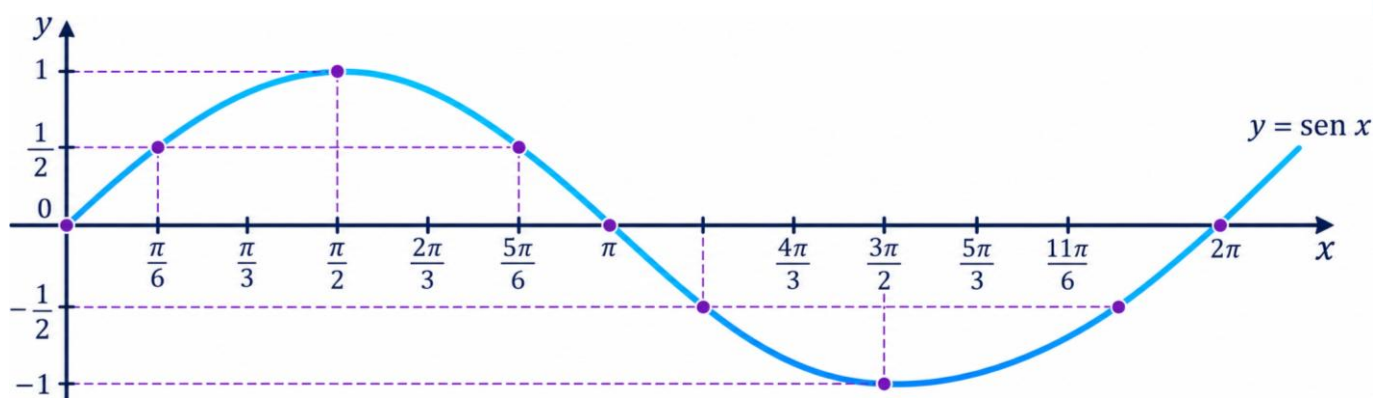
1. Função Seno

Denominamos função seno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x , o valor $\sin x$.

$$y = f(x) = \sin x$$

Gráfico da Função Seno:

Observe, agora, como varia a função $y = f(x) = \sin x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.



A curva acima é chamada de senóide.

Observando o gráfico da função $f(x) = \sin x$, conclui-se:

- Admite valores positivos no 1º e 2º Quadrantes e negativos no 3º e 4º Quadrantes.
- É crescente no 1º e 4º Quadrantes e decrescente no 2º e 3º Quadrantes.
- Imagem: $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1]$.

Importante: A cada 2π rad o comportamento da função seno se repete. Dizemos, então, que o período da função seno é $p = 2\pi$ rad.

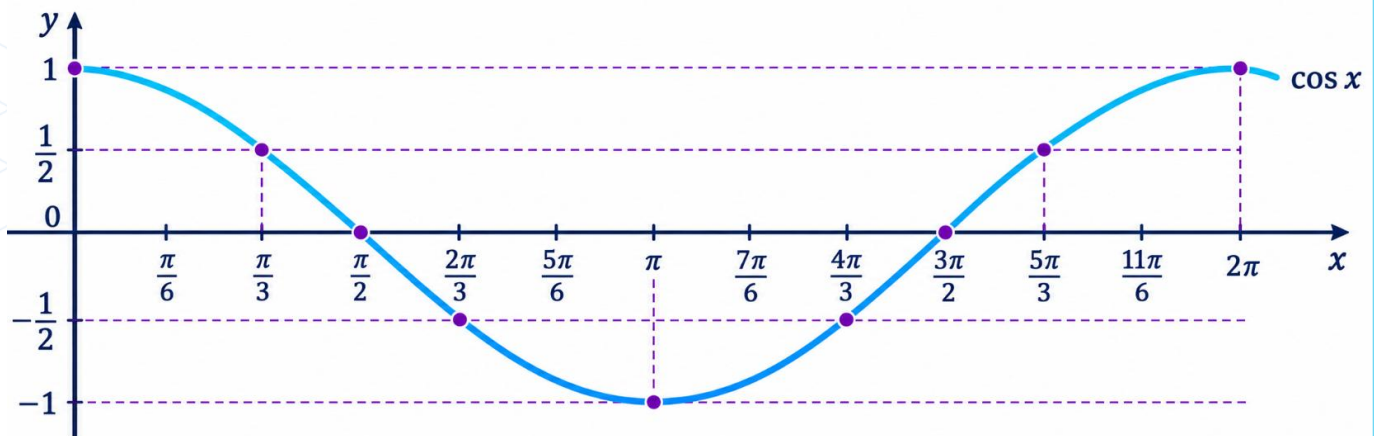
2. Função Cosseno

Denominamos função cosseno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x , o valor $\cos x$.

$$y = f(x) = \cos x$$

Gráfico da Função Cosseno:

Observe, agora, como varia a função $y = f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.



A curva acima é chamada de cossenóide.

Observando o gráfico da função $f(x) = \cos x$, conclui-se que:

- Admite valores positivos no 1º e 4º Quadrantes e Negativos no 2º e 3º Quadrantes.
- É crescente no 3º e 4º Quadrantes e Decrescente no 1º e 2º Quadrantes.
- Imagem: $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\} = [-1, 1]$.

Importante: A cada 2π rad o comportamento da função cosseno se repete. Dizemos, então, que o período da função cosseno é $p = 2\pi$ rad.

Funções Genéricas - Conclusões

$$f(x) = a + b \cdot \sin(mx + n)$$

$$f(x) = a + b \cdot \cos(mx + n)$$

- O Parâmetro “a” é responsável pelo deslocamento vertical do gráfico.

$a > 0 \rightarrow$ desloca para cima

$a < 0 \rightarrow$ desloca para baixo

- O Parâmetro “b” é responsável pela mudança na amplitude do gráfico.

$b > 1 \rightarrow$ aumenta a amplitude.

$0 < b < 1 \rightarrow$ diminui a amplitude

- O Parâmetro “m” é responsável pela mudança no período do gráfico.

$$\text{Período } (p) = \frac{2\pi}{|m|}$$

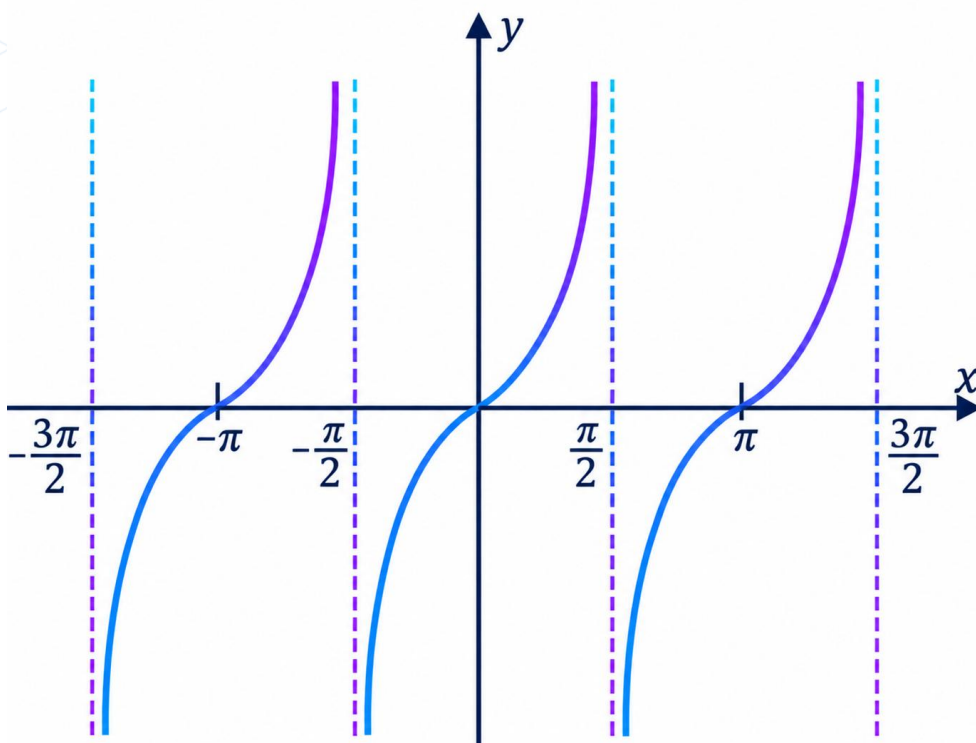
3. Função Tangente

Denominamos função tangente a função $f: \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x , o valor $\text{tg } x$.

$$y = f(x) = \text{tg } x$$

Gráfico da Função Tangente:

Observe agora, como varia o gráfico da função $y = f(x) = \text{tg } x$.



O gráfico da função tangente é chamado tangente

Observando o gráfico da função $f(x) = \text{tg } x$, conclui-se:

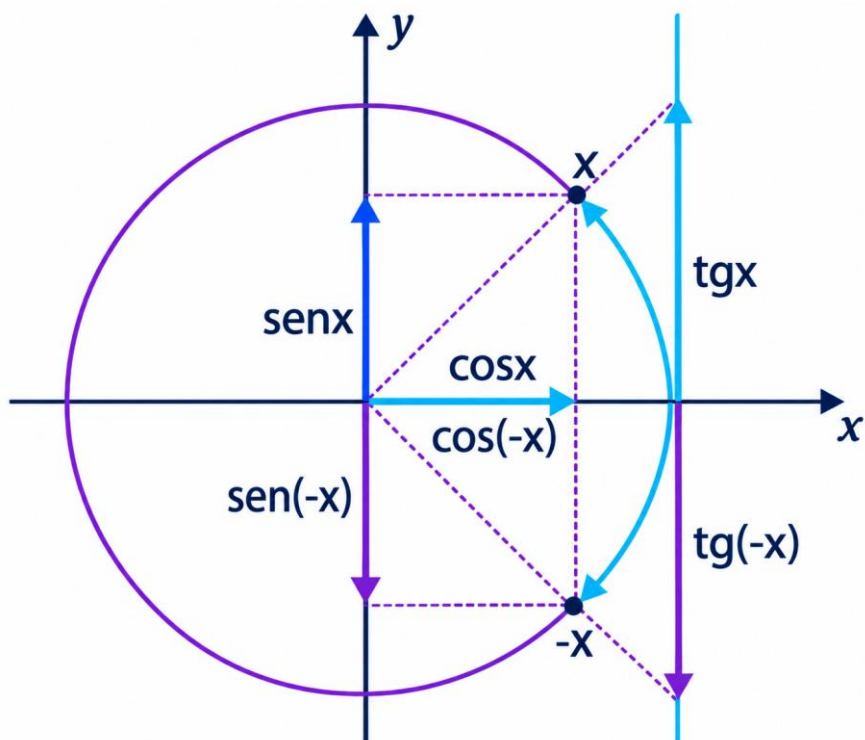
- Domínio: $\left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Imagem: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
- É crescente em todos os quadrantes.
- A função $f(x) = \text{tg } x$ é ímpar, ou seja $\text{tg}(-x) = -\text{tg } x$.

Importante: A cada π rad o comportamento da função tangente se repete. Dizemos, então, que o período da função tangente é $p = \pi$ rad.

Na função $f(x) = \text{tg}(mx)$ o período é dado por: $\text{Período } (p) = \frac{\pi}{|m|}$

4. Paridade

Os arcos trigonométricos x e $-x$ possuem extremidades simétricas em relação ao eixo x .



Podemos concluir pelo esquema acima que:

- Seno é uma função ímpar, ou seja: $\boxed{\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)}$
- Cosseno é uma função par, ou seja: $\boxed{\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)}$
- Tangente é uma função ímpar, ou seja: $\boxed{\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)}$

Função	Paridade	Período	Sinais	Domínio	Imagem
$\text{sen} \alpha$	ímpar $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen} \alpha$	2π	$\begin{array}{c c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\text{cos} \alpha$	par $\text{cos}(-\alpha) = \text{cos} \alpha$	2π	$\begin{array}{c c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\text{tg} \alpha$	ímpar $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha$	π	$\begin{array}{c c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$	$x \neq \pi/2 + k\pi$, onde k é inteiro	$\mathbb{R}$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



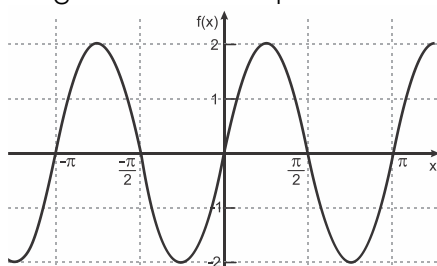
1. Determine o conjunto imagem e o período de cada função abaixo:

a) $f(x) = 5 + 3\cos(2x)$ b) $f(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ c) $f(x) = -1 + 2\sin\left(\frac{x}{4}\right)$ d) $f(x) = 3 - 5\sin(2x + 4)$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

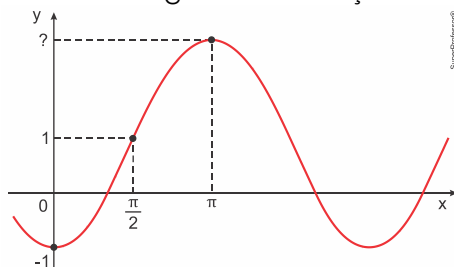
2. Julgue os itens abaixo:

- I. Um determinado fenômeno pode ser modelado através da função $y = a + b\sin(cx + d)$. Se $a = 2, b = 1, c = \pi$ e $d = \frac{\pi}{2}$, a imagem da função é $[1, 3]$.
- II. O gráfico abaixo representa uma função real de variável real.



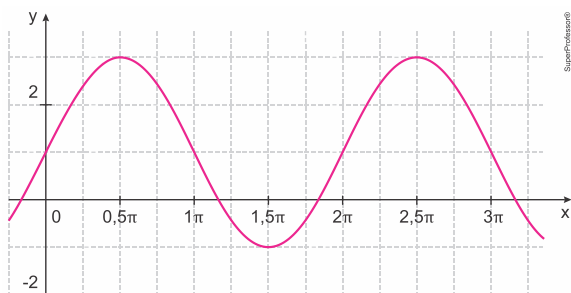
A função que gerou o gráfico dado pode ser dada por: $f(x) = 2\sin(2x)$

- III. Considere o gráfico da função real $f(x) = a - b\cos x$, com a e b não nulos.



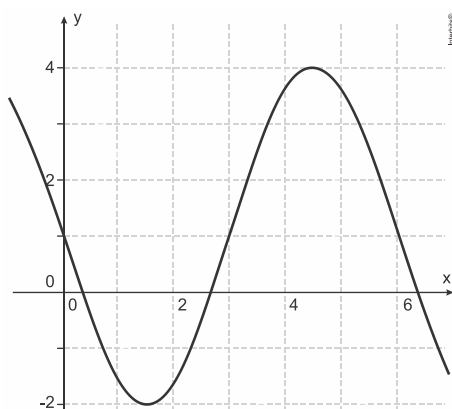
Sabendo que os pontos $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ e $(0, -1)$ pertencem ao gráfico, o valor de $f(\pi)$ é 3.

IV. Analise o gráfico.



A função descrita pelo gráfico pode ser dada por $f(x) = 1 + 2\sin x$

V. Na figura abaixo está representado um trecho do gráfico de uma função real da forma $y = m \cdot \sin(nx) + k$, com $n > 0$.



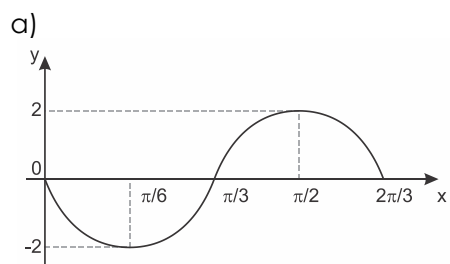
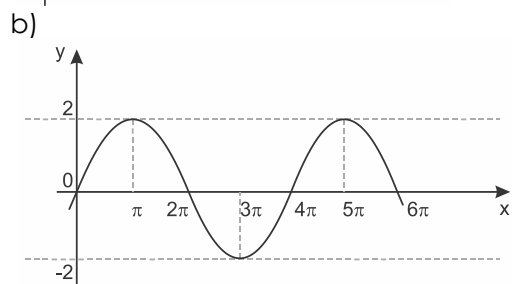
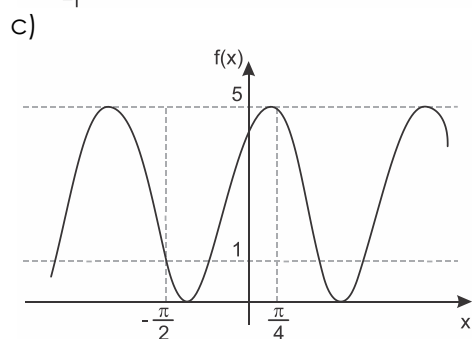
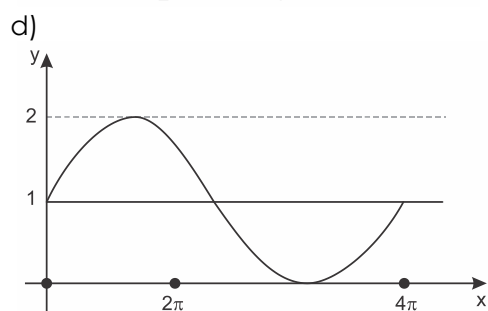
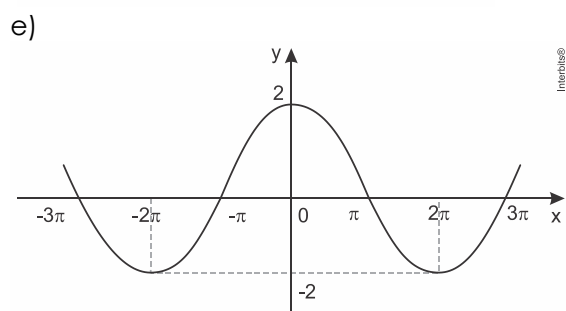
Os valores de m , n e k , são, respectivamente -3 , $\frac{\pi}{3}$ e 1 .

Dos itens acima, está(ão) correto(s):

- a) Somente I, II e IV
- b) Somente II, IV e V
- c) Somente I, II, III e V
- d) Somente II, III e IV
- e) Todos estão corretos

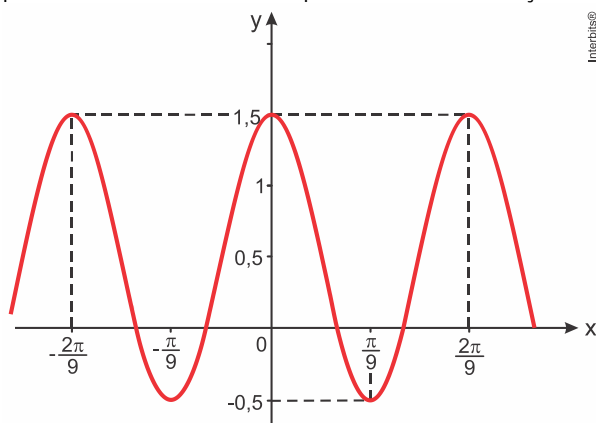
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Qual dos gráficos a seguir representa a função $f(x) = -2 \sin 3x$?



ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

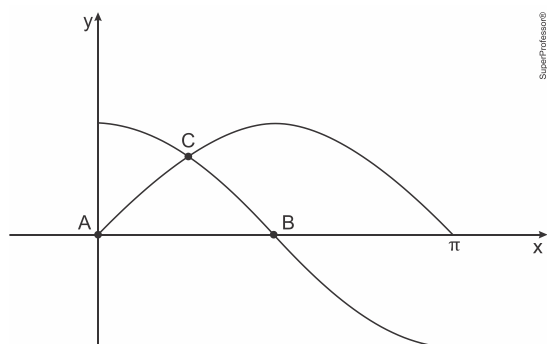
4. (UPF – RS) Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica. O período positivo mínimo e a amplitude desta função, respectivamente, são:



- a) $\frac{2\pi}{9}$ e 1,5
b) $\frac{2\pi}{9}$ e 2
c) $\frac{\pi}{9}$ e 1
d) $\frac{\pi}{9}$ e 1
e) $\frac{\pi}{9}$ e 1,5

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (UDESC – SC) Na figura estão representados os gráficos das funções cosseno e seno definidas no intervalo $[0, \pi]$.



Considerando os pontos A, B e C mostrados na figura, o triângulo com vértices A, B e C tem área igual a:

- a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$ c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{10}$ d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{10}$

Gráficos das funções cosseno e seno definidas em $[0, \pi]$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (UFSC – SC) Considere as funções reais $g(x) = -1 + 2\sin(x)$ e $h(x) = -2 - 3\cos(x - \pi)$ para $x \in [-2\pi, 2\pi]$, determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) correta(s).

01. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

02. O período da função g é π .

04. A imagem da função g é o intervalo $[-3, 1]$.

08. Se $x \in [0, 2\pi]$, então o único valor de x que satisfaz a equação $h(x) = -2$ é $\frac{3\pi}{2}$.

16. O valor máximo da função h é 3.

32. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{h(0)}{g(0)}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



7. (UEPG – PR) Considerando a função real definida por $f(x) = a + b \operatorname{sen}(2bx)$, onde a e b são números reais não nulos, assinale o que for correto.

01. Se $a = 2$ e $b = 1$, $f(x)$ tem período 2π e imagem $[1, 3]$.

02. Se $f(x)$ tem período $\frac{\pi}{3}$ e imagem $[-4, 2]$ então $a = -1$ e b pode assumir dois valores.

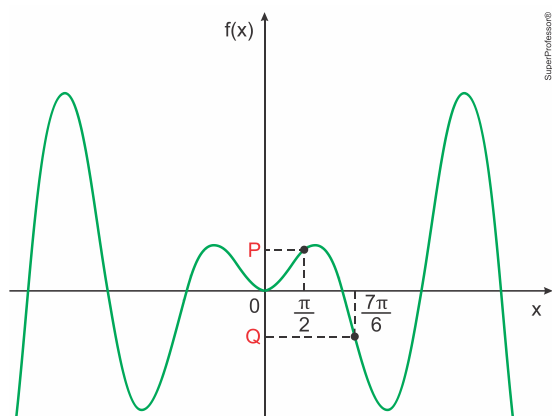
04. Se $a = 1$, a imagem de $f(x)$ é o intervalo $[-1, 3]$, somente no caso do $b = 2$.

08. Se $b = 2$, $f(x)$ tem período $\frac{\pi}{2}$, independente do valor de a .

16. Se $b = 2$ qualquer que seja o valor de a , o gráfico de $f(x)$ sempre intercepta o eixo x .

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (FCMSCSP) A figura indica o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \cdot \text{sen}(x)$, e a abscissa de dois dos seus pontos, cujas ordenadas são P e Q.



Nas condições descritas, $P + Q$ é igual a

- a) $-\frac{\pi}{12}$
- b) $\frac{\pi}{18}$
- c) $-\frac{\pi}{3}$
- d) $-\frac{\pi}{6}$
- e) $-\frac{\pi}{18}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

9. (ACAFE – SC) Analise as afirmações a seguir, e assinale a alternativa correta.

- a) O período da função $f(x) = 4,2 + 0,5 \cdot \cos(2\pi x + 3)$ é $\frac{2\pi}{3}$.
- b) O valor máximo que a função $f(x) = 3\text{sen}x + 4\cos x$ assume é igual a 5.
- c) Sendo $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\text{sena} = \frac{5}{13}$, então $\text{tg}(2\alpha) = -\frac{5}{6}$.
- d) A equação $\text{tg}(2x) = \sqrt{3}$ possui 5 soluções no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UDESC – SC) Considere a função $f(x) = \cos(x) + \sqrt{3} \sin(x)$, e analise as proposições.

I. $f(x) = 2 \sin(x + \alpha)$ para algum $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

II. f possui uma raiz no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

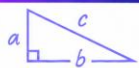
III. f tem período π

Assinale a alternativa **correta**.

- a) Somente a proposição II é verdadeira.
- b) Somente as proposições I e II são verdadeiras.
- c) Somente as proposições II e III são verdadeiras.
- d) Somente a proposição III é verdadeira.
- e) Somente a proposição I é verdadeira.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 10



$\sin(\theta)$

$\cos(\theta)$



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		*	E	A	D	B	36	10	A	B
1	E									

1) a) $Im = [2, 8]$ $p = \pi$

b) $Im = [-2, 2]$ $p = \frac{2\pi}{3}$

c) $Im = [-3, 1]$ e $p = 8\pi$

d) $Im = [-2, 8]$ $p = \pi$

TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 10

Resolução do Exercício 1:

- a) $\text{Im} = [2, 8]$ $p = \pi$
 b) $\text{Im} = [-2, 2]$ $p = \frac{2\pi}{3}$
 c) $\text{Im} = [-3, 1]$ e $p = 8\pi$
 d) $\text{Im} = [-2, 8]$ $p = \pi$

Resolução do Exercício 2: [E]

- a) Verdadeiro

O conjunto imagem da função depende unicamente dos parâmetros a e b .

$$\text{Im} = [2 - 1, 2 + 1] = [1, 3].$$

- b) Verdadeiro

$$f(x) = 2 \sin(2x). \text{ Desde que } f(0) = 0 \text{ e } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,$$

$$\text{Im} = [-2, 2] \text{ e } p = \pi$$

- c) Verdadeiro

Substituindo os pontos dados na função, obtemos:

$$\begin{cases} a - b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ a - b \cos 0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b \cdot 0 = 1 \\ a - b \cdot 1 = -1 \end{cases}$$

Logo, $a = 1$ e $b = 2$. Sendo assim:

$$f(\pi) = 1 - 2 \cos \pi$$

$$f(\pi) = 1 - 2 \times (-1)$$

$$\therefore f(\pi) = 3$$

- d) Verdadeiro

Amplitude do gráfico:

$$A = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

Eixo vertical central do gráfico:

$$y_m = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

Deslocamento vertical do gráfico em relação ao eixo y :

$$\Delta y = 1 - 0 = 1$$

Portanto, a função descrita pelo gráfico pode ser dada por:

$$f(x) = a + b \cdot \sin x$$

$$f(x) = 1 + 2 \sin x$$

V. Verdadeiro

Do gráfico, temos $f(0) = 1$. Logo, vem

$$1 = m \cdot \sin(n \cdot 0) + k \Leftrightarrow k = 1$$

Sabendo que a função seno é crescente no primeiro quadrante, podemos concluir que $m < 0$. Ademais, como $-1 \leq \sin x \leq 1$, temos

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin(nx) \leq 1$$

$$\Rightarrow m \leq m \sin(nx) \leq -m$$

$$\Rightarrow m + 1 \leq m \sin(nx) + 1 \leq -m + 1.$$

Mas sabemos que $-2 \leq m \sin(nx) + 1 \leq 4$ e, portanto, vem $m = -3$.

Ainda do gráfico, podemos afirmar que o período da função é 6. Logo, sendo $n > 0$, temos

$$6 = \frac{2\pi}{|n|} \Rightarrow n = \frac{\pi}{3}.$$

Resolução do Exercício 3: [A]

Somente o primeiro gráfico apresenta as características da função $f(x) = -2 \sin 3x$: amplitude 2, início decrescente e na origem

Resolução do Exercício 4: [D]

O período fundamental da função é $\frac{2\pi}{9} - 0 = \frac{2\pi}{9}$, enquanto que amplitude é igual a

$$\frac{1,5 - (-0,5)}{2} = 1.$$

Resolução do Exercício 5: [B]

O ponto A é a origem, logo, $A = (0, 0)$. O ponto C é a primeira interseção entre as funções a partir de $x = 0$, logo:

$$\sin x = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

E o ponto B é dado por:

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$B = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

Sendo assim, a área do triângulo ABC vale:

$$A = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$\therefore A = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \text{ u.a.}$$

Resolução do Exercício 6: [36]

[01] Falsa. Calculando:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 2 \cdot 1 = 1$$

[02] Falsa. O período de g é dado por:

$$T_g = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

[04] Verdadeira. Valores limite de g :

$$g_{\max} = -1 + 2 \cdot 1 = 1$$

$$g_{\min} = -1 + 2 \cdot (-1) = -3$$

Portanto, $\text{Im}_g = [-3, 1]$.

[08] Falsa. Resolvendo a equação, obtemos:

$$-2 - 3 \cos(x - \pi) = -2$$

$$\cos(x - \pi) = 0$$

$$x - \pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

Ou seja, há mais de uma solução para esse intervalo de x .

[16] Falsa. O valor máximo de h é:

$$h_{\max} = -2 - 3 \cdot (-1) = 1$$

[32] Verdadeira. Temos que:

$$h(0) = -2 - 3 \cos(-\pi) = 1$$

$$g(0) = -1 + 2 \sin(0) = -1$$

$$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 = \frac{h(0)}{g(0)}$$

Resolução do Exercício 7: [10]

Analisando as alternativas uma a uma:

[01] INCORRETA. Calculando:

$$f(x) = 2 + \sin(2x)$$

$$\text{Im} = (2 - 1; 2 + 1) = (1; 3)$$

$$P = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

[02] CORRETA. Calculando:

$$f(x) = a + b \sin(2bx)$$

$$P = \frac{2\pi}{2b} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{Im} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = \pm 3$$

[04] INCORRETA. Calculando:

$$f(x) = 1 + b \sin(2bx)$$

$$\text{Im} \Rightarrow \begin{cases} 1 + b = 3 \\ 1 - b = -1 \end{cases} \Rightarrow b = \pm 2$$

[08] CORRETA. Calculando:

$$f(x) = a + 2 \cdot \sin(4x)$$

$$P = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

[16] INCORRETA. Se $a = 3$ e $b = 2$ o gráfico da função não intercepta o eixo X .

Resolução do Exercício 8: [A]

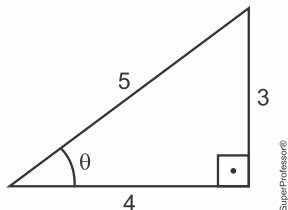
$$\begin{aligned} P + Q &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 1 + \frac{7\pi}{6} \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 9: [B]

[A] Incorreta. O período da função é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

[B] Correta. Do triângulo abaixo, temos:



$$\sin \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow 3 = 5 \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5} \Rightarrow 4 = 5 \cos \theta$$

Substituindo na função dada:

$$f(x) = 5 \sin \theta \sin x + 5 \cos \theta \cos x$$

$$f(x) = 5(\sin \theta \sin x + \cos \theta \cos x)$$

$$f(x) = 5 \cos(\theta - x)$$

Portanto, o valor máximo que a função pode assumir é:

$$f_{\max} = 5 \cdot \underbrace{\cos(\theta - x)}_1 = 5$$

[C] Incorreta. Calculando:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

$$\therefore \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}} = -\frac{120}{119}$$

[D] Incorreta. Resolvendo a equação:

$$\operatorname{tg}(2x) = \sqrt{3}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{3}$$

$$k = 4 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$$

Portanto, a equação possui 4 soluções para o intervalo dado.

Resolução do Exercício 10: [E]

[I] VERDADEIRA. Calculando:

$$f(x) = \cos(x) + \sqrt{3} \sin(x) \Rightarrow$$

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(x) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot (\sin 30^\circ \cdot \cos x + \cos 30^\circ \cdot \sin x) \Rightarrow$$

$$f(x) = 2 \cdot \sin(30^\circ + x) \Rightarrow a = 30^\circ \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

[II] FALSA. Não há solução entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculando:

$$2 \cdot \sin(30^\circ + x) = 0 \Rightarrow \sin(30^\circ + x) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 30^\circ + x = 0^\circ \Rightarrow x = -30^\circ \\ \text{ou} \\ 30^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 150^\circ \end{array} \right.$$

[III] FALSA. A função dada é uma função do tipo seno cujo período é 2π .



TRIGONOMETRIA

AULA 11

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS - APLICAÇÕES



ASSISTA À AULA



Essa aula visa a aplicação dos conceitos de funções trigonométricas em questões contextualizadas. Segue abaixo um resumo da aula 10.



$$f(x) = a + b \cdot \text{sen}(mx + n)$$

$$f(x) = a + b \cdot \text{cos}(mx + n)$$

- O Parâmetro “a” é responsável pelo deslocamento vertical do gráfico.

$a > 0 \rightarrow$ desloca para cima

$a < 0 \rightarrow$ desloca para baixo

- O Parâmetro “b” é responsável pela mudança na amplitude do gráfico.

$b > 1 \rightarrow$ aumenta a amplitude.

$0 < b < 1 \rightarrow$ diminui a amplitude

- O Parâmetro “m” é responsável pela mudança no período do gráfico.

$$\text{Período } (p) = \frac{2\pi}{|m|}$$



1. (PUC – RS) A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg) de um cidadão portoalegrense em função do tempo (em segundos) é dada por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$. Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg, são iguais, respectivamente, a

a) 60 e 100

b) 60 e 120

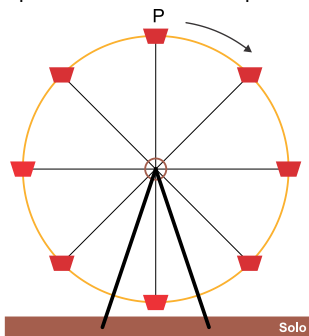
c) 80 e 120

d) 80 e 130

e) 90 e 120



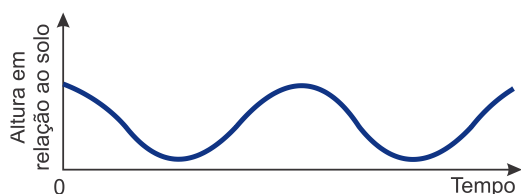
2. (ENEM) A figura ilustra uma roda-gigante no exato instante em que a cadeira onde se encontra a pessoa P está no ponto mais alto dessa roda-gigante.



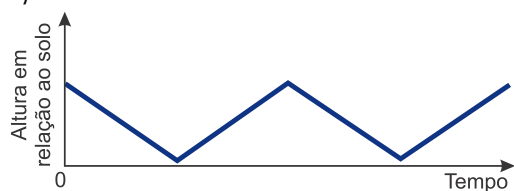
Com o passar do tempo, à medida que a roda-gigante gira, com velocidade angular constante e no sentido horário, a altura da cadeira onde se encontra a pessoa P, em relação ao solo, vai se alterando.

O gráfico que melhor representa a variação dessa altura, em função do tempo, contado a partir do instante em que a cadeira da pessoa P se encontra na posição mais alta da roda-gigante, é

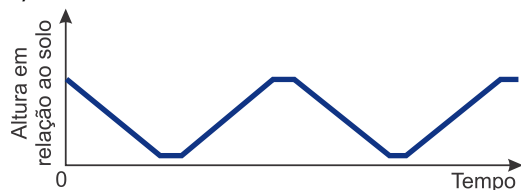
a)



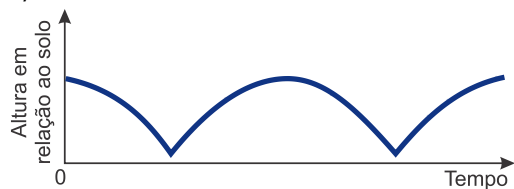
b)



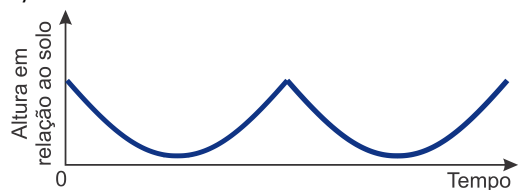
c)



d)



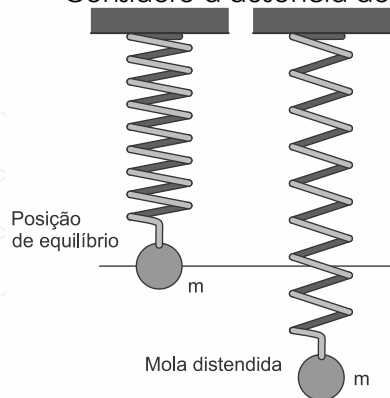
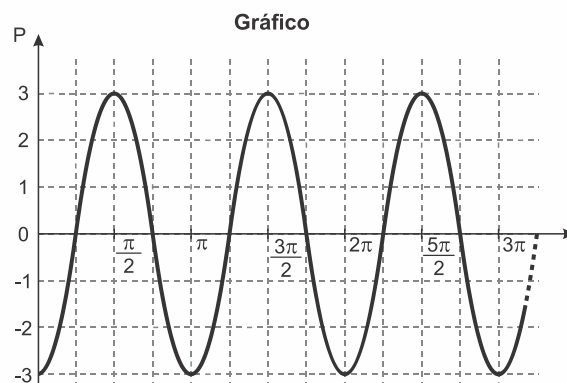
e)



SuperProfessor®

3. (ENEM) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A \sin(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.



A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m , ao longo do tempo, no gráfico, é

- a) $-3 \cos(2t)$ b) $-3 \sin(2t)$ c) $3 \cos(2t)$ d) $-6 \cos(2t)$ e) $6 \sin(2t)$
4. (PUC – RS) Os fenômenos gerados por movimentos oscilatórios são estudados nos cursos da Faculdade de Engenharia. Sob certas condições, a função $y = 10 \cos(4t)$ descreve o movimento de uma mola, onde y (medido em cm) representa o deslocamento da massa a partir da posição de equilíbrio no instante t (em segundos). Assim, o período e a amplitude desse movimento valem, respectivamente,

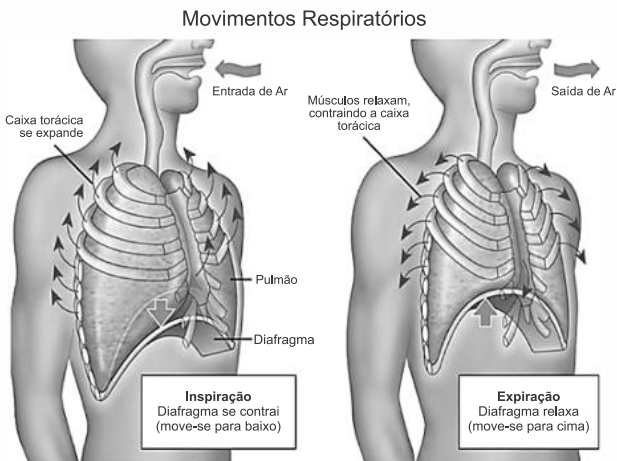
- a) $\frac{\pi}{2}$ s — 10 cm b) 2π s — 20 cm c) $\frac{\pi}{4}$ s — 10 cm d) $\frac{\pi}{4}$ s — 20 cm e) $\frac{\pi}{2}$ s — 20 cm

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (UFSC – SC) Entre as doenças causadas pelo uso de cigarros, estão o câncer e outras doenças cardiovasculares. Sendo Maria fumante, resolveu consultar um médico para verificar a existência de algum problema de saúde. Em sua primeira consulta, o médico recomendou que Maria realizasse vários exames, entre eles um que faz o mapeamento do volume de ar nos pulmões.

Após Maria realizar esse exame, o especialista informou que o volume de ar V , em litros, nos pulmões de Maria variou em função do tempo t , em segundos, de acordo com a função

$$V = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right).$$



- Com base na função dada, determine, na forma decimal, os valores de máximo e de mínimo do volume de ar, em litros, dos pulmões de Maria.
- Com base na função dada, determine quanto tempo, em segundos, Maria leva para realizar um ciclo respiratório completo.
- Considerando o primeiro ciclo respiratório descrito na função dada, qual é o tempo, em segundos, que fornece o volume máximo de ar nos pulmões de Maria? (Expresse o resultado na forma decimal)

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. Em um repositório de trabalhos de conclusão de cursos de pós-graduação, encontrou-se uma pesquisa sobre a altura das ondas que chegam à costa brasileira. Suponha que nessa investigação os estudantes tenham encontrado a fórmula que mais se aproxima desse fenômeno $h(t) = 15 - 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, com $t > 0$, onde t é o tempo em minutos e $h(t)$ é a profundidade da água, em metros, no instante t . O instante em que, após o início das observações, ocorre o primeiro pico de maior altura é
- a) 18 minutos. b) 6 minutos. c) 3 minutos. d) 1 minuto.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (IMED) A atração gravitacional que existe entre a Terra e a Lua provoca, entre outros fenômenos, o da chamada maré astronômica, que se caracteriza pelo periódico aumento e diminuição do nível do mar. Medindo e tabulando essas variações, os estudiosos do assunto podem descrever matematicamente o comportamento do nível do mar em determinado local por meio de uma função. A fórmula a seguir corresponde a medições feitas na cidade de Boston, no dia 10 de fevereiro de 1990.

$$h(t) = 1,5 + 1,4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

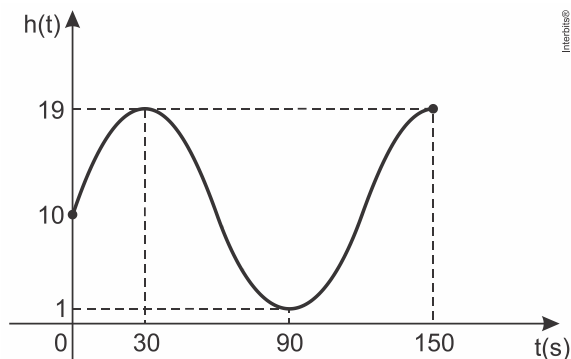
Nessa função, $h(t)$ (em metros) corresponde à altura do nível do mar, e t , ao tempo transcorrido desde a meia-noite (em horas). Com base nessas informações, quantas horas se passaram desde o início da medição até que o nível do mar tenha atingido 2,2 metros pela primeira vez?

- a) 2 horas b) 3 horas c) 4 horas d) 5 horas e) 6 horas

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (EPCAR) Em uma roda gigante, a altura h , em metros, em que uma pessoa se encontra, em relação ao solo, no instante t , em segundos, é dada pela função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(t) = A + B \sin(Ct)$, em que A , B e C são constantes reais.

A figura a seguir ilustra o gráfico dessa função, no intervalo $[0, 150]$



Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

- () $|A \cdot B \cdot C| = \pi$
 () No instante $t = 20$ s, a pessoa estará a uma altura h tal que $h \in [17,5; 17,8]$
 () A função real f definida por $f(t) = 10 - 9 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$ é idêntica à função h .

Sobre as proposições, tem-se que

- a) todas são verdadeiras.
 b) apenas duas são verdadeiras.
 c) apenas uma é verdadeira.
 d) nenhuma delas é verdadeira.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (ENEM) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T , em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 \leq h \leq 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C , a mínima 18°C , e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

- a) $A = 18$ e $B = 8$ b) $A = 22$ e $B = -4$ c) $A = 22$ e $B = 4$ d) $A = 26$ e $B = -8$ e) $A = 26$ e $B = 8$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



10.

(UFSC – SC) O dólar americano (US\$) é moeda bastante usada em transações financeiras internacionais, mas, em decorrência de vários fatores, o seu preço pode variar bastante. Em um dia de forte variação, o preço, em reais, de venda e de compra de um dólar americano comercializado no Brasil foi descrito, respectivamente, pelas funções

$$V(t) = 3,8 + 0,4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \text{ e } C(t) = 3,5 + 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

nas quais t representa o tempo medido, em horas, sendo que $t \in \mathbb{R}$ e $8 \leq t \leq 17$.

01. Os valores máximo e mínimo do preço do dólar para venda foram de, respectivamente, R\$ 3,80 e R\$ 0,40.
02. Apenas para $T = 13h$ o preço de compra do dólar foi de R\$3,30
04. Uma pessoa que comprou US\$130,00 quando $t = 8h$ e vendeu essa quantia quando $t = 14h$ perdeu R\$13,00. Contudo, se a venda fosse feita quando $t = 16h$ obteria um lucro de R\$39,00.
08. Usando cartão de crédito, uma pessoa comprou um produto em um site americano ao preço de US\$50,00 Considerando que a cobrança da fatura do cartão de crédito ocorre segundo o preço de compra sempre às 17h, então o produto custou mais do que R\$ 175,00
16. Para cada t pertencente ao intervalo $\{t \in \mathbb{R}; 12 < t < 16\}$, a diferença entre o preço de venda e o preço de compra foi maior que US\$0,30.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 11

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	A	A	A	*	B	A	B	B
1	28									

a) Teremos:

$$V = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

$$V_{\min} \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = -1 \Rightarrow V_{\min} = \frac{13}{5} - \frac{2}{5} \Rightarrow V_{\min} = 2,2 \text{ L.}$$

$$V_{\max} \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = 1 \Rightarrow V_{\max} = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} \Rightarrow V_{\max} = 3,0 \text{ L.}$$

$\sin(\theta)$



b) Para $t = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{5}t = 0$.

O primeiro ciclo completa-se quando $\frac{2\pi}{5}t = 2\pi$ e o tempo é o período (T). Assim:

$$\frac{2\pi}{5}T = 2\pi \Rightarrow T = 5 \text{ s.}$$

$\cos(\theta)$

c) Sempre que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = 1$, ocorre um máximo.

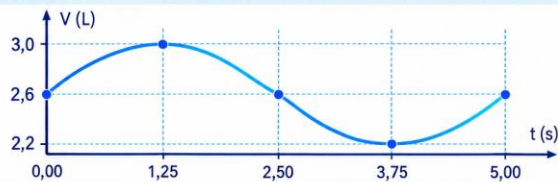
O primeiro é, então, para

$$\frac{2\pi}{5}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{5}{4} \text{ s} \Rightarrow t = 1,25 \text{ s.}$$

$\tan(\theta)$



O gráfico mostra o comportamento da função $V = f(t)$ para o primeiro ciclo.



TRIGONOMETRIA — RESOLUÇÕES — AULA 11

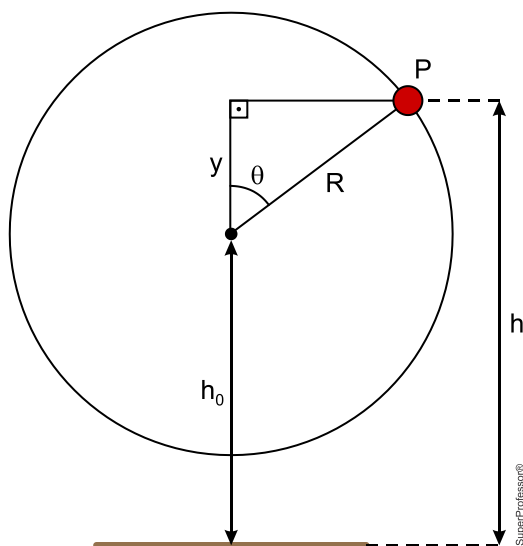
Resolução do Exercício 1: [C]

Sabendo que o valor máximo de $\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$ é 1, podemos concluir que o valor da pressão diastólica é $100 - 20 = 80 \text{ mmHg}$.

Por outro lado, sendo -1 o valor mínimo de $\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$, segue que o valor da pressão sistólica é $100 - 20 \cdot (-1) = 120 \text{ mmHg}$.

Resolução do Exercício 2: [A]

Para uma posição qualquer do ponto P, teremos:



$$h = h_0 + y = h_0 + R \cos \theta$$

Portanto, a altura do ponto P descreve uma cossenoide e está melhor representada pela alternativa [A].

Resolução do Exercício 3: [A]

Sendo $\text{Im} = [-3, 3]$ a imagem da função P, temos $P(t) = -3 \sin(2t)$ ou $P(t) = -3 \cos(2t)$. Mas, $P(0) = -3$ e, portanto, só pode ser $P(t) = -3 \cos(2t)$.

Resolução do Exercício 4: [A]

Como a função $y = 10 \cos(4t)$ é da forma $y = a \cdot \cos(m \cdot t)$, segue que seu período é dado por $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

A imagem da função é o intervalo $10 \cdot [-1, 1] = [-10, 10]$. Portanto, a amplitude do movimento é 10 cm.

Resolução do Exercício 5:

a) Teremos:

$$V = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$$

$$\begin{cases} V_{\min} \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) = -1 \Rightarrow V_{\min} = \frac{13}{5} - \frac{2}{5} = \frac{11}{5} = \frac{22}{10}L \Rightarrow V_{\min} = 2,2L. \\ V_{\max} \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right) = 1 \Rightarrow V_{\max} = \frac{13}{5} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} = 3L \Rightarrow V_{\max} = 3,0L. \end{cases}$$

b)

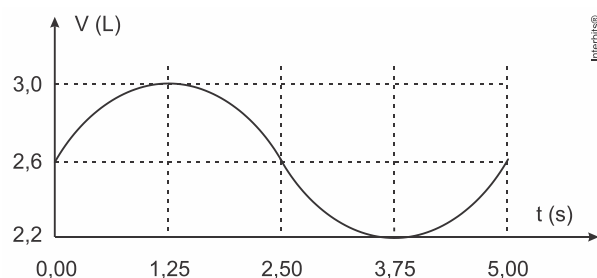
Para $t = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{5}t = 0$. O primeiro ciclo completa-se quando $\frac{2\pi}{5}t = 2\pi$ e o tempo é o período (T). Assim:

$$\frac{2\pi}{5}T = 2\pi \Rightarrow T = 5s.$$

c) Sempre que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = 1$, ocorre um máximo. O primeiro é, então, para

$$\frac{2\pi}{5}t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{5}{4}s \Rightarrow t = 1,25s.$$

O gráfico mostra o comportamento da função $V = f(t)$ para o primeiro ciclo.



Resolução do Exercício 6: [B]

O primeiro pico ocorre em:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -1$$

$$\frac{\pi}{6}t = \pi + 2\pi k, (k \in \mathbb{Z})$$

$$t = 6 + 12k$$

$$k = 0:$$

$$\therefore t = 6 \text{ min}$$

Resolução do Exercício 7: [A]

Calculando:

$$h(t) = 2,2 = 1,5 + 1,4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \Rightarrow 1,4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 2,2 - 1,5$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = \frac{0,7}{1,4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = \frac{1}{2}$$

$$1^\circ \text{ Quadrante} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 2 \text{ horas}$$

Resolução do Exercício 8: [B]

De acordo com o gráfico, temos:

$$h(0) = 10 \Rightarrow A + B \cdot \sin(C \cdot 0) = 10 \Rightarrow A = 10$$

$$Im = [1,19] \Rightarrow B = \frac{19-1}{2} \Rightarrow B = 9$$

Logo:

$$h(t) = 10 + 9 \cdot \sin(C \cdot t)$$

Sabemos que $h(30) = 19$, logo:

$$10 + 9 \cdot \sin(C \cdot 30) = 19 \Rightarrow 9 \cdot \sin(C \cdot 30) = 9 \Rightarrow \sin(C \cdot 30) = 1 \Rightarrow C \cdot 30 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{60}$$

Portanto,

$$h(t) = 10 + 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot t\right)$$

Julgando as informações, obtemos:

Falsa. $|A \cdot B \cdot C| = \pi$, pois:

$$\left|10 \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{60}\right| = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

Verdadeira. No instante $t = 20$ s, a pessoa estará a uma altura h tal que $h \in [17,5; 17,8]$

$$h(20) = 10 + 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot 20\right) = 10 + 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 17,79$$

Verdadeira. A função real f definida por

$f(t) = 10 - 9 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$ é idêntica à função h

$$f(t) = 10 - 9 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$$

$$f(t) = 10 - 9 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi \cdot t}{60} + \sin\frac{3\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{60}\right)$$

$$f(t) = 10 - 9 \cdot \left(-1 \cdot \sin\frac{\pi \cdot t}{60}\right)$$

$$f(t) = 10 + 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{60}\right) = h(t)$$

Resposta: [B] apenas duas são verdadeiras.

Resolução do Exercício 9: [B]

Substituindo os valores na equação por 26°C pela manhã, às 6h e 18°C às 18h, tem-se:

$$T(h) = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$$

$$T(6) = 26 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(6 - 12)\right) \rightarrow 26 = A + B \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 26 = A - B$$

$$T(18) = 18 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12}(18 - 12)\right) \rightarrow 18 = A + B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 18 = A + B$$

$$\begin{cases} A - B = 26 \\ A + B = 18 \end{cases}$$

$$2A = 44 \rightarrow A = 22 \rightarrow B = -4$$

Resolução do Exercício 10: [28]

[01] Falsa. O valor mínimo ocorre quando

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = -1. \text{ Logo, vem}$$

$$V_{\min}(t) = 3,8 + 0,4 \cdot (-1) = \text{R\$ } 3,40.$$

[02] Falsa. Tem-se que

$$C(13) = 3,5 + 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 13\right)$$

$$= 3,5 + 0,5 \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3,5 - 0,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\approx 3,15.$$

[04] Verdadeira. Com efeito, pois

$$C(8) = 3,5 + 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 8\right) = 3,5 \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
 V(14) &= 3,8 + 0,4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot 14\right) \\
 &= 3,8 + 0,4 \operatorname{sen}\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 3,8 - 0,4 \\
 &= 3,4.
 \end{aligned}$$

Logo, a perda foi de $(3,5 - 3,4) \cdot 130 = \text{R\$ } 13,00$.

Por outro lado, sendo $V(16) = 3,8 + 0,4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot 16\right) = 3,8$, o lucro seria de $(3,8 - 3,5) \cdot 130 = \text{R\$ } 39,00$.

[08] Verdadeira. De fato, pois sendo

$$\begin{aligned}
 C(17) &= 3,5 + 0,5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot 17\right) \\
 &= 3,5 + 0,5 \operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= 3,5 + 0,5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &\cong 3,9,
 \end{aligned}$$

vem que o produto custou, aproximadamente, $50 \cdot 3,9 = \text{R\$ } 195,00$.

[16] Verdadeira. Tem-se que

$$3,8 + 0,4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t\right) - 3,5 - 0,5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t\right) = 0,3 - 0,1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t\right).$$

Daí, como

$$\frac{\pi}{4} t < \frac{\pi}{4} \cdot 16 \Leftrightarrow 3\pi < \frac{\pi}{4} t < 4\pi,$$

podemos concluir que, para cada t pertencente ao intervalo $\{t \in \mathbb{R}; 12 < t < 16\}$, a diferença entre o preço de venda e o preço de compra foi maior do que **R\$ 0,30**.