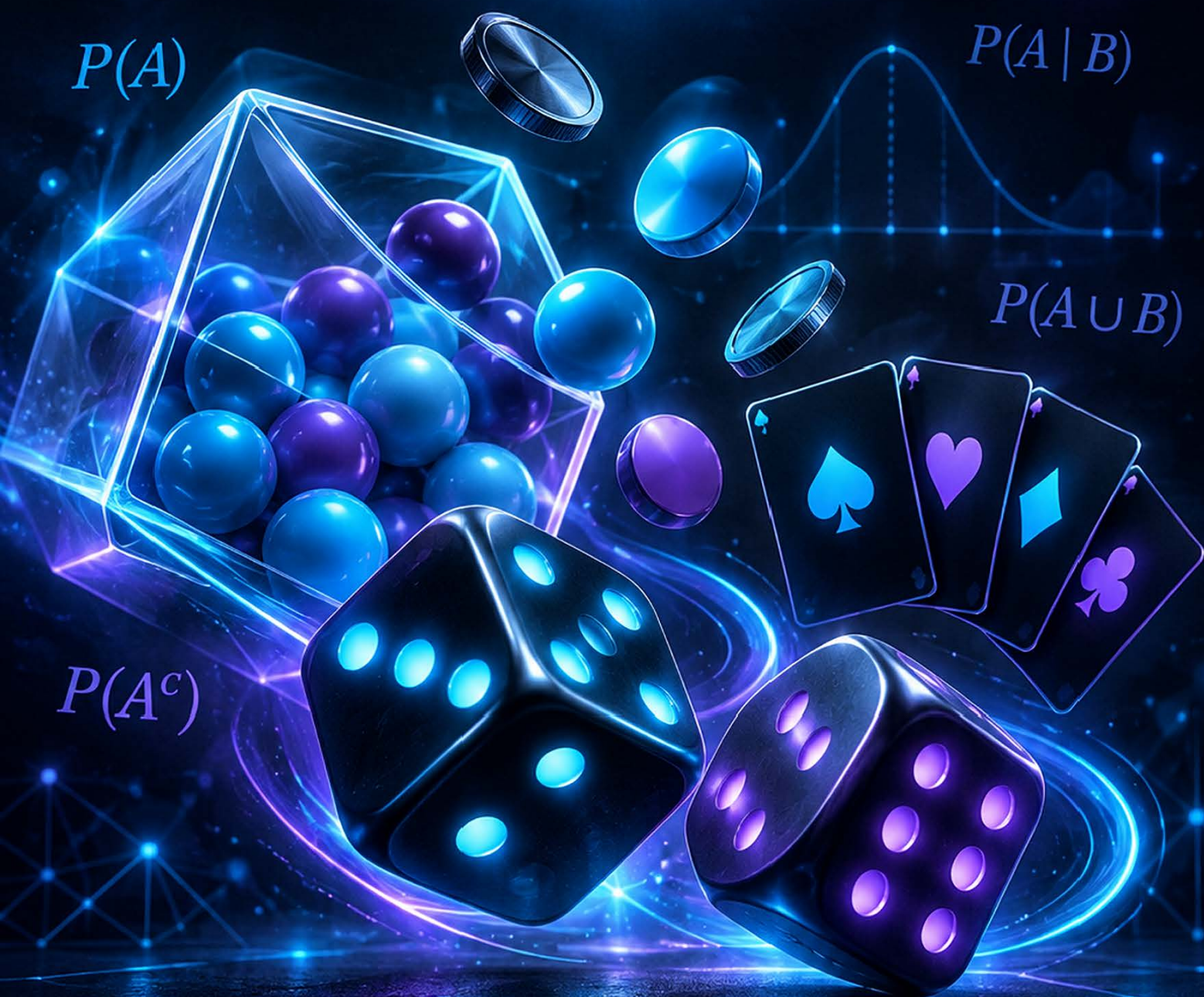


MATEMÁTICA

PROBABILIDADE



Professor Ricardinho

SUMÁRIO

PROBABILIDADE

AULA
01

PROBABILIDADE –
CONCEITOS INICIAIS



AULA
02

UNIÃO DE
PROBABILIDADES



AULA
03

PRODUTO DE
PROBABILIDADES



AULA
04

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL E
PROBABILIDADE CONDICIONAL



MATEMÁTICA

PROBABILIDADE

AULA 01

CONCEITOS INICIAIS



Espaço Amostral

O *Espaço Amostral*, que simbolizaremos pela letra **U**, é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Representaremos o espaço amostral pela letra **U** e o seu número de elementos por **n(U)**.

Exemplos

- 1) Veja que apesar de não podermos determinar que face ficará voltada para cima no lançamento de um dado, ainda assim podemos listar todos os possíveis resultados, ou seja, determinar o espaço amostral desse experimento.



Espaço amostral: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(U) = 6$

- 2) No lançamento de uma moeda, o conjunto de todos os resultados possíveis é:



Espaço amostral: $U = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$; $n(U) = 2$

- 3) Quando lançamos dois dados, um branco e um vermelho, qual o espaço amostral?



Vamos representar cada resultado como um par ordenado (B, V) , onde o primeiro número do par representa o resultado do dado branco e o segundo do dado vermelho. Assim, por exemplo, o par $(2, 6)$ significa que ocorreu 2 na face do dado branco e 6 no dado vermelho. Assim, os elementos do espaço amostral são descritos abaixo:

D ₂	1	2	3	4	5	6
D ₁						
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Evento

Evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Representaremos o espaço amostral pela letra **A** e o seu número de elementos por **n(A)**.

Observe o exemplo:



Lançamos um dado e observamos a face voltada para cima. Já sabemos que o espaço amostral desse experimento é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Suponha que estejamos interessados na:

- a) Ocorrência de um número par.

Vamos descrever estes resultados que nos interessam através do conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, que será chamado de Evento A. Note que A é subconjunto de U.

- b) Ocorrência de um número primo.
Como no item anterior, temos aqui mais um evento, que chamaremos de evento B. Assim $B = \{2, 3, 5\}$

- c) Ocorrência de um número maior do que 7.

Um evento desse tipo costuma ser chamado de *evento impossível* e é representado pelo conjunto vazio $\emptyset$.

- d) Ocorrência de um número menor do que 10.

Vamos chamar este evento de C. É claro que $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como este evento é igual ao espaço amostral, ele será chamado de *evento certo*.

d) Ocorrência de um número maior do que 5. Temos aqui o evento $D = \{6\}$, formado por um único elemento. Eventos representados por conjuntos unitários são chamados de **eventos elementares**.

Conceito de Probabilidade

Seja **A** o espaço amostral finito de um determinado experimento aleatório. Suponha que este espaço amostral seja *equiprovável*, isto é, que todos os eventos elementares (conjunto unitário), tenham iguais chances de ocorrer. Sendo assim, a *Probabilidade* de ocorrer um determinado evento **A**, que representamos por $P(A)$, é dada pela fórmula:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

em que $n(U)$ representa o número de elementos do espaço amostral U .

Ou seja:

Probabilidade = $\frac{\text{número de casos que interessam}}{\text{número de casos possíveis}}$

OBSERVAÇÕES

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- Quando $P(A) = 1$, dizemos que o evento é **certo**.
- Quando $P(A) = 0$, dizemos que o evento é **impossível**.
- É usual representarmos uma probabilidade na forma de porcentagem. Por exemplo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

Cálculo do número de elementos de um espaço amostral

Por vezes o número de elementos de um espaço amostral de um experimento deve ser calculado usando os agrupamentos vistos em análise combinatória: Permutação – Arranjo – Combinação.

Observe o exemplo: Um grupo é formado por quatro homens e duas mulheres.

Foram escolhidas, ao acaso, três pessoas desse grupo. Qual é a probabilidade de as duas mulheres do grupo estarem entre as três pessoas escolhidas?



Resolução:

- O número de elementos do espaço amostral é dado pelo número de grupos de 3 pessoas que se pode formar com as 6 pessoas:

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

- O número de elementos do evento desejado é dado pelo número de grupos de 3 pessoas que podemos formar tendo 1 homem e 2 mulheres.

$$C_4^1 \cdot C_2^2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\text{Logo: } P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

QUESTÃO

Qual dos seguintes grupos de 6 números você acha mais 'interessante' para jogar na Mega-Sena?

02, 08, 21, 44, 56 e 59

ou

01, 02, 03, 04, 05 e 06?



UMA SURPRESA DA MATEMÁTICA



Seguramente você jamais jogaria no segundo grupo, por achar totalmente improvável que esses números venham a ser sorteados. Para seu espanto, fique sabendo que, do ponto de vista da matemática, a chance do primeiro grupo ser sorteado é exatamente igual à chance do segundo.

A chance dos dois grupos é exatamente a mesma.

AS CHANCES DA MEGA-SENA



Se alguém fizer a aposta mínima que custa hoje R\$ 4,50, que chance tem de ganhar?

Solução:

- a) Nesta experiência, o espaço amostral é o total de combinações diferentes que podemos obter com 6 números a partir de 60 disponíveis, ou seja:

$$C_6^{60} = \frac{60!}{54! \cdot 6!} = 50\,063\,860$$

Logo, $n(U) = 50\,063\,860$.

- b) O ganhador acertará a Mega-Sena se os seis números escolhidos por ele coincidirem com os seis números sorteados, sendo assim:

Logo, $n(A) = 1$.

- c) A probabilidade de ocorrer o evento é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{50\,063\,860} \approx 0,000002\%$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. (ENEM) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{19}{100}$ c) $\frac{20}{100}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{80}{100}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. (UFRGS – RS) Considere os números naturais de 1 até 100. Escolhido ao acaso um desses números, a probabilidade de ele ser um quadrado perfeito é

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{4}{25}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{9}{10}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (ENEM) O Estatuto do Idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

Nome	Idade (em ano)
Orlando	89
Gustavo	86
Luana	86
Teresa	85
Márcia	84
Roberto	82
Heloísa	75
Marisa	75
Pedro	75
João	75
Antônio	72
Fernanda	70

Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{1}{4}$

4. (UFRGS – RS) Em uma urna, estão depositados cartões retangulares de papel com todos os anagramas possíveis de serem formados com quatro letras, considerando as letras R, O, M, A, utilizando todas exatamente uma vez. Cada cartão contém um único anagrama e todos os cartões são do mesmo tamanho e peso. Retirando de forma aleatória um cartão da urna, considere p a probabilidade de estar escrito nesse cartão o anagrama AMOR. Dadas essas condições, pode-se afirmar que

a) $p \leq 5\%$. b) $5\% < p \leq 20\%$. c) $20\% < p \leq 25\%$. d) $25\% < p \leq 30\%$. e) $p > 30\%$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. Maria e João estão apostando um contra o outro em um jogo com dois dados de 6 faces. Cada um deve escolher um número entre 2 e 12 e depois jogar os dois dados simultaneamente. Quem acertar o valor da soma que aparece nas faces superiores dos dois dados é o ganhador. Sobre os conceitos de probabilidade, assinale o que for correto.

01. Se Maria escolher o número 10 e João escolher o número 3, ambos terão a mesma probabilidade de ganhar.
02. Se Maria escolher o número 7, a probabilidade de ela ganhar será aproximadamente 16,7%.
04. Se João escolher os números 5 e 9 e se Maria escolher os números 3 e 7, então eles terão a mesma probabilidade de ganhar.
08. Se João escolher o número 5, a probabilidade de ele ganhar será maior do que 10%.
16. O conjunto dos possíveis resultados é $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, logo a probabilidade de sair o número 2 é $\frac{1}{11}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (ACAFE – SC) Tomando-se ao acaso uma das diagonais formadas pelos vértices de um octógono regular, a probabilidade de que a diagonal passe pelo centro do octógono é de:

- a) 50% b) 40% c) 20% d) 0%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (ACAFE – SC) Uma fábrica de peças automotivas produz três tipos de peças P_1 , P_2 e P_3 . Sabe-se que 30% das peças produzidas nessa fábrica são do tipo P_1 e 95% das peças do tipo P_1 não apresentam defeitos. Escolhendo, ao acaso, uma das peças produzidas por essa fábrica, qual a probabilidade de se selecionar uma peça defeituosa do tipo P_1 ?

- a) 35% b) 3% c) 5% d) 1,5%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UFRGS – RS) Considere um hexágono convexo com vértices A, B, C, D, E e F. Tomando dois vértices ao acaso, a probabilidade de eles serem extremos de uma diagonal do hexágono é

- a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{2}{5}$. c) $\frac{3}{5}$. d) $\frac{4}{5}$. e) 1.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

9. (UFRGS - RS) Antônio e Francisca fazem parte de um grupo de dez médicas que atuam no cuidado de pacientes com COVID-19, em um hospital de Porto Alegre. Um outro hospital no Rio Grande do Sul está convidando um quarteto de médicas do grupo, do qual Antônio e Francisca fazem parte, para organizar um evento científico sobre a COVID-19. A probabilidade de Antônio e Francisca fazerem parte desse quarteto convidado é

a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{2}{5}$. c) $\frac{3}{14}$. d) $\frac{2}{15}$. e) $\frac{1}{35}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (ENEM) O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% deles eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%. Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

a) 10 b) 15 c) 35 d) 40 e) 45

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

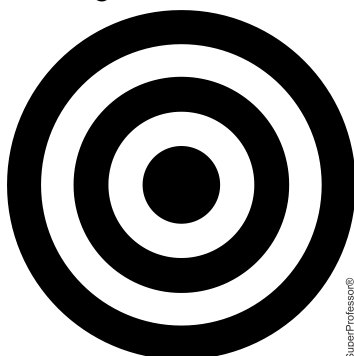
11. (ACAFE - SC) Em um determinado jogo de futebol do campeonato brasileiro, o resultado final da partida foi 3×2 . A probabilidade de que o time perdedor tenha marcado os dois primeiros gols é:

a) 10% b) 30% c) 50% d) 90%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

12. (UFRGS – RS) Na construção de um alvo para ser usado em uma competição olímpica, são usadas circunferências concêntricas, cujos raios medem 2, 4, 6, 8 e 10, respectivamente, tal como mostrado na figura abaixo.



Após a confecção do alvo, é realizado um teste, em que uma máquina dispara de maneira aleatória um dardo em direção ao alvo. A probabilidade de o dardo lançado atingir, com a sua ponta, a parte sombreada do alvo é

- a) 20%. b) 30%. c) 40%. d) 50%. e) 60%.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

13. (UNESP – SP) Uma urna contém bolas numeradas de 1 até 100. Considere os seguintes eventos associados à retirada aleatória de uma bola dessa urna:

E_1 : sair um número de 2 algarismos;

E_2 : sair um número cuja soma de seus algarismos seja igual a 3;

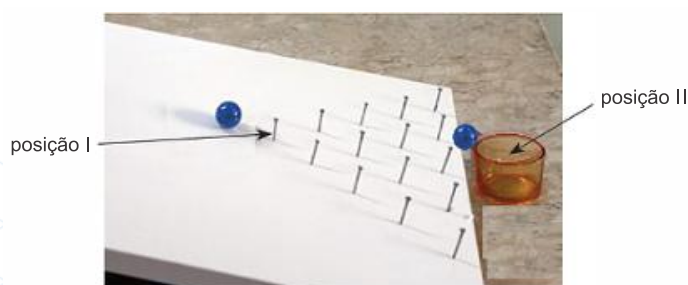
E_3 : sair um número estritamente maior que k (sendo k um inteiro de 1 até 100).

Sendo $P(E_2) < P(E_3) \leq P(E_1)$ a ordenação das probabilidades associadas a cada um dos três eventos, a quantidade de possibilidades distintas para k é igual a

- a) 87 b) 86 c) 88 d) 90 e) 89

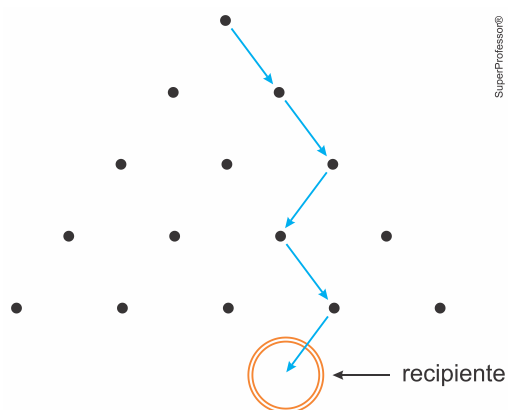
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

14. (UERJ - RJ) A imagem a seguir apresenta cinco linhas horizontais de pregos em uma disposição triangular sobre uma superfície plana, inclinada em relação ao plano horizontal. Ao soltar uma bolinha, ela rola e choca-se com o prego da primeira linha, na posição I. Em seguida, ela continua a rolar, chocando-se com apenas um prego de cada linha subsequente e, dependendo de sua trajetória, poderá cair no recipiente, na posição II.



Sabe-se que a probabilidade de a bolinha se chocar ou com o prego localizado imediatamente à direita ou com o imediatamente à esquerda é igual a $\frac{1}{2}$.

Uma possível trajetória da bolinha até o recipiente está representada no esquema a seguir.



A probabilidade de a bolinha cair no recipiente é igual a:

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{16}$ d) $\frac{7}{12}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

15. (ENEM) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame *antidoping*. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

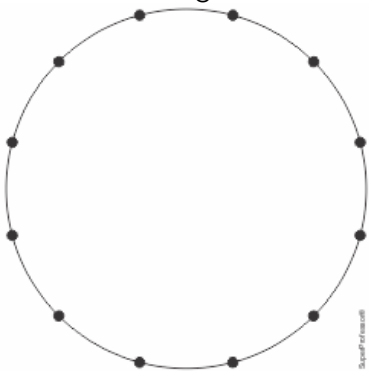
Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(I)$, $P(II)$ e $P(III)$ sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

- a) $P(I) < P(III) < P(II)$ b) $P(II) < P(I) < P(III)$ c) $P(I) < P(II) = P(III)$ d) $P(I) = P(II) < P(III)$ e) $P(I) = P(II) = P(III)$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

16. (UFRGS – RS) Doze pontos estão dispostos de modo equidistante em uma circunferência, como mostrado na figura abaixo.



A probabilidade de escolher aleatoriamente três pontos distintos, os quais sejam vértices de um triângulo equilátero, é

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{39}$ c) $\frac{1}{55}$ d) $\frac{1}{110}$ e) $\frac{1}{220}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

17. (UEPG – PR) Considerando todos os números de cinco algarismos distintos formados com os elementos do conjunto $P = \{1, 3, 6, 7, 8\}$, assinale o que for correto.

01. Ao sortearmos um deles, a probabilidade de o número ser 13678 é de 0,8333...%.
02. Ao sortearmos um deles, a probabilidade de o número ser par é de 40%.
04. Ao sortearmos um deles, a probabilidade de o número ser ímpar é de 60%.
08. Ao sortearmos um deles, a probabilidade de o número ser menor que 37861 é de 34,1666...%.
16. Ao sortearmos um deles, a probabilidade de o número ser maior que 81673 é de 16,666...%.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

18. (ITA – SP) Um dodecaedro regular tem 12 faces que são pentágonos regulares. Escolhendo-se 2 vértices distintos desse dodecaedro, a probabilidade de eles pertencerem a uma mesma aresta é igual a:

- a) $\frac{15}{100}$ b) $\frac{3}{19}$ c) $\frac{15}{190}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{2}{5}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

Gabarito – Aula 01

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		c	a	e	a	14	c	d	c	d
1	d	a	e	b	c	e	c	31	b	

RESOLUÇÃO – AULA 01

Resolução do Exercício 1: [C]

É imediato que a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{\text{desejado}}{\text{total}} = \frac{20}{100}$$

Resolução do Exercício 2: [A]

No conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 98, 99, 100\}$ há os quadrados perfeitos 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

Assim, sendo P a probabilidade pedida, temos:

$$P = \frac{10}{100}$$

$$P = \frac{1}{10}$$

Resolução do Exercício 3: [E]

Como Roberto é, necessariamente, a sexta pessoa a ser sorteada e existem quatro pessoas com a mesma idade de João, segue que a probabilidade pedida é $\frac{1}{4}$.

Resolução do Exercício 4: [A]

Total de anagramas possíveis:

$$4! = 24$$

Como só há 1 maneira de termos a palavra AMOR, a probabilidade procurada vale:

$$\frac{1}{24} \cdot 100\% \cong 4,2\%$$

Ou seja: $p \leq 5\%$

Resolução do Exercício 5: [14]

Dois dados comuns de faces.

Os possíveis resultados variam de 2 a 12.

Total de combinações possíveis: $6 \times 6 = 36$.

Analisando as afirmações:

[01] Falsa, pois as probabilidades são diferentes.

Soma 10: 3 casos

Soma 3: 2 casos

[02] Verdadeira. Soma 7 ocorre em 6 de 36 casos: $\frac{6}{36} \approx 16,7\%$

[04] Verdadeira. Ambos terão a mesma quantidade de casos favoráveis.

Soma 5: 4 casos e soma 9: 4 casos. Total: 8.

Soma 3: 2 casos e soma 7: 6 casos. Total: 8.

[08] Verdadeiro

Os casos em que a soma dos dados resulta em 5 são:

(1, 4), (2, 3), (3, 2) e (4, 1)

Total de casos possíveis: $6 \cdot 6 = 36$

Portanto, a probabilidade pedida vale:

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

[16] Falsa. Embora existam 11 valores possíveis (de 2 a 12), os eventos não são equiprováveis.

O total de casos é 36 e só 1 resulta em soma 2, então:

$$P(2) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{11}$$

Resolução do Exercício 6: [C]

Pode-se calcular o número total de diagonais de um octógono ($n = 8$ lados)

pela fórmula: $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \rightarrow d = \frac{8 \cdot 5}{2} \rightarrow d = 20$

Destas, apenas as diagonais que ligam vértices opostos passam pelo centro, ou seja, apenas 4 diagonais passam pelo centro do polígono. Assim, a probabilidade de que tomando-se ao acaso uma das diagonais formadas pelos vértices de um octógono regular, essa passe pelo centro é de: $\frac{4}{20} = 0,2 \rightarrow 20\%$

Resolução do Exercício 7: [D]

Sendo P o total de peças, o número de peças defeituosas do tipo P_1 é:

$$0,3P \cdot 0,05 = 0,015P$$

Portanto, a probabilidade procurada é:

$$\frac{0,015P}{P} = 0,015 = 1,5\%$$

Resolução do Exercício 8: [C]

Número de diagonais de um hexágono:

$$d = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$$

Número de maneiras distintas de se escolher dois dos vértices do hexágono:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

Portanto, a probabilidade pedida será dada por:

$$P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Resolução do Exercício 9: [D]

Total de escolhas diferentes para o quarteto.

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$$

Quartetos com Antônia e Francisca.

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!}$$

Portanto, a probabilidade pedida será dada por:

$$P = \frac{\frac{8!}{2! \cdot 6!}}{\frac{10!}{4! \cdot 6!}} \Rightarrow P = \frac{8!}{2!} \cdot \frac{4!}{10!} \Rightarrow P = \frac{\cancel{8!}}{2!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}} \Rightarrow$$

$$P = \frac{12}{90} \Rightarrow \boxed{P = \frac{2}{15}}$$

Resolução do Exercício 11: [A]

Sejam p e g, respectivamente, os gols marcados pelo time perdedor e pelo time ganhador. O número de casos possíveis corresponde ao número de permutações de cinco objetos nem todos distintos, com duas e três repetições, isto é,

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Em consequência, como só há um caso favorável, segue que a resposta é

$$\frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%.$$

Resolução do Exercício 12: [E]

Área da parte sombreada do alvo:

$$A_S = \pi \cdot 2^2 + (\pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 4^2) + (\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 8^2)$$

$$A_S = 4\pi + 36\pi - 16\pi + 100\pi - 64\pi$$

$$A_S = 60\pi$$

Área total do alvo:

$$A_T = \pi \cdot 10^2$$

$$A_T = 100\pi$$

Portanto, a probabilidade pedida vale:

$$P = \frac{60\pi}{100\pi} \cdot 100\% = 60\%$$

Resolução do Exercício 13: [B]

Probabilidade de E_1 :

$$P(E_1) = \frac{100 - 9 - 1}{100} = \frac{90}{100}$$

Probabilidade de E_2 :

$$n(E_2) = n\{3, 12, 21, 30\} = 4$$

$$P(E_2) = \frac{4}{100}$$

Probabilidade de E_3 :

$$P(E_3) = \frac{100 - k}{100}$$

Logo:

$$\frac{4}{100} < \frac{100 - k}{100} \leq \frac{90}{100}$$

$$-96 < -k \leq -10$$

$$\therefore 10 \leq k < 96$$

Sendo assim, a quantidade de valores distintos de k é:

$$96 - 10 = 86$$

Resolução do Exercício 14: [C]

Quantidade de possibilidades para a trajetória da bolinha:

$$2^5 = 32$$

Para que a bolinha caia no recipiente, ele deve necessariamente realizar 3 deslocamentos para a direita e 2 deslocamentos para a esquerda, resultando num total de possibilidades igual a:

$$p_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Portanto, a probabilidade procurada vale:

$$P = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Resolução do Exercício 15: [E]

Além do atleta que utilizou a substância, deveremos escolher 2 atletas dentre os 199 que não a utilizaram. Logo, temos

$$P(I) = \frac{\text{desejado}}{\text{total}} = \frac{C_{199}^2}{C_{200}^3} = \frac{199!}{2! \times 197!} = \frac{3}{200}.$$

No segundo modo, sorteada a equipe, deveremos escolher dois atletas dentre os 9 que não a utilizaram. Assim, vem

$$P(II) = \frac{1}{20} \cdot \frac{C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{20} \cdot \frac{2! \cdot 7!}{10!} = \frac{3}{200}.$$

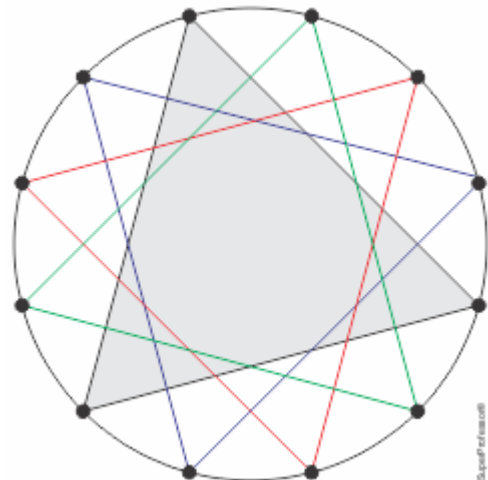
Finalmente, no terceiro modo, deveremos escolher 2 equipes em que não figura o jogador dopado e então sortear o jogador. Portanto, segue que

$$P(III) = \frac{C_{19}^2}{C_{20}^3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2! \cdot 17!}{20!} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{200}.$$

Logo: $P(I) = P(II) = P(III)$

Resolução do Exercício 16: [C]

Existem 4 triângulos equiláteros distintos conforme mostra a figura abaixo:



O total de triângulos possíveis de serem formados é:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{9!3!} = 220$$

Logo, a probabilidade pedida vale:

$$P = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

Resolução do Exercício 17: [31]

Quantidade total de números possíveis:

$$5! = 120$$

[01] Verdadeira. A probabilidade de ser o número 13678 é de:

$$\frac{1}{120} \cdot 100\% = 0,8333...\%$$

[02] Verdadeira. Quantidade de números pares (deve terminar em 6 ou 8):

$$4! \cdot 2 = 48$$

A probabilidade de o número ser par é de:

$$\frac{48}{120} \cdot 100\% = 40\%$$

[04] Verdadeira. A probabilidade de o número ser ímpar é de:

$$100\% - 40\% = 60\%$$

[08] Verdadeira. Quantidade de números menores que 37861:

$$\begin{array}{r} 1 \ 4 \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 24 \\ 3 \ 1 \ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \\ 3 \ 6 \ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \\ 3 \ 7 \ 1 \ \underline{2} \cdot \underline{1} = 2 \\ 3 \ 7 \ 6 \ \underline{2} \cdot \underline{1} = 2 \\ 3 \ 7 \ 8 \ 1 \ 6 = 1 \\ \hline 41 \end{array} +$$

Probabilidade de o número ser menor que 37861:

$$\frac{41}{120} \cdot 100\% = 34,1666...\%$$

[16] Verdadeira. Quantidade de números maiores que 81673:

$$\begin{array}{r} 8 \ 7 \ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \\ 8 \ 6 \ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \\ 8 \ 3 \ \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \\ 8 \ 1 \ 7 \ \underline{2} \cdot \underline{1} = 2 \\ \hline 20 \end{array} +$$

Probabilidade de o número ser maior que 81673:

$$\frac{20}{120} \cdot 100\% = 16,666...\%$$

Resolução do Exercício 18: [B]

Número de arestas:

$$A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

Número de vértices:

$$V + F = A + 2$$

$$V + 12 = 30 + 2$$

$$V = 20$$

Número de possibilidades de escolha dos vértices:

$$C_{20,2} = \frac{20!}{18!2!} = 190$$

Portanto, a probabilidade pedida vale:

$$P = \frac{30}{190} = \frac{3}{19}$$

PROBABILIDADE

AULA 02

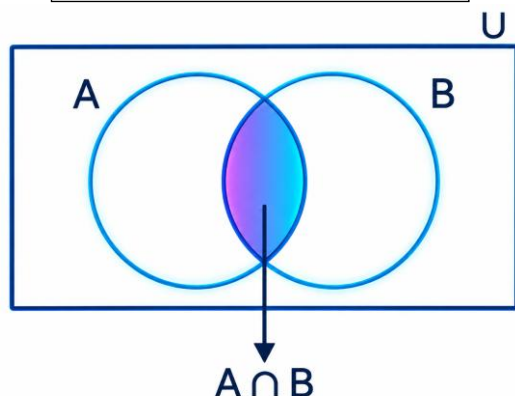
UNIÃO DE PROBABILIDADES



Probabilidade da união de dois eventos

Sejam A e B eventos quaisquer de um espaço amostral S. Temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



EXEMPLO

Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 15. Sorteando-se uma das bolas, qual é a probabilidade de sair um número par ou um número múltiplo de 3?



Espaço amostral: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 15\} \rightarrow n(U) = 15$

Eventos:

- Ocorrência de um número par:
 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \rightarrow n(A) = 7$
- Ocorrência de um múltiplo de 3:
 $B = \{3, 6, 9, 12, 15\} \rightarrow n(B) = 5$
- $A \cap B = \{6, 12\} \rightarrow n(A \cap B) = 2$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15}$$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{15} \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

EXEMPLO

Márcia vai sortear um número entre 1 e 2025. Qual a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3 ou de 7?



Resolução:

Os múltiplos de 3 entre 1 e 2025 são os termos da PA (3, 6, ..., 2025). E a sua quantidade de termos é:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \\ 2025 &= 3 + (n_3 - 1) \cdot 3 \\ n_3 &= 675 \end{aligned}$$

Os múltiplos de 7 entre 1 e 2025 são os termos da PA (7, 14, ..., 2023). E a sua quantidade de termos é:

$$\begin{aligned} 2023 &= 7 + (n_7 - 1) \cdot 7 \\ n_7 &= 289 \end{aligned}$$

Os múltiplos de 3 e 7 são os múltiplos do mínimo múltiplo de comum entre 3 e 7, ou seja, 21. E os seus termos são os elementos da PA (21, 42, ..., 2016).

E a sua quantidade de termos é:

$$\begin{aligned} 2016 &= 21 + (n_{21} - 1) \cdot 21 \\ n_{21} &= 96 \end{aligned}$$

Sendo assim, a quantidade de múltiplos de 3 ou de 7 entre 1 e 2025 é igual a:
 $675 + 289 - 96 = 868$

Portanto, a probabilidade procurada vale $\frac{868}{2025}$.



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. (UEPG – PR) Em um grupo de 500 estudantes, 90 estudam Química, 160 estudam Biologia e 20 estudam Química e Biologia. Se um aluno é escolhido ao acaso, assinale o que for correto.
- 01. A probabilidade de que ele estude Química ou Biologia é de 0,46
 - 02. A probabilidade de que ele não estude Química nem Biologia é de 0,54
 - 04. A probabilidade de que ele estude Química e Biologia é de 0,04
 - 08. A probabilidade de que ele estude somente Química é de 0,16

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. (UEL – PR) O filme Jumanji (1995) é uma obra de ficção que retrata a história de um jogo de tabuleiro mágico que empresta seu nome ao longa-metragem. O jogo é composto de dois dados distinguíveis de 6 lados, um tabuleiro com um visor de cristal no centro e peças que representam cada jogador. No filme, Alan Parrish é um garoto que encontra o jogo em um local de construção e o leva para casa. Assim que chega, Alan convida Sarah Whittle, uma garota da vizinhança, para jogar. Quando Alan lança os dados, aparece no visor a seguinte mensagem:



Alan então é sugado pelo visor de cristal e transportado magicamente até a selva de Jumanji.

Supondo que os dois dados do jogo sejam independentes e honestos, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a probabilidade de algum jogador lançar os dois dados e obter a soma de 5 ou 8, de modo a tirar Alan da selva.

- a) 15% b) 22% c) 25% d) 62% e) 66%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (UNIFOR - MEDICINA) Como parte do trabalho de conclusão de curso, um aluno do curso de Comunicação Social entrevistou 100 pessoas no *campus* onde estuda. As pessoas foram perguntadas se usavam a rede social A, a rede social B ou nenhuma delas. As respostas colhidas foram dispostas na seguinte tabela.

	Total de pessoas
Usa a rede social A	87
Usa a rede social B	73
Nenhuma delas	12

A porcentagem das pessoas entrevistadas que usam ambas as redes sociais A e B é de

- a) 25%. b) 43%. c) 57%. d) 65%. e) 72%.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (ENEM) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o rock e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1 000 alunos de uma escola.

Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos.

Preferência musical	rock	samba	MPB	rock e samba	rock e MPB	samba e MPB	rock, samba e MPB
Número de alunos	200	180	200	70	60	50	20

Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

- a) 2% b) 5% c) 6% d) 11% e) 20%

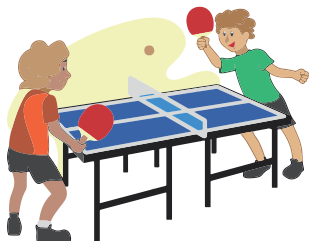
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



5. (OBMEP) Cinco jogadores disputam um torneio de tênis de mesa de modo que cada jogador enfrenta todos os outros exatamente uma vez. Nessas partidas não há empates. Em cada partida, os dois jogadores têm a mesma probabilidade de ganhar, e o resultado de uma partida não influencia o resultado das demais. Qual é a probabilidade de que algum jogador vença todas as suas partidas?



- a) $1/4$
- b) $5/8$
- c) $5/16$
- d) $5/32$
- e) $5/64$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

6. (UNIOESTE – PR) Escolhe-se, ao acaso, um número inteiro entre 101 e 150 inclusive. A probabilidade de o número escolhido ser um quadrado perfeito ou divisível por 4 é:

- a) $\frac{12}{50}$
- b) $\frac{13}{50}$
- c) $\frac{14}{50}$
- d) Menor do que 24%.
- e) Maior do que 28%.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (IFAL – AL) Em um certo grupo de pessoas, 40 falam inglês, 32 falam espanhol, 20 falam francês, 12 falam inglês e espanhol, 8 falam inglês e francês, 6 falam espanhol e francês, 2 falam as 3 línguas e 12 não falam nenhuma das línguas. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual a probabilidade de essa pessoa falar espanhol ou francês?

a) 7,5% b) 40% c) 50% d) 57,5% e) 67,5%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UEPG – PR) Se A é o evento que representa o lançamento de três moedas e B é a soma dos pontos resultantes do lançamento de dois dados, assinale o que for correto.

01. A probabilidade, no evento B, de a soma dos pontos resultantes do lançamento dos dados ser menor que 8 é menor que 59%.
02. A probabilidade, no evento A, de sair uma coroa e, no evento B, sair um número múltiplo de 3, nessa ordem, é maior que 50%.
04. A probabilidade, no evento A, de saírem duas caras ou de, no evento B, a soma dos pontos resultantes do lançamento dos dados ser igual a 5, nessa ordem, é menor que 50%.
08. A probabilidade, no evento A, de saírem pelo menos duas caras é maior que 55%.
16. A probabilidade, no evento A, de sair pelo menos uma cara é maior que 85%.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (UEPG – PR) Sobre probabilidades, assinale o que for correto.

01. Dois prêmios iguais são sorteados entre cinco pessoas, sendo três homens e duas mulheres. Admitindo que a mesma pessoa não possa ganhar os dois prêmios, a probabilidade de ser premiada pelo menos uma mulher é de 70%.
02. Numa moeda viciada, a probabilidade de ocorrer cara num lançamento é igual a três vezes a probabilidade de ocorrer coroa. Então a probabilidade de ocorrer cara num lançamento desta moeda é 60%
04. Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 são formados números de 3 algarismos distintos. Um deles é escolhido ao acaso. A probabilidade desse número ser par é maior que 50%
08. No sorteio de um número natural de 1 a 100, a probabilidade de sair um múltiplo de 10 ou de 15 é menor que 15%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10.

(UDESC – SC) Uma pesquisa foi realizada em uma escola para descobrir qual seria a cor do uniforme para o próximo ano. Foram consultados 100 alunos. Os alunos poderiam optar pelas cores azul, rosa e vermelha e, caso desejassem, poderiam votar em até duas cores, com exceção de azul e rosa. O número de alunos que votou apenas na cor azul é igual ao dobro do número de alunos que escolheram vermelha e rosa, e a quantidade de alunos que escolheu rosa, vermelha ou ambas é igual a 56. Sabe-se, ainda, que a quantidade de alunos que optou apenas pela cor vermelha é igual à quantidade de alunos que optou apenas pela cor rosa e que 20 alunos votaram em azul e vermelha. Com base nas informações dadas, se dois alunos forem escolhidos ao acaso, um após o outro, a probabilidade do segundo aluno escolhido ter votado apenas na cor azul, sabendo que o primeiro aluno escolhido também votou apenas na cor azul, é de aproximadamente:

a) 23,23%

b) 43,4%

c) 23%

d) 43%

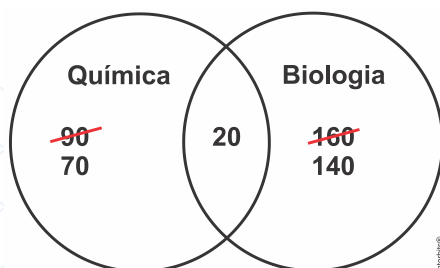
e) 19,1%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

Gabarito – Aula 02										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		07	C	E	D	C	B	D	21	09
1	A									

RESOLUÇÃO – AULA 02

Resolução do Exercício 1: [07]



[01] CORRETA. Calculando:

$$P(X) = \frac{70 + 20 + 140}{500} = \frac{230}{500} = 0,46$$

[02] CORRETA. Calculando:

$$P(\bar{X}) = 1 - 0,46 = 0,54$$

[04] CORRETA. Calculando:

$$P(A) = \frac{20}{500} = 0,04$$

[08] INCORRETA. Calculando:

$$P(Q) = \frac{70}{500} = 0,14$$

Resolução do Exercício 2: [C]

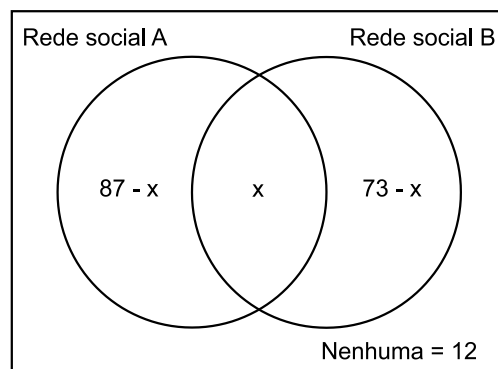
O espaço amostral do lançamento de dois dados é formado por 36 elementos possíveis. Destes 36 elementos aqueles que apresentam soma 5 ou 8 são os seguintes: (1, 4); (2, 3); (2, 6); (3, 2); (3, 5); (4, 1); (4, 4); (5, 3) e (6, 2). (9 elementos)

Portanto, a probabilidade P pedida será dada por:

$$P = \frac{9}{36} = 0,25 = 25\%$$

Resolução do Exercício 3: [E]

Seja x o número de pessoas que usam ambas as redes sociais, temos:



$$87 - x + x + 73 - x + 12 = 100$$

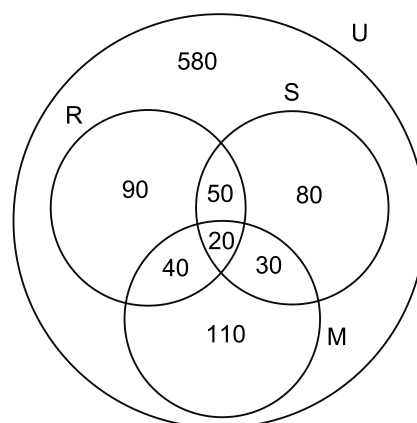
$$x = 72$$

Portanto, a probabilidade pedida vale:

$$P = \frac{72}{100} = 72\%$$

Resolução do Exercício 4: [D]

De acordo com os dados da tabela, obtemos o seguinte diagrama.



Portanto, a probabilidade de um estudante selecionado ao acaso preferir apenas MPB é

$$\text{dada por } \frac{110}{1000} \cdot 100\% = 11\%.$$

Resolução do Exercício 5: [C]

Como cada jogador disputa 4 partidas, a probabilidade de um jogador específico ganhar todas as partidas é de:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Porém, como há 5 jogadores e qualquer um deles pode ser o ganhador dessas partidas, a probabilidade pedida vale $\frac{5}{16}$.

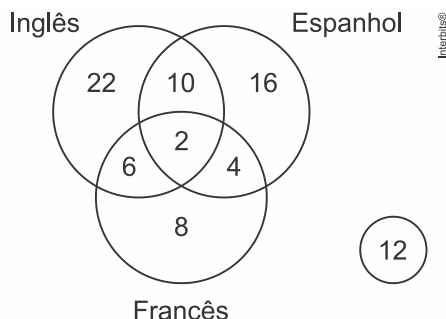
Resolução do Exercício 6: [B]

Existem 50 números entre 101 e 150. Destes 2 são quadrados perfeitos (121 e 144) e outros 11 são divisíveis por 4 (104, 108, 112, 116, 120, 124, 128, 132, 136, 140 e 148) – 144 é tanto quadrado perfeito quanto divisível por 4. Calculando-se:

$$P(x) = \frac{13}{50}$$

Resolução do Exercício 7: [D]

Seja o diagrama de Venn com todas as pessoas e as línguas que falam:



Para obter a probabilidade de quem fala espanhol ou francês deve-se obter a probabilidade de quem fala espanhol mais a probabilidade de quem fala francês menos a probabilidade de quem fala espanhol e francês, ou seja:

Sabendo que o total de pessoas é 80, temos a seguinte probabilidade:

$$P = P_{\text{(espanhol)}} + P_{\text{(francês)}} - P_{\text{(espanhol} \wedge \text{francês)}}$$

$$P = \frac{32}{80} + \frac{20}{80} - \frac{6}{80}$$

$$P = 0,4 + 0,25 - 0,075$$

$$P = 0,575$$

$$P = 57,5\%$$

Resolução do Exercício 8: [21]

Sejam E_1 e E_2 , respectivamente, os espaços amostrais de A e B.

Tem-se que

$$E_1 = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (k, c, c), (c, k, k), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)\}$$

e

$$E_2 = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\},$$

com $n(E_2) = 36$.

[01] Verdadeira. Com efeito, pois

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (3, 3), (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Logo, como $n(B) = 21$, temos

$$P(B) = \frac{21}{36} \cong 58,3\% < 59\%.$$

[02] Falsa. A probabilidade de sair exatamente uma coroa é $\frac{3}{8}$.

Os possíveis múltiplos de 3 são: 3, 6, 9 e 12.

Assim, temos

$$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (6, 6)\}.$$

Portanto, a probabilidade de sair um múltiplo de 3 é $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

Em consequência, temos

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = 12,5\% < 50\%.$$

[04] Verdadeira. A probabilidade de saírem exatamente duas caras é $\frac{3}{8}$.

Tem-se que $B = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Logo, a probabilidade da soma dos pontos resultantes ser igual a 5 é $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Desse modo, vem

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{9} = \frac{35}{72} \cong 48,6\% < 50\%.$$

[08] Falsa. Na verdade, tal probabilidade é $\frac{4}{8} = 50\% < 55\%$.

[16] Verdadeira. De fato, pois $\frac{8}{9} \cong 88,9\% > 85\%$.

Resolução do Exercício 9: [09]

[01] Verdadeira. De fato, pois existem $\binom{3}{2} = 3$

modos de distribuir os prêmios para dois homens e $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ modos de

distribuir os prêmios para duas pessoas quaisquer. Assim, a probabilidade de ser premiada ao menos uma mulher é igual a

$$1 - \frac{3}{10} = 70\%.$$

[02] Falsa. Sejam $P(c)$ e $P(k)$, respectivamente, a probabilidade de ocorrer cara e a probabilidade de ocorrer coroa. Logo, sabendo que $P(c) = 3P(k)$, temos

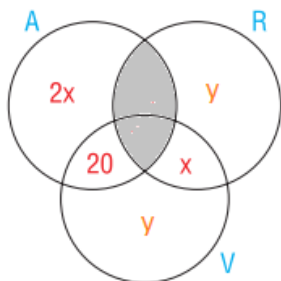
$$P(c) + P(k) = 1 \Leftrightarrow P(c) + \frac{P(c)}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow P(c) = 75\%.$$

[04] Falsa. O número será par se o algarismo das unidades for 2 ou 4. Desse modo, como existem 4 possibilidades para o algarismo das centenas e 3 possibilidades para o algarismo das dezenas, podemos concluir, pelo Princípio Multiplicativo, que a quantidade de números pares é $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Portanto, a probabilidade do número ser par é $\frac{24}{5!} = 20\% < 50\%$.

[08] Verdadeira. De 1 a 100 existem 10 múltiplos de 10, 6 múltiplos de 15 e 3 múltiplos de 10 e de 15 simultaneamente. Daí, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, existem $10 + 6 - 3 = 13$ números de 1 a 100 que são múltiplos de 10 ou de 15. Em consequência, a probabilidade é igual a $13\% < 15\%$.

Resolução do Exercício 10: [A]



$$\begin{cases} 2y + x = 56 \\ 2y + 3x + 20 = 10 \end{cases} \Rightarrow y = 22 \text{ e } x = 12$$

Segue que a probabilidade pedida é:

$$\frac{2x - 1}{100 - 1} = \frac{23}{99} \cong 23,23\%$$

PROBABILIDADE

AULA 03

PRODUTO DE PROBABILIDADES



1. Probabilidade do evento complementar

Considere o seguinte experimento:



No lançamento de um dado de RPG numerado de 1 a 12, determine a probabilidade de:

- sair um número primo;
- de não sair um número primo.

Solução:

a) sair um número primo: $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Visto que o espaço amostral é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 12\}$, temos:

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

b) não sair um número primo: $B = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$:

$$P(B) = \frac{7}{12}$$

Veja que nesse exemplo que:

$$P(A) + P(B) = \frac{5}{12} + \frac{7}{12} = \frac{12}{12} = 1 = 100\%$$

Nesses casos os eventos são ditos complementares, ou seja, um dos eventos é a negação do outro.

Notação: $\bar{A}$ é evento complementar de A.

Assim:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

2. Produto de Probabilidades

Sejam dois eventos **A** e **B** de um mesmo espaço amostral **U**. A probabilidade de ocorrer A e B é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

Em que:

- $P(A \cap B)$ é a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente.
- $P(A)$ é a probabilidade de ocorrer A.
- $P(B / A)$ é a probabilidade de ocorrer B, tendo ocorrido A.

Observação: Se $P(B / A) = P(B)$, então a probabilidade do evento B ocorrer independe do evento A ter ocorrido, dizemos então, que A e B são eventos independentes, logo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EXEMPLO

Lançando-se uma moeda e um dado, qual a probabilidade de se obter coroa na moeda e face 5 no dado?



Resolução: Sejam os eventos:

A: ocorrer cara $\rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

B: ocorrer face 5 $\rightarrow P(B / A) = P(B) = \frac{1}{6}$

Veja que A e B são eventos independentes.

Então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\text{Portanto: } P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Jogamos uma moeda comum e um dado comum. A probabilidade de sair um número ímpar e a face cora é:

a) 0,1 b) 0,2 c) 0,25 d) 0,33 e) 0,5

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Uma urna contém 5 bolas azuis, 3 bolas amarelas e 2 bolas vermelhas, todas indistinguíveis ao tato. Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição.

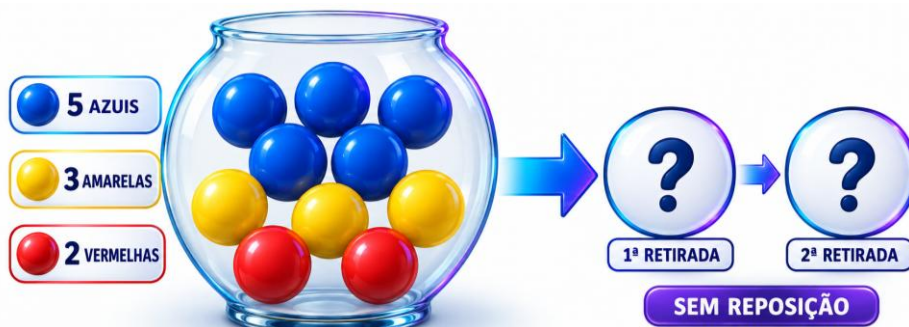


Qual é a probabilidade de a primeira bola retirada ser azul e a segunda ser amarela?

a) 1/10 b) 1/6 c) 2/9 d) 3/10 e) 4/15

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Uma urna contém 5 bolas azuis, 3 amarelas e 2 vermelhas, todas indistinguíveis ao tato. Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição.



Qual é a probabilidade de as duas bolas retiradas terem a mesma cor?

- a) $7/15$ b) $7/30$ c) $14/45$ d) $17/45$ e) $2/9$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. Em uma urna há 4 bolas verdes e 6 bolas brancas. Uma bola é retirada, sua cor é registrada e ela é devolvida à urna. Esse procedimento é repetido até completar três retiradas. Qual é a probabilidade de aparecer pelo menos uma bola verde nas três retiradas?

- a) $27/125$ b) $54/125$ c) $98/125$ d) $72/125$ e) $3/5$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (ACAFE – SC) A probabilidade de que um médico acerte o diagnóstico de um paciente é de 95%. Dado que esse médico tenha errado o diagnóstico, a probabilidade de não ser processado pelo paciente é 90%. Qual a probabilidade de que o médico erre o diagnóstico e seja processado pelo paciente?

- a) 4,5% b) 3,2% c) 0,5% d) 3,8%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (IFPE – PE) Dentro de um freezer, há 4 garrafas de vinho da marca A, 6 garrafas de vinho da marca B e 5 garrafas de vinho da marca C, retiram-se duas garrafas sem observar a marca. A probabilidade de que os dois retirados sejam da mesma marca é

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{3}{132}$ d) $\frac{31}{105}$ e) $\frac{1}{5}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UERJ – RJ) Para fazer o sorteio de um livro, quatro amigos colocaram três bolas brancas e duas pretas em uma caixa. Decidiram que o primeiro a retirar uma bola preta ficará com o livro. Na ordem alfabética de seus nomes, cada um retira uma bola, ao acaso, sem devolvê-la à caixa. A probabilidade de o terceiro amigo retirar a primeira bola preta e ficar com o livro é igual a:

- a) 10% b) 20% c) 30% d) 40%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UERJ – RJ) Um restaurante oferece descontos sobre o total do consumo com base na sorte do cliente ao lançar um dado que possui uma face vermelha e cinco faces brancas. Após lançar o dado duas vezes, um cliente receberá desconto se a face vermelha ficar voltada para cima pelo menos uma vez. A probabilidade de um cliente receber um desconto na sua conta é igual a:

- a) $\frac{7}{18}$ b) $\frac{11}{18}$ c) $\frac{7}{36}$ d) $\frac{11}{36}$

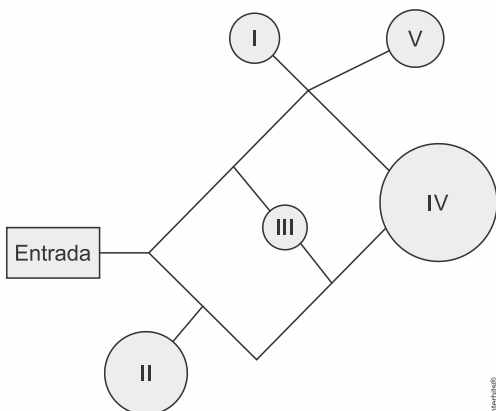
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

9. (UEPG – PR) Foi sorteada aleatoriamente uma bola de uma urna que contém bolas numeradas de 10 a 30. Com base nesses dados, assinale o que for correto.

01. A probabilidade de sair um número múltiplo de 2 ou de 3 é $\frac{2}{3}$.
02. A probabilidade de sair um número múltiplo de 5 é $\frac{5}{21}$.
04. A probabilidade de sair um número múltiplo de 3 e de 9 é $\frac{2}{21}$.
08. A probabilidade de sair um número divisível por 60 é $\frac{5}{21}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (ENEM) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

- a) $\frac{1}{96}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{5}{24}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{12}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

11. (ESPM) As semifinais de um campeonato serão disputadas pelos times A e B numa chave e pelos times C e D na outra chave. Na final, o vencedor de A x B joga com o vencedor de C x D, sagrando-se campeão o time que vencer esse jogo.

A tabela abaixo mostra as chances de vitórias feitas por especialistas em futebol para os possíveis confrontos:

60%	A x B	40%
70%	A x C	30%
80%	A x D	20%
60%	B x C	40%
75%	B x D	25%
70%	C x D	30%

Se esses prognósticos forem confirmados, a probabilidade de o time A sagrar-se campeão é de:

- a) 25,8%
- b) 43,8%
- c) 36,6%
- d) 54,5%
- e) 62,6%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

12. (ENEM) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

- a) 23,7%
- b) 30%
- c) 44,1%
- d) 65,7%
- e) 90%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

13. (ACAFE – SC) A **sensibilidade** de um teste diagnóstico corresponde ao percentual de resultados positivos dentre as pessoas que têm uma determinada doença ou condição clínica. Assim, quanto mais alto o nível de sensibilidade de um teste, maior a chance de ele comprovar a doença. Já a **especificidade** é a capacidade do mesmo teste ser negativo nos indivíduos que não apresentam a doença que está sendo investigada. A especificidade demonstra, então, a quantidade de verdadeiros negativos entre aqueles que realmente não estão com a doença. Em ensaios clínicos, foi determinado que o teste “super-ultra-rápido” para prever COVID-19 tem sensibilidade de 95% e especificidade de 85%. Uma população específica tem prevalência (número total de casos) de COVID-19 de 10%. Escolhendo ao acaso um indivíduo dessa população, a probabilidade de o teste “super-ultra-rápido” ser falso positivo ou falso negativo é:

- a) 12% b) 20% c) 14% d) 18%

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



Gabarito – Aula 03



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		C	b	c	C	C	D	B	D	07
1	C	B	D	C						



RESOLUÇÃO – AULA 03

Resolução do Exercício 1: [C]

A probabilidade de sair um número ímpar é $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e a probabilidade de sair face cara é $\frac{1}{2}$. Portanto, como os eventos são independentes, a probabilidade pedida é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Resolução do Exercício 2: [B]

A probabilidade de a primeira bola ser azul é $\frac{5}{10}$. Como a bola azul não é devolvida, restam 9 bolas na urna, das quais 3 são amarelas.

$$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9}$$

$$P = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

Logo, a probabilidade de retirar primeiro uma bola azul e depois uma bola amarela é $\frac{1}{6}$.

Resolução do Exercício 3: [C]

As duas bolas terão a mesma cor se ocorrer um destes três casos mutuamente exclusivos: azul e azul, amarela e amarela, ou vermelha e vermelha.

Como não há reposição, o total de bolas diminui de 10 para 9 na segunda retirada. Além disso, a quantidade disponível da cor sorteada diminui em uma unidade.

$$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}$$

$$P = \frac{20}{90} + \frac{6}{90} + \frac{2}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

Portanto, a probabilidade de as duas bolas terem a mesma cor é $\frac{14}{45}$.

Resolução do Exercício 4: [C]

O evento pedido é aparecer pelo menos uma bola verde. Seu evento complementar é não aparecer nenhuma verde, isto é, retirar três bolas brancas.

Como há reposição, a probabilidade de retirar uma bola branca permanece $\frac{6}{10}$ em todas as

etapas. Assim, as três retiradas são independentes.

$$P(3 \text{ brancas}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{216}{1000} = \frac{27}{125}$$

$$P(\text{pelo menos 1 verde}) = 1 - \frac{27}{125} = \frac{98}{125}$$

Logo, a probabilidade solicitada é $\frac{98}{125}$, equivalente a 78,4%.

Resolução do Exercício 5: [C]

Segundo as informações dadas no problema, tem-se que:

- 1) A: Probabilidade de que o médico erre o diagnóstico
- 2) B: Probabilidade de ser processado pelo paciente: 10%

$$\text{Logo } P(A \cap B) = 0,05 \times 0,1 = 0,5\%$$

Resolução do Exercício 6: [D]

Retirando duas garrafas de vinho da marca A:

$$P_A = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} = \frac{12}{210}$$

Retirando duas garrafas de vinho da marca B:

$$P_B = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{30}{210}$$

Retirando duas garrafas de vinho da marca C:

$$P_C = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{20}{210}$$

Portanto a probabilidade pedida será dada por:

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{12}{210} + \frac{30}{210} + \frac{20}{210} = \frac{62}{210} = \frac{31}{105}$$

Resolução do Exercício 7: [B]

A probabilidade pedida é dada por:

$$p = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} = 20\%$$

B B P

Resolução do Exercício 8: [D]

Probabilidade de não ocorrer nenhuma face vermelha nos 2 lançamentos:

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Sendo assim, a probabilidade de um cliente receber um desconto é igual a:

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Resolução do Exercício 9: [07]

[01] Verdadeira. De fato, tem-se que
 $M_2 = \{10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$,
 $M_3 = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ e
 $M_2 \cap M_3 = \{12, 18, 24, 30\}$. Logo, pelo
Princípio da Inclusão-Exclusão, vem
 $n(M_2 \cup M_3) = n(M_2) + n(M_3) - n(M_2 \cap M_3)$
 $= 11 + 7 - 4$
 $= 14$.

Por conseguinte, como
 $n(\Omega) = 30 - 10 + 1 = 21$, temos

$$P(M_2 \cup M_3) = \frac{n(M_2 \cup M_3)}{n(\Omega)} \\ = \frac{14}{21} \\ = \frac{2}{3}.$$

[02] Verdadeira. Com efeito, pois
 $M_5 = \{10, 15, 20, 25, 30\}$ e, portanto, temos

$$P(M_5) = \frac{n(M_5)}{n(\Omega)} = \frac{5}{21}.$$

[04] Verdadeira. De fato, pois
 $M_3 \cap M_9 = M_9 = \{18, 27\}$. Logo, segue que

$$P(M_9) = \frac{n(M_9)}{n(\Omega)} = \frac{2}{21}.$$

[08] Falsa. Como 60 é maior do que qualquer elemento de $\Omega = \{10, 11, 12, \dots, 29, 30\}$, segue que a probabilidade de sair um número divisível por 60 é zero. Trata-se de um evento impossível.

Resolução do Exercício 10: [C]

Existem apenas duas opções favoráveis de percurso, quais sejam: uma no sentido horário e outra no sentido anti-horário. Logo, segue que a resposta é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}.$$

Resolução do Exercício 11: [B]

Probabilidade de A ganhar de B, C ganhar de D e A ganhar de C:

$$0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,294$$

Probabilidade de A ganhar de B, D ganhar de C e A ganhar de D:

$$0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,144$$

Logo, a probabilidade de A ser o campeão é de:

$$0,294 + 0,144 = 0,438 = 43,8\%$$

Resolução do Exercício 12: [D]

A probabilidade de que um aluno não compreenda ou não fale inglês é $1 - 0,3 = 0,7$. Logo, a probabilidade de que nenhum dos alunos compreenda ou fale inglês é $0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,343$.

Portanto, a probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é $1 - 0,343 = 0,657 = 65,7\%$.

Resolução do Exercício 13: [C]

População.
10% com COVID-19
90% sem COVID-19.

Falso Negativo $(1 - 0,95) \cdot 10\% = 0,5\%$

Falso Positivo $(1 - 0,85) \cdot 90\% = 13,5\%$

Portanto a probabilidade pedida será:

$$P = 0,5\% + 13,5\% = 14\%.$$

PROBABILIDADE

AULA 04

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL



De um baralho de 52 cartas extraímos uma carta. Qual a probabilidade de que a carta seja um rei, sabendo que ela é uma figura?



Solução:

Note que o espaço amostral desse experimento não é o conjunto das 52 cartas. Com a informação de que a carta é uma figura, o espaço amostral será formado pelas 12 figuras do baralho. Como existem 4 reis, a probabilidade será $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Probabilidades como essas são denominadas **probabilidades condicionadas** e será objeto da nossa aula.

1. Probabilidade condicional

Se **U** é um espaço amostral e A e B eventos, denominamos **probabilidade condicional** de A, dado B, a probabilidade de ocorrer A visto que já ocorreu B.

Notação: $P(A/B)$

Cálculo: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ com $P(B) \neq 0$

Para entender um pouco melhor a fórmula acima acompanhe o seguinte exemplo:

Numa escola existem 20 estudantes, dos quais 12 são meninas e 8 são meninos.



Ao prestarem uma prova no final do ano observou-se que 5 meninas e 3 meninos foram aprovados, como mostra o quadro:

	Aprovados	Não aprovados	Total
Meninas	5	7	12
Meninos	3	5	8
Total	8	12	20

Considere agora, os seguintes eventos:

A: O estudante escolhido foi aprovado: $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

B: O estudante escolhido é menina: $P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

Daí pergunta-se: Qual é a probabilidade de o estudante ter sido aprovado, sabendo que é menina?

Resolução: Observe que o problema pede a probabilidade de ocorrer **A** (estudante ter sido aprovado), mas informa que já ocorreu **B** (estudante é menina); Portanto o novo espaço amostral está condicionado. Veja o quadro abaixo:

	Aprovados	Não aprovados	total
Mulheres	5	7	12

Portanto, a probabilidade que procuramos é: $\frac{5}{12}$

Generalização

De um modo geral, se **U** é um espaço amostral e A e B eventos, denominamos **probabilidade condicional** de A, dado B, a probabilidade de ocorrer A visto que já ocorreu B.

Cálculo: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ com $P(B) \neq 0$

No exemplo anterior, temos:

A: O estudante escolhido foi aprovado: $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

B: O estudante escolhido é menina: $P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$A \cap B$: O estudante escolhido foi aprovado e é menina: $P(A \cap B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Aplicando $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ vem:

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{12}$$

2. Distribuição Binomial

Se um experimento aleatório é realizado n vezes sucessivas, sempre nas mesmas condições, então a probabilidade de que um evento A desse experimento ocorra exatamente k vezes é dada pela expressão:

$$P_n^{k,n-k} \cdot [P(A)]^k \cdot [P(\bar{A})]^{n-k}$$

onde $P_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Vamos considerar o seguinte problema:



A probabilidade de um atirador atingir um alvo em um único tiro é $\frac{1}{5}$. Com apenas 5 tiros, qual a probabilidade de se acertar o alvo exatamente 2 vezes?

Resolução: Inicialmente observe os seguintes eventos:

$$\begin{cases} A: \text{Acertar o alvo} \rightarrow P(A) = \frac{1}{5} \\ \bar{A}: \text{Não acertar o alvo} \rightarrow P(\bar{A}) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Observe que A e $\bar{A}$ são eventos complementares.

Nos 5 experimentos, o problema exige que ocorra o evento A exatamente 2 vezes. É natural perceber que o evento $\bar{A}$ deve ocorrer 3 vezes. Em contra partida, não é definido no problema a ordem em que devem acontecer os eventos A e $\bar{A}$.

Veja abaixo algumas das possibilidades em que podem ocorrer:

A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$
$\bar{A}$	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$

Observe que qualquer que seja a disposição dos eventos, é fácil perceber que a probabilidade dessa ocorrência é a mesma, ou seja: $[P(A)]^2 \cdot [P(\bar{A})]^3$

Daí, resta obter apenas a quantidade de maneiras diferentes em que essas situações podem ser dispostas. Para isso basta permutarmos $A, A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}$.

Então, a probabilidade procurada é dada por:

$$P_5^{2,3} \cdot [P(A)]^2 \cdot [P(\bar{A})]^3$$

$$\frac{5!}{2!3!} \cdot \left[\frac{1}{5}\right]^2 \cdot \left[\frac{4}{5}\right]^3$$

$$10 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{64}{125}$$

Efetuando os cálculos, vem: $\frac{128}{625}$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. (UPE – PE) Dentre os esportes oferecidos aos estudantes de uma escola com 3000 alunos, temos o futebol como preferência, sendo praticado por 600 estudantes. 300 estudantes dessa mesma escola praticam natação, e 100 praticam ambos os esportes. Selecionando-se um estudante praticante de futebol para uma entrevista, qual a probabilidade de ele também praticar natação?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{5}{6}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. (ENEM) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO CALÇADOS	DOS	NÚMERO FUNCIONÁRIAS	DE
39,0		1	
38,0		10	
37,0		3	
36,0		5	
35,0		6	

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{7}$ e) $\frac{5}{14}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (ENEM) Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos. Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (UEG – GO) A tabela a seguir apresenta a preferência de homens e mulheres em relação a um prato, que pode ser doce ou salgado, típico de certa região do Estado de Goiás.

Sexo	Preferências	
	Doce	Salgado
Masculino	80	20
Feminino	60	40

Considerando-se os dados apresentados na tabela, a probabilidade de um desses indivíduos preferir o prato típico doce, sabendo-se que ele é do sexo feminino, é de

a) 0,43 b) 0,50 c) 0,60 d) 0,70

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. Jogamos 5 moedas comuns ao mesmo tempo. Qual a probabilidade de que o resultado seja 3 caras e 2 coroas?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{29}{128}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (ENEM) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é
- a) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
 - b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
 - c) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
 - d) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
 - e) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (ENEM) Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos. Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

- a) $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$ b) $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$ c) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$ d) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$ e) $\frac{2}{3^{10}}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (ACAFE – SC) Um casal que pretende ter 5 filhos descobre, ao fazer certos exames, que determinada característica genética tem a probabilidade de um terço de ser transmitida a cada de seus futuros filhos. Nessas condições, a probabilidade de, exatamente, três dos cinco filhos possuírem essa característica é:

- a) exatamente 17%.
- b) maior que 15%.
- c) menor que 14%.
- d) exatamente 18%.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

9. (ENEM) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20. A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

- a) 0,02048 b) 0,08192 c) 0,24000 d) 0,40960 e) 0,49152

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (ENEM) A *World Series* é a decisão do campeonato norte-americano de beisebol. Os dois times que chegam a essa fase jogam, entre si, até sete partidas. O primeiro desses times que completar quatro vitórias é declarado campeão. Considere que, em todas as partidas, a probabilidade de qualquer um dos dois times vencer é sempre $\frac{1}{2}$.

Qual é a probabilidade de o time campeão ser aquele que venceu a primeira partida da *World Series*?

- a) $\frac{35}{64}$. b) $\frac{40}{64}$. c) $\frac{42}{64}$. d) $\frac{44}{64}$. e) $\frac{52}{64}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	D	D	C	B	E	A	B	B
1	C									

RESOLUÇÃO – AULA 04

Resolução do Exercício 1: [D]

Sejam os eventos A: pratica futebol e B: pratica natação. Queremos calcular a probabilidade condicional $P(B|A)$. Logo, o resultado é

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}.$$

Resolução do Exercício 2: [D]

$$P = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

Resolução do Exercício 3: [D]

$$P = HHMM$$

$$P = P_4^{2,2} \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{1}{16}$$

$$P = \frac{3}{8}$$

Resolução do Exercício 4: [C]

$$P = \frac{60}{60 + 40} = 0,60.$$

Resolução do Exercício 5: [B]

3 caras e 2 coroas:

$$P_5^{3,2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Logo, a probabilidade P será dada por

$$P = \frac{5}{32}.$$

Resolução do Exercício 6: [E]

$$P = HHM$$

$$P = P_3^2 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{3!}{2!} \cdot \frac{1}{8}$$

$$P = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$$

Resolução do Exercício 7: [A]

Temos que ter exatamente uma cor verde:

$$P = \frac{2}{3}$$

Consequentemente, temos que ter 9 vezes a cor vermelha:

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

E a ordem em que esses acontecimentos irão acontecer pouco importa; logo devemos permutar 1 verde e 9 vermelhos.

Calculando:

$$P(x) = P_{10}^9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^9} = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$$

Resolução do Exercício 8: [B]

Pelo Teorema Binomial, segue que a probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} P(k=3) &= \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 10 \cdot \frac{4}{243} \\ &\cong 16,46\%, \end{aligned}$$

ou seja, maior do que 15% e diferente de 17% e de 18%.

Resolução do Exercício 9: [B]

Para que o teste termine na quinta pergunta, o candidato deverá errar exatamente uma pergunta dentre as quatro primeiras e errar a quinta. Segue abaixo algumas situações favoráveis:

A – Acertar E – Errar

EAAAE

AEAAE

AAEAE

AAAE E

Por conseguinte, o resultado é

$$P_4^3 \cdot (0,8)^3 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 4 \cdot 0,512 \cdot 0,04 = 0,08192.$$

Resolução do Exercício 10: [C]

Considere as duas equipes A e B disputando a final.

Vamos supor que a equipe A seja campeão tendo ganhado o primeiro jogo. Sendo assim, temos os seguintes cenários e probabilidades:

Cenário 1: Time A ganha todos os jogos:

$$\underset{\text{fixo}}{A} \cdot \underset{\text{fixo}}{AAA} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Cenário 2: Time A ganha 4 jogos e perde 1.

$$\underset{\text{fixo}}{A} \cdot \underset{\substack{\text{po dem} \\ \text{permutar}}}{BAA} \underset{\text{fixo}}{A} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot P_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{32}$$

Cenário 3: Time A ganha 4 jogos e perde 2.

$$\underset{\text{fixo}}{A} \cdot \underset{\substack{\text{po dem} \\ \text{permutar}}}{BBAA} \underset{\text{fixo}}{A} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot P_4^{2,2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{32}$$

Cenário 4: Time A ganha 4 jogos e perde 3.

$$\underset{\text{fixo}}{A} \cdot \underset{\substack{\text{po dem} \\ \text{permutar}}}{BBBAA} \underset{\text{fixo}}{A} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot P_5^{3,2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{5}{64}$$

Fazendo o mesmo processo para se o time B for vencedor, temos:

$$P = 2 \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{5}{64} \right) = \frac{42}{64}$$