CADERNO 03

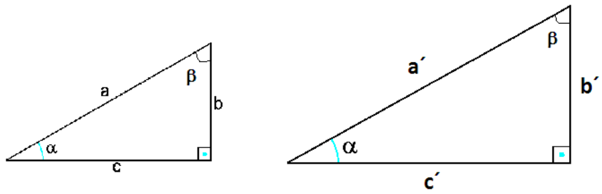
TRIGONOMETRIA – GEOMETRIA ANALÍTICA

VÍDEO AULA 29

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

Observe os triângulos da figura. Eles são semelhantes, pois possuem os ângulos ordenadamente congruentes.



Dessa semelhança podemos dizer que:

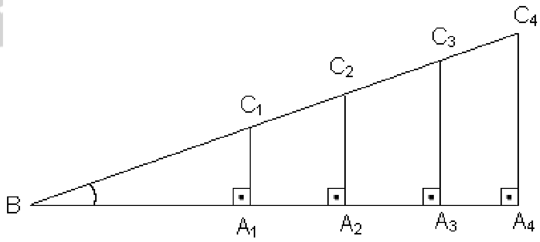
$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

As igualdades apresentadas acima mostram que a razão entre dois lados quaisquer de um triângulo retângulo é igual à razão entre dois lados homólogos de qualquer outro triângulo retângulo semelhante a ele.

Perceba que a razão entre dois lados quaisquer de um triângulo retângulo não depende do tamanho desse triângulo, mas sim de seus ângulos.



$$\frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \text{....constante}$$

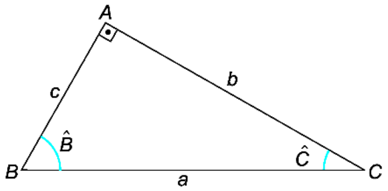
$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \text{....constante}$$

$$\frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \text{....constante}$$

As razões vistas acimas, constantes para cada valor do ângulo B, são denominadas razões trigonométricas.

Razões Trigonométricas

Inicialmente, considere o triângulo retângulo ABC



Nesse triângulo podemos destacar os seguintes elementos:

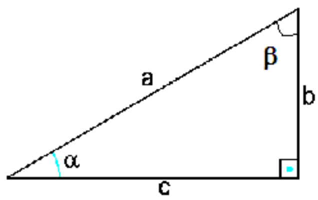
- $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são os catetos
- $\overline{BC}$ é a hipotenusa
- $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são os ângulos agudos

Pelo teorema angular de Thales prova-se que os ângulos agudos são complementares, ou seja, $\widehat{B}+\widehat{C} = 90°$

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS:

- SENO: seno de um ângulo agudo é o quociente entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.
- COSSENO: coSseno de um ângulo é o quociente entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.
- TANGENTE: tangente de um ângulo é o quociente entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.

Sendo assim, temos que:



$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$ $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$ $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$

$\text{sen}\ \beta = \dfrac{c}{a}$ $\cos\beta = \dfrac{b}{a}$ $\text{tg}\ \beta = \dfrac{c}{b}$

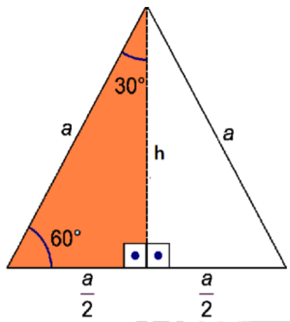
Observando as razões acima, concluimos que $\text{sen}\ \alpha = \cos\beta$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\beta}$.

Então:
Se $\alpha + \beta = 90°$ temos:
$\text{sen}\ \alpha = \cos\beta$
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\beta}$

Razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°

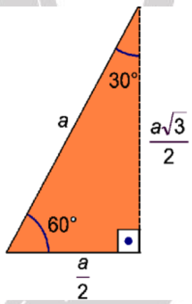
As razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60° são usadas com frequência. Vamos deduzir abaixo o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

Observe o triângulo equilátero. Traçando uma de suas alturas, dividimos o triângulo em dois triângulos retângulos congruentes.



Calculando a altura h pelo teorema de Pitágoras, vem:

$$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$



Aplicando as relações trigonométricas, vem:

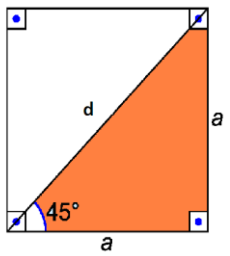
$$\text{sen}\ 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} \rightarrow \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$$

$$\text{sen}\ 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} \rightarrow \text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\text{tg}\ 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg}\ 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} \rightarrow \text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$$

Observe, agora, o quadrado. Nele traça-se a diagonal e obtém-se dois triângulos retângulo isósceles



Calculando a diagonal d pelo teorema de Pitágoras, vem que:

$d = a\sqrt{2}$

$\text{sen } 45° = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} \rightarrow \text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$

$\text{tg } 45° = \dfrac{a}{a} \rightarrow \text{tg } 45° = 1$

Em resumo, temos:

	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

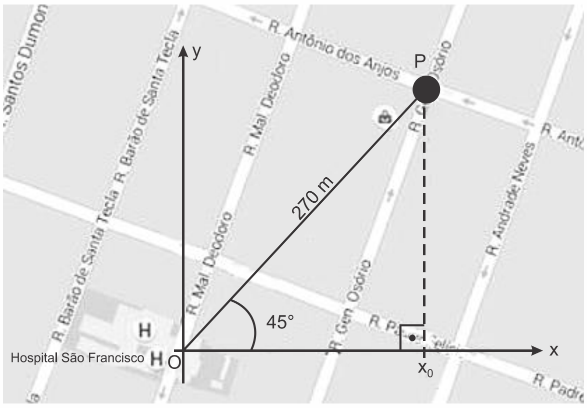
Exercícios

Nível 1

01) (Modelo Enem) Atualmente, o roubo e o furto de celulares têm se tornado banais no Brasil, ultrapassando a marca de um milhão de aparelhos por ano. Em contrapartida, a tecnologia está tão avançada que, mediante a instalação de um aplicativo e uma conta do Google sincronizada em seu celular, é possível localizá-lo.

Disponível em: <http://www.celularcomcamera.com.br/como-rastrear-um-celular-roubado-furtado/>. Acesso em 26 out. 2015.

Suponha que uma pessoa teve seu celular roubado em frente ao Hospital São Francisco, na cidade de Pelotas-RS, e o aplicativo indica que o aparelho está localizado no cruzamento da Rua General Osório com a Rua Antônio dos Anjos, conforme ilustra a figura a seguir.



Fonte: Adaptado de Google Maps (2015).

Considerando que o sistema de coordenadas cartesianas indicado nesta figura tem origem em frente ao hospital, e está orientado positivamente para a direita e para cima, está correto afirmar que a abscissa x_0 do ponto P é, aproximadamente,

a) 270 metros.
b) 230 metros.
c) 190 metros.
d) 160 metros.

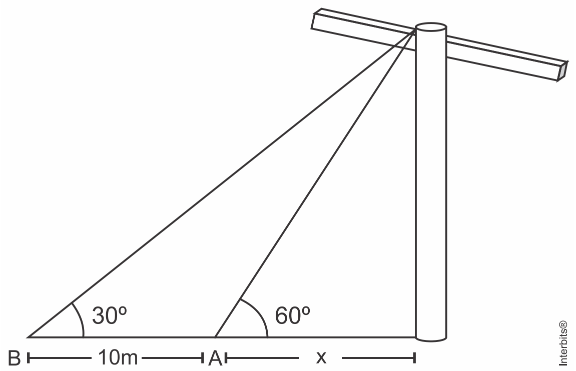
02) (Modelo Enem) Um determinado professor de uma das disciplinas do curso de Engenharia Civil da PUC solicitou como trabalho prático que um grupo de alunos deveria efetuar a medição da altura da fachada da Biblioteca Central da PUC usando um teodolito. Para executar o trabalho e determinar a altura, eles colocaram um teodolito a 6 metros da base da fachada e mediram o ângulo, obtendo $30°$, conforme mostra figura abaixo. Se a luneta do teodolito está a $1{,}70\ \text{m}$ do solo, qual é, aproximadamente, a altura da fachada da Biblioteca Central da PUC?

Dados $(\text{sen}\ 30° = 0{,}5,\ \cos 30° = 0{,}87 \text{ e } \text{tg}\ 30° = 0{,}58)$

a) $5{,}18\ \text{m}$.
b) $4{,}70\ \text{m}$.
c) $5{,}22\ \text{m}$.
d) $5{,}11\ \text{m}$.
e) $5{,}15\ \text{m}$.

03) (Modelo Enem) Em uma aula prática, um professor do curso técnico de edificações do campus Florianópolis do IFSC, pede para que seus alunos determinem a altura de um poste que fica nas instalações da instituição, porém há uma impossibilidade para se chegar tanto ao topo do poste, bem como sua base. Para realizar tal medida, são disponibilizados para os alunos uma trena (fita métrica) e um teodolito. É realizado o seguinte procedimento: primeiro crava-se uma estaca no ponto A a x metros da base do poste e mede-se o ângulo formado entre o topo do poste e o solo, que é de $60°$ (sessenta graus); em seguida, afastando-se $10\ \text{m}$ (dez metros) em linha reta do ponto A e cravando uma nova estaca no ponto B, mede-se novamente o ângulo entre o topo do poste e o solo, que é de $30°$ (trinta graus).

A partir do procedimento descrito e da figura abaixo, é CORRETO afirmar que a altura do poste é de aproximadamente:

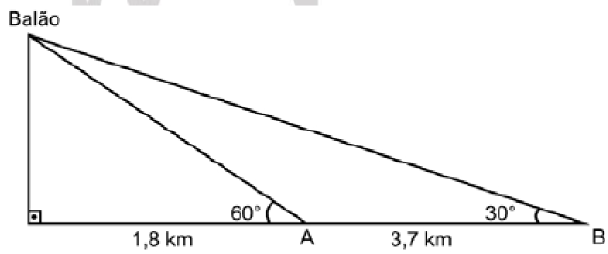


Dados: $\text{sen}30^\circ = 0,5;\ \cos 30^\circ = 0,86;\ \text{tg}30^\circ = 0,58$

$\text{sen}60^\circ = 0,86;\ \cos 60^\circ = 0,5;\ \text{tg}60^\circ = 1,73$

a) $8,65\,\text{m}$
b) $5\,\text{m}$
c) $6,65\,\text{m}$
d) $7,65\,\text{m}$
e) $4\,\text{m}$

04) (ENEM) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

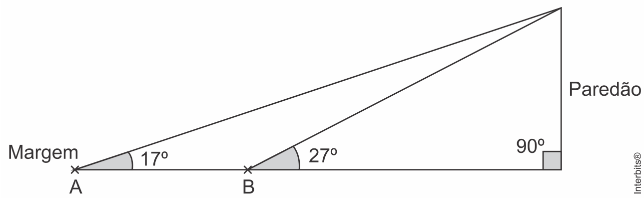


Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

Nível 2

05) (Modelo Enem) Os alunos pré-egressos do campus Jaboatão dos Guararapes resolveram ir até a Lagoa Azul para celebrar a conclusão dos cursos. Raissa, uma das participantes do evento, ficou curiosa pra descobrir a altura do paredão rochoso que envolve a lagoa. Então pegou em sua mochila um transferidor e estimou o ângulo no ponto A, na margem onde estava, e, após nadar, aproximadamente, 70 metros em linha reta em direção ao paredão, estimou o ângulo no ponto B, conforme mostra a figura a seguir:

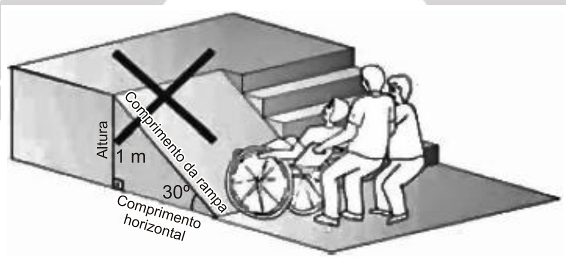


De acordo com os dados coletados por Raissa, qual a altura do paredão rochoso da Lagoa Azul?

Dados: $\text{sen}\,(17^\circ) = 0,29$, $\tan\,(17^\circ) = 0,30$, $\cos\,(27^\circ) = 0,89$ e $\tan\,(27^\circ) = 0,51$.

a) 50 metros.
b) 51 metros.
c) 89 metros.
d) 70 metros.
e) 29 metros

06) (Modelo Enem) Analise a figura a seguir.

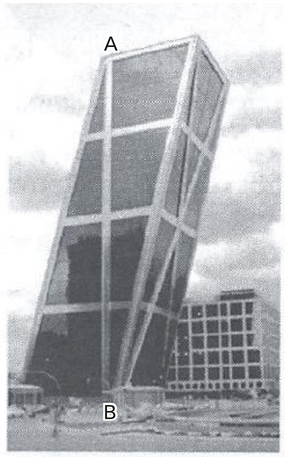


A questão da acessibilidade nas cidades é um desafio para o poder público. A fim de implementar as políticas inclusivas, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) criou normas para acessibilidade arquitetônica e urbanística. Entre elas estão as de construção de rampas de acesso, cuja inclinação com o plano horizontal deve variar de 5% a 8,33%. Uma inclinação de 5% significa que, para cada metro percorrido na horizontal, a rampa sobe 0,05 m. Recorrentemente, os acessos por rampas não respeitam essas normas,

gerando percursos longos em inclinações exageradas. Conforme a figura, observou-se uma rampa de acesso, com altura de 1 metro e comprimento da rampa igual a 2 metros.
Se essa rampa fosse construída seguindo as normas da ABNT, com inclinação de 5%, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a diferença de comprimento dessas rampas, em metros.

a) 5
b) 20
c) $2+\dfrac{1}{20}$
d) $\sqrt{401}-2$
e) $\sqrt{4{,}01}+\dfrac{1}{20}$

07) (ENEM) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.



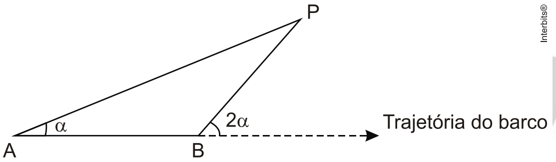
Disponível em: www.flickr.com.
Acesso em: 27 mar. 2012

Utilizando $0{,}26$ como valor aproximado para tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

a) menor que 100 m^2.
b) entre 100 m^2 e 300 m^2.
c) entre 300 m^2 e 500 m^2.
d) entre 500 m^2 e 700 m^2.
e) maior que 700 m^2.

Nível 3

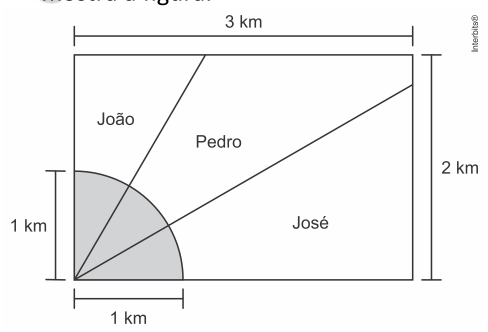
08) (ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual a fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30^\circ$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000\text{ m}$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) 1000 m.
b) $1000\sqrt{3}\text{ m}$.
c) $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{ m}$.
d) 2000 m.
e) $2000\sqrt{3}\text{ m}$.

09) (ENEM) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de $3\text{ km}\times 2\text{ km}$ que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

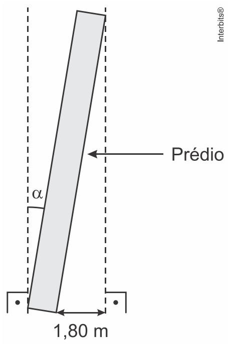


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

Considere: $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58.$

a) 50%.
b) 43%.
c) 37%.
d) 33%.
e) 19%.

10) (ENEM) A famosa Torre de Pisa, localizada na Itália, assim como muitos outros prédios, por motivos adversos, sofrem inclinações durante ou após suas construções.
Um prédio, quando construído, dispunha-se verticalmente e tinha 60 metros de altura. Ele sofreu uma inclinação de um ângulo α, e a projeção ortogonal de sua fachada lateral sobre o solo tem largura medindo $1,80$ metro, conforme mostra a figura.



O valor do ângulo de inclinação pode ser determinado fazendo-se o uso de uma tabela como a apresentada.

Ângulo α (Grau)	Seno
0,0	0,0
1,0	0,017
1,5	0,026
1,8	0,031
2,0	0,034
3,0	0,052

Uma estimativa para o ângulo de inclinação α, quando dado em grau, é tal que

a) $0 \leq \alpha < 1,0$
b) $1,0 \leq \alpha < 1,5$
c) $1,5 \leq \alpha < 1,8$
d) $1,8 \leq \alpha < 2,0$
e) $2,0 \leq \alpha < 3,0$

GABARITO – AULA 29

1) c	**2)** a	**3)** a	**4)** c	**5)** b
6) d	**7)** e	**8)** b	**9)** e	**10)** c

AULA 30

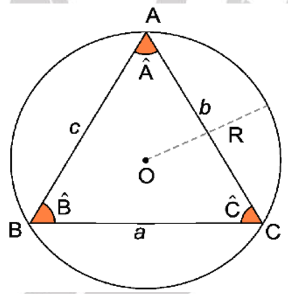
TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO QUALQUER

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

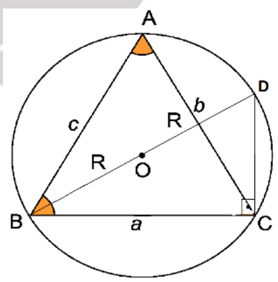
1. Teorema dos Senos

Num triângulo qualquer, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. A razão de proporção é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R}$$



Demonstração



$\operatorname{sen}\hat{D} = \frac{a}{2R}$

Perceba que $\hat{A} = \hat{D}$ (ambos são ângulos inscritos na circunferência relativos ao arco BC.

Logo: $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$

Procedendo de forma análoga para os demais lados e ângulos, teremos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

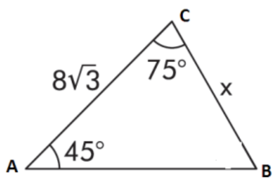
EXERCÍCIO RESOLVIDO

No triângulo ABC são dados:

$\hat{A} = 45°$; $\hat{C} = 75°$ e AC = $8\sqrt{3}$. Calcular:

a) o lado BC
b) o raio da circunferência circunscrita

Resolução:



a) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 60°$

Pelo teorema dos senos, vem:

$$\frac{x}{\operatorname{sen}45°} = \frac{8\sqrt{3}}{\operatorname{sen}60°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}.x = 8\sqrt{3}.\sqrt{2}$$

$$\therefore x = 8\sqrt{2}$$

b)

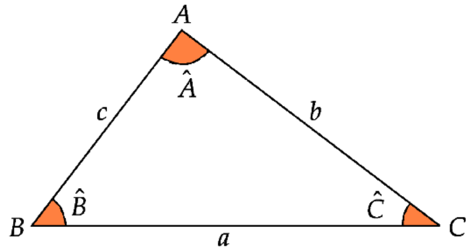
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{8\sqrt{2}}{\operatorname{sen}45°} = 2R$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow 8.2 = 2R$$

$$\therefore R = 8$$

2. Teorema dos Cossenos

Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas destes lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

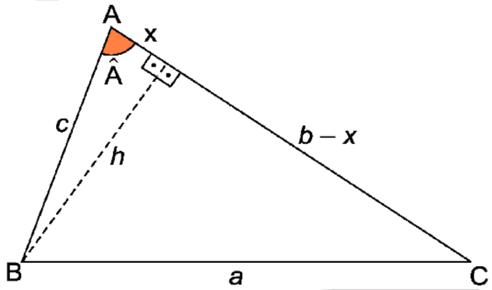


$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c.\ \cos \hat{A}}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \,.\, a \,.\, c \,.\, \cos \hat{B}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \,.\, \cos \hat{C}}$$

Demonstração



1) $\cos \hat{A} = \frac{x}{c} \rightarrow x = c.\ \cos \hat{A}$

2) $c^2 = h^2 + x^2 \rightarrow x^2 = c^2 - h^2 \rightarrow h^2 = c^2 - x^2$

3) $a^2 = h^2 + (b - x)^2$

$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$

Logo: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c.\ \cos \hat{A}$

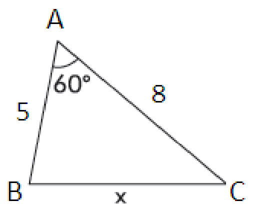
Procedendo de forma análoga para os demais ângulos, chegaremos às expressões:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \,.\, a \,.\, c \,.\, \cos \hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, a \,.\, b \,.\, \cos \hat{C}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule o lado x no triângulo abaixo:



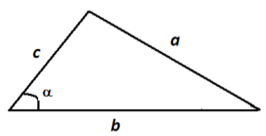
Resolução
Aplicando o teorema dos cossenos, vem:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c. \cos \hat{A}$
$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2.8.5 \,.\, \cos 60°$
$x^2 = 64 + 25 - 80.(1/2)$
$x^2 = 89 - 40$
$x^2 = 49$
$\therefore x = 7$

3. Classificação dos Triângulos

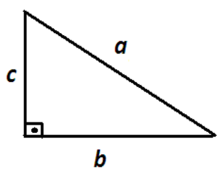
Com o auxílio do Teorema dos Cossenos, a partir dos valores dos valores lados *a, b, c* podemos classificar os triângulos em acutângulo (3 ângulos agudos), retângulo (1 ângulo reto) ou obtusângulo (1 ângulo obtuso). Considere para isso, o valor da medida do lado *a* como a medida do maior lado. Acompanhe:

Triângulo Acutângulo



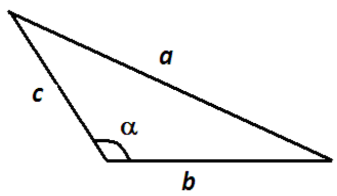
Nesse caso, $\alpha < 90°$. Logo $\cos \alpha > 0$.
$-2b.c. \cos \alpha < 0$ Somando $b^2 + c^2$ aos dois membros, vem:
$b^2 + c^2 - 2b.c. \cos \alpha < 0 + b^2 + c^2$
$\boldsymbol{a^2 < b^2 + c^2}$

Triângulo Retângulo



Nesse caso, $\alpha = 90°$. Logo $\cos \alpha = 0$.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c. \cos \alpha$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c. (0)$
$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$

Triângulo Obtusângulo



Nesse caso, $\alpha > 90°$. Logo $\cos \alpha < 0$.
$-2b.c. \cos \alpha > 0$ Somando $b^2 + c^2$ aos dois membros, vem:
$b^2 + c^2 - 2b.c. \cos \alpha > 0 + b^2 + c^2$
$\boldsymbol{a^2 > b^2 + c^2}$

Em resumo, temos:
Sejam *a, b e c* lados de um triângulo e considerando ***a***, o lado maior temos:

- $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *triângulo acutângulo*
- $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *triângulo retângulo*
- $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ *triângulo obtusângulo*

IMPORTANTE:

Para $\alpha + \beta = 180°$, temos:

$\boxed{\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta \text{ e } \cos \beta = -\cos \alpha}$

Exemplos:

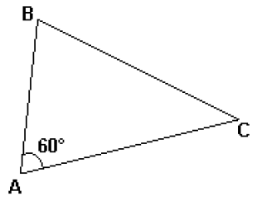
$\operatorname{sen} 150° = \operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 135° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercícios

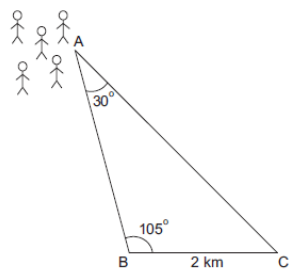
Nível 1

01) (Modelo Enem) Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que AB = 60km e AC = 110km, onde A é uma cidade conhecida, como mostra a figura a seguir. Assim, a distância aproximada entre B e C, em km, é:



a) 90 km
b) 100,2 km
c) 95,4 km
d) 48,9 km
e) 84 km

02) (Modelo Enem) O grupo de alunos participará de uma trilha em uma reserva ecológica. A equipe deverá sair do ponto A e chegar até o ponto C, conforme a figura. Como o percurso não poderá ser feito diretamente, os alunos deverão sair de A e passar por B para, depois, chegar a C. Com isso, a distância, em km, a ser percorrida pelos estudantes é igual a



a) $\sqrt{2}+2$

b) $2\sqrt{6}+2$

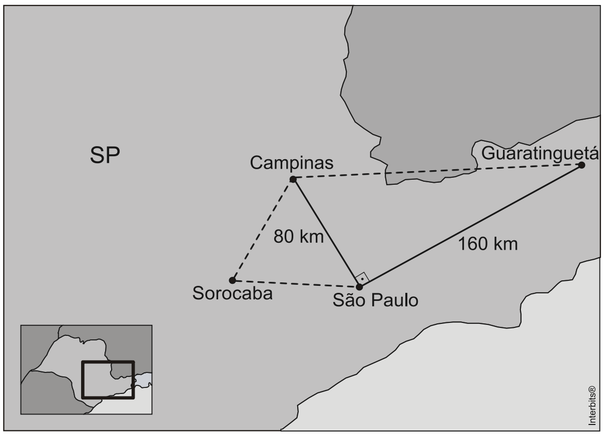
c) $2(\sqrt{2}+1)$

d) $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

e) $2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1\right)$

Nível 2

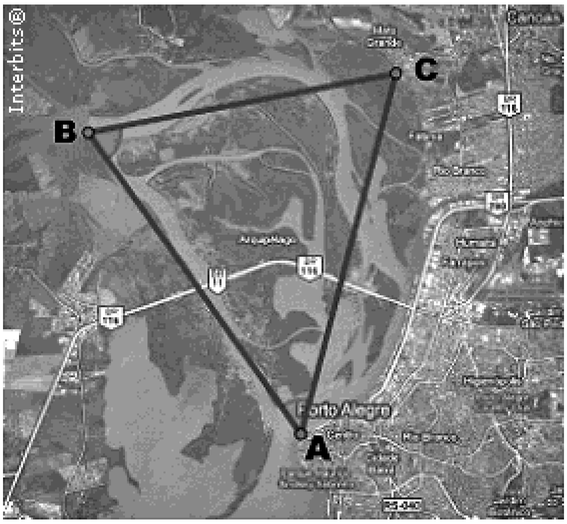
03) (Modelo Enem) Um professor de geografia forneceu a seus alunos um mapa do estado de São Paulo, que informava que as distâncias aproximadas em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Campinas e entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Guaratinguetá eram, respectivamente, 80km e 160km. Um dos alunos observou, então, que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Campinas e Sorocaba formavam um triângulo equilátero. Já um outro aluno notou que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Guaratinguetá e Campinas formavam um triângulo retângulo, conforme mostra o mapa.



Com essas informações, os alunos determinaram que a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km, é próxima de

a) $80 \cdot \sqrt{2+5\cdot\sqrt{3}}$
b) $80 \cdot \sqrt{5+2\cdot\sqrt{3}}$
c) $80 \cdot \sqrt{6}$
d) $80 \cdot \sqrt{5+3\cdot\sqrt{2}}$
e) $80 \cdot \sqrt{7\cdot\sqrt{3}}$

04) (Modelo Enem) A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



http://maps.google.com.br

A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo $\hat{A}$ mede 45° e o ângulo $\hat{C}$ mede 75°. Uma maneira de estimar quanto do Delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é

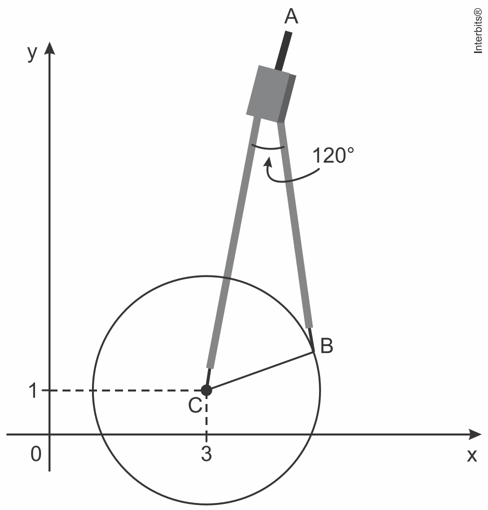
a) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$
b) $4\sqrt{6}$
c) $8\sqrt{2}+\sqrt{3}$
d) $8(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

05) (Modelo Enem) O relógio que está na torre do *Big Ben* foi construído com o ponteiro grande medindo $4{,}7$ metros e o ponteiro pequeno medindo $2{,}7$ metros. Exatamente às 2 horas, a distância entre as pontas, que marcam o tempo, dos dois ponteiros é de, aproximadamente,

a) 5,0 m.
b) 4,6 m.
c) 4,4 m.
d) 3,8 m.
e) 4,1 m.

Nível 3

06) (ENEM) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de $10\ \text{cm}$, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de $120°$. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores de raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere $1{,}7$ como aproximação para $\sqrt{3}$.

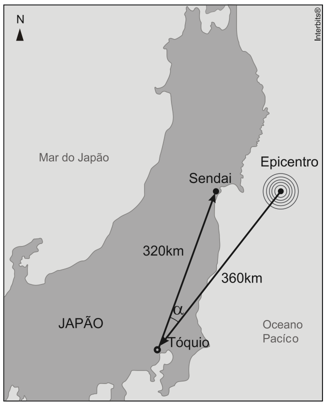
O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

07) **(Modelo Enem)** Dois navios deixam um porto ao mesmo tempo. O primeiro viaja a uma velocidade de 16 km/h em um curso de 45° em relação ao norte, no sentido horário. O segundo viaja a uma velocidade 6 km/h em um curso de 105° em relação ao norte, também no sentido horário. Após uma hora de viagem, a que distância se encontrarão separados os navios, supondo que eles tenham mantido o mesmo curso e velocidade desde que deixaram o porto?

a) 10 km.
b) 14 km.
c) 15 km.
d) 17 km.
e) 22 km.

08) **(Modelo Enem)** *No dia 11 de março de 2011, o Japão foi sacudido por terremoto com intensidade de 8,9 na Escala Richter, com o epicentro no Oceano Pacífico, a 360 km de Tóquio, seguido de tsunami.*
A cidade de Sendai, a 320 km a nordeste de Tóquio, foi atingida pela primeira onda do tsunami após 13 minutos.



Baseando-se nos dados fornecidos e sabendo que $\cos\alpha \cong 0{,}934$, onde α é o ângulo Epicentro-Tóquio-Sendai, e que $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93{,}4 \cong 215\ 100$, a velocidade média, em km/h, com que a 1ª onda do tsunami atingiu até a cidade de Sendai foi de:

a) 10.
b) 50.
c) 100.
d) 250.
e) 600.

GABARITO – AULA 30

1) c **2)** c **3)** b **4)** b **5)** e
6) d **7)** b **8)** e

VÍDEO AULA 31

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

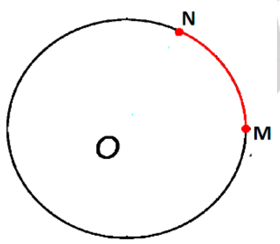
CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

1. Arcos e ângulos

Arco de circunferência

Arco de uma circunferência é cada uma das partes que fica dividida uma circunferência por dois quaisquer de seus pontos.

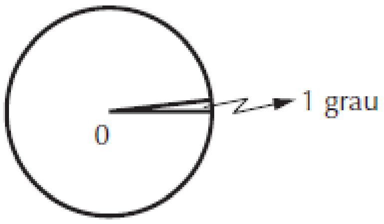


Indicaremos o arco de extremidades M e N por $\overset{\frown}{MN}$
Quando os pontos M e N coincidem, dizemos que eles determinam um *arco nulo* ou um *arco de uma volta*.

2. Unidades de Medida

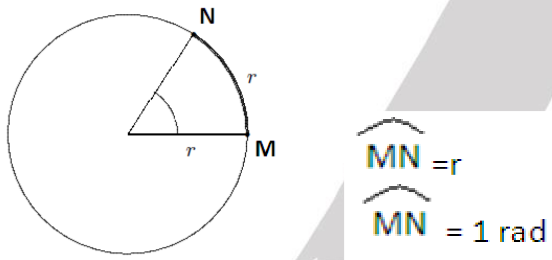
Para medir arcos e ângulos usaremos duas unidades de medidas usuais:

- Grau: Se dividirmos uma circunferência em 360 partes congruentes, cada uma dessas partes é um arco de medida um grau (1°)



$$\boxed{1^\circ = \frac{1}{360} \text{ da circunferência que o contém}}$$

- Radiano: Um arco mede um *radiano* (1 rad) se o seu comprimento for igual ao raio da circunferência onde está contido.



3. Conversão de unidades

O comprimento de uma circunferência é dado por:

$$\boxed{C = 2.\pi.r}$$

Como r = 1 rad, segue que: $C = 2.\pi.1$
Logo, podemos dizer que uma circunferência mede **2π rad**.

Dessa forma, temos a seguinte relação:

$\boxed{360^\circ \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}}$

Ou ainda:

$\boxed{180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad}}$

Grau	0°	90°	180°	270°	360°
Radiano	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Acompanhe os exemplos abaixo:

1) Determinar, em radianos, a medida do arco 120°

Resolução:

$180° \leftrightarrow \pi$ rad

$120° \leftrightarrow x$ rad

$$x = \frac{120°.\pi}{180°}$$

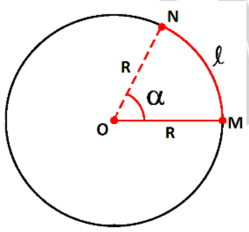
$$\boxed{x = \frac{2\pi}{3}\text{rad}}$$

2) Determinar, em graus, a medida do arco $\frac{5\pi}{3}$ rad.

Resolução:

$$x = \frac{5\pi}{3} = \frac{5.180°}{3} \rightarrow \boxed{x = 300°}$$

4. Comprimento de um arco de circunferência



Seja α rad a medida de um arco $\overset{\frown}{MN}$, sobre uma circunferência de raio R e ℓ o comprimento do arco $\overset{\frown}{MN}$, podemos estabelecer a seguinte relação:

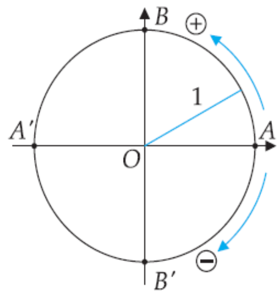
Comprimento		Ângulo em Radianos
$2\pi\pi$	$\leftrightarrow$	2π
ℓ	$\leftrightarrow$	α

$$\boxed{\alpha = \frac{\ell}{R}}$$

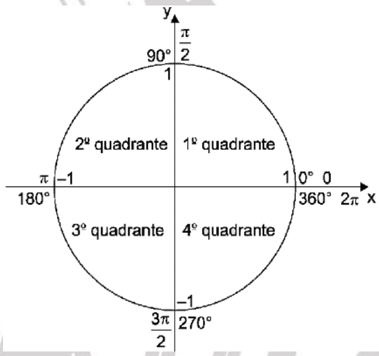
Calcular α é determinar o número de vezes que R cabe em ℓ.

5. Circunferência Trigonométrica

Denomina-se circunferência trigonométrica à circunferência de raio unitário, com centro na origem de um sistema cartesiano. Adota-se por convenção o sentido anti-horário como sentido positivo de orientação dos arcos, e o sentido horário como sentido negativo de orientação dos arcos.



Perceba que os eixos coordenados dividem a circunferência em quatro partes, que a partir de agora, chamaremos de quadrantes.



6. Arcos Côngruos

Dois ou mais arcos são côngruos quando a diferença entre seus valores é um múltiplo de 360° ou 2π rad.

Exemplo: 1) 30°, 390°, 750°, 1110°..........

Observe que:

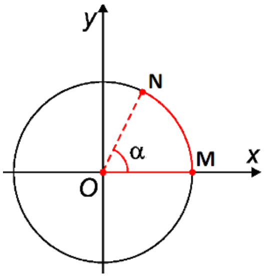
$$\begin{aligned} 30° &= 30° + 360°\,.\,0 \\ 390° &= 30° + 360°\,.\,1 \\ 750° &= 30° + 360°\,.\,2 \\ 1110° &= 30° + 360°\,.\,3 \\ \vdots &\quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \vdots &\quad\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ x &= 30° + 360°\,.\,k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Veja que esses arcos possuem a mesma extremidade e diferem apenas no número de voltas. A expressão $\boxed{x = 30° + 360°\,.\,k}$, com $k \in Z$, é denominada expressão geral do arco de 30°, onde 30° é a primeira determinação positiva.

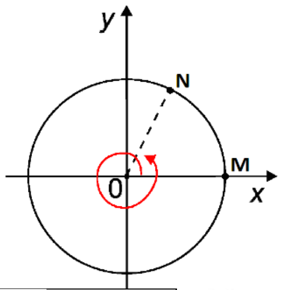
De um modo geral, temos:

- Se um arco mede α graus, temos:

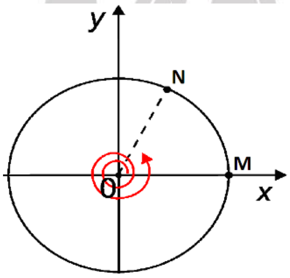
$\boxed{\overset{\frown}{MN} = \alpha}$



$\boxed{\overset{\frown}{MN} = \alpha + 360°}$



$\boxed{\overset{\frown}{MN} = \alpha + 2.360°}$



A expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por:

$$\boxed{\alpha + k\ .\ 360°,\ \text{com}\ k \in Z}.$$

- Se um arco mede α radianos, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por:

$$\boxed{\alpha + k\ .\ 2\pi,\ \ \text{com}\ k \in Z}.$$

Acompanhe os exemplos resolvidos abaixo:

1) Sendo $\boxed{\alpha = 30° + 360.k}$, $k \in Z$, temos:

- Para k = – 1 (1ª determinação negativa)

  $\alpha = 30° + 360.(-1) \to \boxed{\alpha = -330°}$

- Para k = – 2 (2ª determinação negativa)

  $\alpha = 30° + 360.(-2) \to \boxed{\alpha = -690°}$

- Para k = 0 (1ª determinação positiva)

  $\alpha = 30° + 360.(0) \to \boxed{\alpha = 30°}$

- Para k = 1 (2ª determinação positiva)

  $\alpha = 30° + 360.(1) \to \boxed{\alpha = 390°}$

- Para k = 2 (3ª determinação positiva)

  $\alpha = 30° + 360.(2) \to \boxed{\alpha = 750°}$

2) Sendo $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + k.2\pi}$, $k \in Z$, temos:

- Para k = – 1 (1ª determinação negativa)

  $\alpha = \frac{\pi}{4} + (-1).2\pi \quad \to \quad \boxed{\alpha = -\frac{7\pi}{4}}$

- Para k = – 2 (2ª determinação negativa)

  $\alpha = \frac{\pi}{4} + (-2).2\pi \quad \to \quad \boxed{\alpha = -\frac{15\pi}{4}}$

- Para k = 0 (1ª determinação positiva)

  $\alpha = \frac{\pi}{4} + (0).2\pi \quad \to \quad \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

- Para k = 1 (2ª determinação positiva)

  $\alpha = \frac{\pi}{4} + (1).2\pi \quad \to \quad \boxed{\alpha = \frac{9\pi}{4}}$

- Para k = 2 (2ª determinação positiva)

  $\alpha = \frac{\pi}{4} + (2).2\pi \quad \to \quad \boxed{\alpha = \frac{17\pi}{4}}$

3) Determinar a primeira determinação positva dos seguintes arcos:

a) 1320° b) $\frac{25\pi}{3}$

Resolução:

a)

$$\begin{array}{r|l} \textbf{1320°} & \textbf{360°} \\ \hline \underbrace{\textbf{240°}} & \textbf{3} \end{array}$$

$$1320^\circ = \underbrace{240^\circ}_{\substack{1^{\underline{a}}\ \text{determinação}\\ \text{postiva}}} + \underbrace{360.3}_{2\ \text{voltas}}$$

Logo, a primeira determinação positiva é 240°

b)

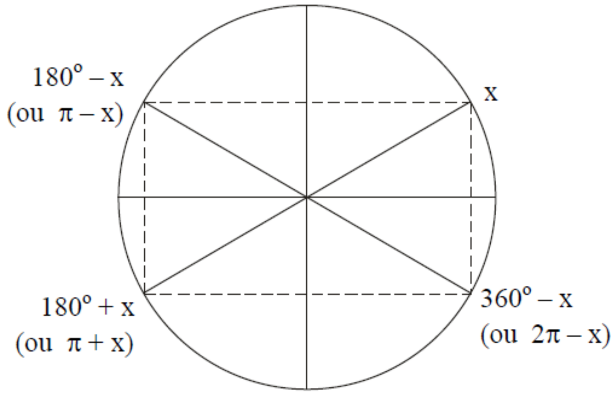
$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{25\pi}{3} = \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{\substack{1^{\underline{a}}\ \text{determinação}\\ \text{positiva}}} + \underbrace{8\pi}_{4\ \text{voltas}}$$

7. Arcos Simétricos

Um arco de medida x no 1° quadrante possui simétricos nos demais quadrantes. A medida de cada arco simétrico de x nos demais quadrantes, em graus ou radianos, é:

Simétrico de x no 2° quadrante = 180° – x (ou $\pi - x$).
Simétrico de x no 3° quadrante = 180° + x (ou $\pi + x$).
Simétrico de x no 4° quadrante = 360° – x (ou $2\pi - x$).



Exercícios

Nível 1

01) (Fixando conteúdo) Um arco de 200° equivale em radianos a:

a) $\frac{2\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{2}$

c) 4π

d) $\frac{10\pi}{9}$

e) 6π

02) (Fixando conteúdo) O arco de medida de $\frac{7\pi}{4}$ rad tem sua extremidade pertencente ao:

a) 4º Quadrante
b) 3º Quadrante
c) 2º Quadrante
d) 1º Quadrante

03) (Fixando conteúdo) Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 9h 10min.

Nível 2

04) (Modelo Enem) Nossa época, marcada pela luz elétrica, por estabelecimentos comerciais abertos 24 horas e prazos apertados de trabalho, que muitas vezes exigem o sacrifício dos períodos de sono, pode muito bem ser considerada a era do bocejo. Estamos dormindo menos. A ciência mostra que isso contribui para a ocorrência de males como diabete, depressão e obesidade. Por exemplo, quem não segue a recomendação de dormir, no mínimo, 8 horas por noite tem 73% mais risco de se tornar obeso. Uma pessoa que durma a zero hora e siga a recomendação do texto acima, quanto ao número mínimo de horas diárias de sono, acordará às 8 horas da manhã. O ponteiro das horas, que mede 6 cm de comprimento, do despertador dessa pessoa, terá descrito, durante seu período de sono, um arco de circunferência com comprimento igual a

a) 6π cm
b) 32π cm
c) 36π cm
d) 8π cm
e) 18π cm

05) (Enem) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado “mineirinho”, conseguiu realizar a manobra denominada “900”, na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação “900” refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que no caso, corresponde a

a) uma volta completa
b) uma volta e meia
c) duas voltas completas
d) duas voltas e meia
e) cinco voltas completas

06) (Modelo Enem) O relógio Tower Clock, localizado em Londres, Inglaterra, é muito conhecido pela sua precisão e tamanho. O ângulo interno formado entre os ponteiros das horas e dos minutos deste relógio, desprezando suas larguras, às 15 horas e 20 minutos é:

a) $\frac{\pi}{12}$

b) $\frac{\pi}{36}$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{18}$

e) $\frac{\pi}{9}$

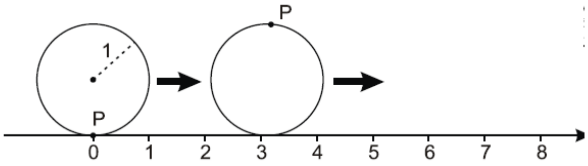
07) (Modelo Enem) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3’ 0” a leste do Meridiano de Greenwich.
Dado: 1° equivale a 60’ e 1’ equivale a 60”.

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude na forma decimal é

a) 124,02°.
b) 124,05°.
c) 124,20°.
d) 124,30°.
e) 124,50°.

Nível 3

08) (Modelo Enem) Um disco de raio 1 gira ao longo de uma reta coordenada da direção positiva, como representado na figura abaixo.



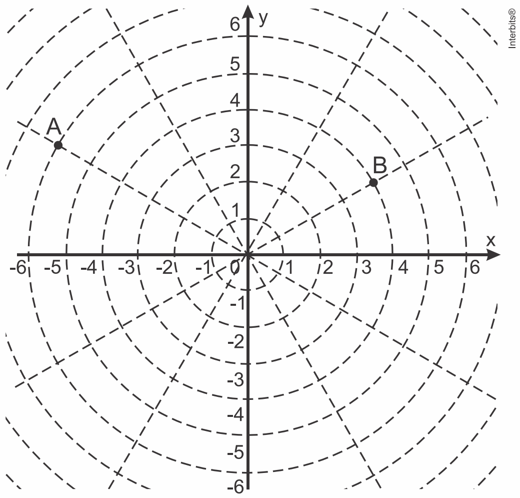
Considerando-se que o ponto P está inicialmente na origem, a coordenada de P, após 10 voltas completas, estará entre

a) 60 e 62
b) 62 e 64
c) 64 e 66
d) 66 e 68
e) 68 e 70

09) (Modelo Enem) No último pleito, o horário de encerramento das votações, segundo determinação do TSE para todo o estado Do Rio Grande do Sul, foi às 17 horas. Passados 5 minutos do encerramento, o menor ângulo entre os ponteiros do relógio era de

a) 123°
b) 122°30’
c) 122°
d) 120° 30’
e) 120°

10) (Enem) Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem $(0; 0)$.

Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a

a) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 8$
b) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{3} + 6$
c) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{3} + 4$
d) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{3} + 2$
e) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{3} + 2$

GABARITO – AULA 31

1) d	**2)** a	**3)** 145°	**4)** d	**5)** d	**6)** e	**7)** b
8) b	**9)** b	**10)** a				

VÍDEO AULA 32 e 33

SENO E COSSENO NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

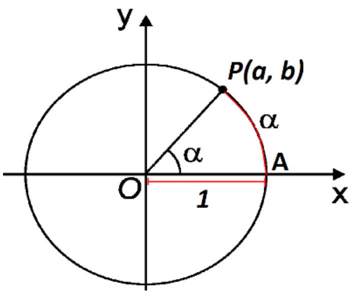
CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 32

AULA 33

1. Definições

Considere a circunferência trigonométrica abaixo, no qual A é a origem dos arcos trigonométricos. A cada $\alpha \in \Re$ corresponde um ponto P (*a, b)* da circunferência de modo que o arco $\overset{\frown}{AP}$ α.



O número real *a*, abscissa de P, é denominado cosseno de α e o número real *b*, ordenada de P, é denominado seno de α.

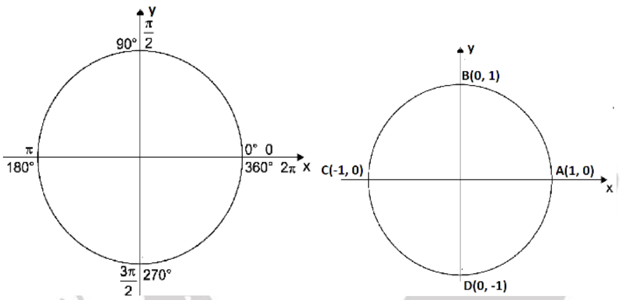
$a = \cos\alpha$
$b = \text{sen}\,\alpha$

Observe que seno e cosseno são no máximo iguais a 1 e no mínimo iguais a – 1. Sendo assim, sen α e cos α variam no intervalo de – 1 a 1.

$\boxed{-1 \le \cos\alpha \le 1 \quad \text{e} \quad -1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1}$

2. Seno e cosseno de alguns arcos

ARCOS EXTREMOS – PONTOS DOS EIXOS (A, B, C, D)



Como já vimos, cosseno do arco é a abscissa do ponto e o seno do arco é a ordenada do ponto. Fazendo as associações, temos:

$$\text{Ponto A}: \begin{cases} \cos 0° = \cos 0 = 1 \\ \text{sen}\,0° = \text{sen}\,0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ponto B}: \begin{cases} \cos 90° = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \text{sen}\,90° = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ponto C}: \begin{cases} \cos 180° = \cos\pi = -1 \\ \text{sen}\,180° = \text{sen}\,\pi = 0 \end{cases}$$

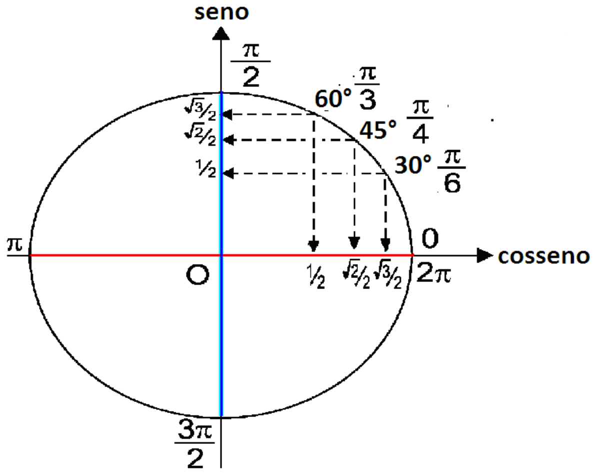
$$\text{Ponto D}: \begin{cases} \cos 270° = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0 \\ \text{sen}\,270° = \text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

Em síntese:

α em graus α em radianos	0° 0	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
cos α	1	0	- 1	0	1
sen α	0	1	0	- 1	0

Sabemos ainda que:

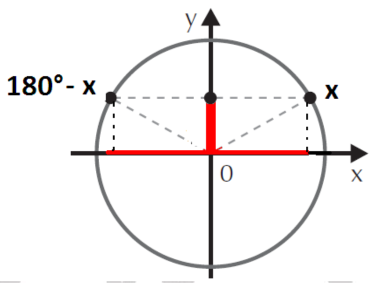
α em graus α em radianos	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



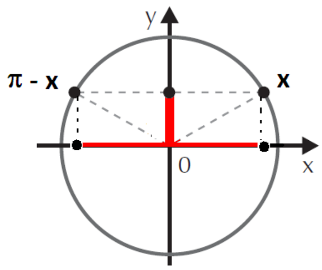
3. Arcos Simétricos

Com o auxílio da simetria de arcos já vistas na aula anterior, é possível obter, através dos principais arcos, os cossenos e senos de arcos dos demais quadrantes.

- **2º quadrante**



$$\begin{cases} \cos(180° - x) = -\cos x \\ \text{sen}(180° - x)° = \text{sen}\, x \end{cases}$$

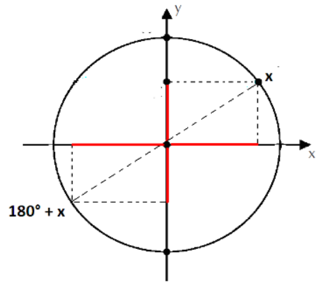


$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\, x \end{cases}$$

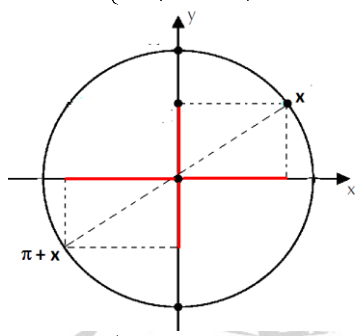
Exemplos:

$$\begin{cases} \cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}135° = \text{sen}\, 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

- **3º quadrante**



$$\begin{cases} \cos(180° + x) = -\cos x \\ \text{sen}(180° + x)° = -\text{sen}\, x \end{cases}$$

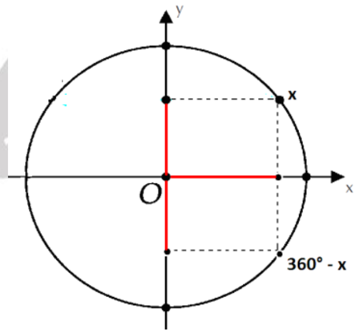


$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\, x \end{cases}$$

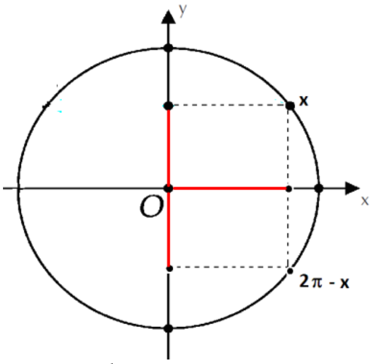
Exemplos:

$$\begin{cases} \cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}225° = -\text{sen}\, 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

- **4º quadrante**



$$\begin{cases} \cos(360° - x) = \cos x \\ \text{sen}(360° - x)° = -\text{sen}\, x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(2\pi - x) = \cos x \\ \text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}\, x \end{cases}$$

Exemplos:

$$\begin{cases} \cos 315° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\, 300° = -\text{sen}\, 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

4. Equações Trigonométricas

Equações Trigonométricas são aquelas na qual a incógnita faz parte do arco de alguma função trigonométrica. São exemplos de equações trigonométricas:

1) sen x = 1 2) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

Não é possível estabelecer um método para resolver todas equações trigonométricas, pois existe uma infinidade, para isso apresentaremos alguns tipos básicos.

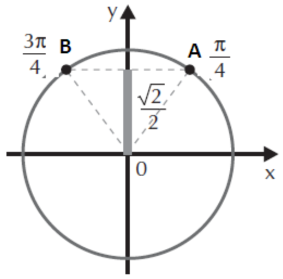
4.1. Equações da forma sen x = m

Resolver equações da forma sen x = m $(-1 \leq m \leq 1)$ significa definir os valores de x cujo seno seja igual ao valor de m. Acompanhe o exemplo abaixo:

Resolver a equação sen x = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Observe que os pontos A e B são extremidades dos arcos cujos senos são iguais a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



No intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ a equação possui duas soluções:

$x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

A solução geral, caso o enunciado não forneça o intervalo dado é:

$$S = \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi}{4} + k.2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi.\ k \in Z \right\}$$

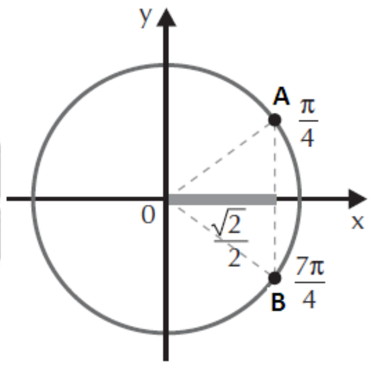
4.2. Equações da forma cos x = m

Resolver equações da forma cos x = m $(-1 \leq m \leq 1)$ significa definir os valores de x cujo cosseno seja igual ao valor de m. Acompanhe o exemplo abaixo:

Resolver a equação cos x = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

Observe que os pontos A e B são extremidades dos arcos cujos cossenos são iguais a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



No intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ a equação possui duas soluções:

$x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$.

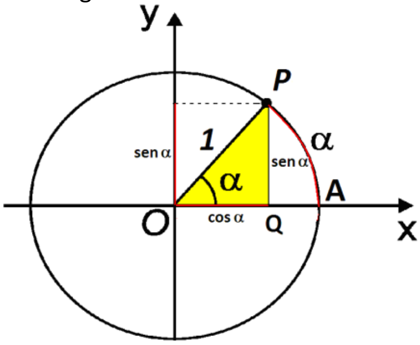
A solução geral, caso o enunciado não forneça o intervalo dado é:

$$S = \left\{ x \in R \mid x = \pm\frac{\pi}{4} + k.2\pi.k \in Z \right\}$$

Observe que $\dfrac{\pi}{4}$ e $-\dfrac{7\pi}{4}$ são arcos côngruos.

5. Relação Fundamental da Trigonometria

Seja α, na circunferência trigonométrica, a medida de um arco trigonométrico com extremidade no ponto P



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OPQ, obtem-se:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

A relação vista também vale para arcos com extremidades fora do primeiro quadrante.

Então: $\text{sen}^2 140° + \cos^2 140° = 1$

$\text{sen}^2 240° + \cos^2 240° = 1$

Vale lembrar que:

$\boxed{\text{Se } \alpha + \beta = 90° \rightarrow \text{sen } \alpha = \cos \beta}$

Logo:

$\text{sen}^2 40° + \text{sen}^2 50° = 1$

$\cos^2 1° + \cos^2 89° = 1$

Exercício Resolvido

Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{sen } x = \frac{12}{13}$, calcular cos x.

Resolução:

Usando a relação fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \frac{144}{169}$

$\cos^2 x = \frac{25}{169} \rightarrow \cos x = \pm\frac{5}{13}$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos:

$$\boxed{\cos x = -\frac{5}{13}}$$

Exercícios

Nível 1

01) (Fixando conteúdo) Determine o valor de
a) sen120°
b) sen240°
c) sen315°
d) cos120°
e) cos240°
f) cos315°

02) (Fixando conteúdo) Resolver, no intervalo $0 \le x < 2\pi$, as seguintes equações:
a) $\text{sen } x = 1$
b) $\cos x = 0$
c) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$
d) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\text{sen}^2 x - 3\text{sen } x - 4 = 0$
f) $2\cos^2 x = -3\text{sen } x$
g) $1 - \cos^2 x + \text{sen } x = 0$

03) (Fixando conteúdo) Se $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ e α é um ângulo do terceiro quadrante, então, o valor de sen α é igual a:

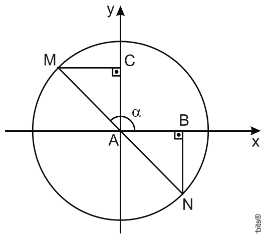
a) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

04) (Modelo Enem) Para representar os harmônicos emitidos pelos sons dos instrumentos da orquestra, usam-se funções trigonométricas. A expressão $2\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x - 5$ envolve estas funções e, para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seu valor é:

a) -7
b) -3
c) -1
d) $2\pi - 5$
e) $3\pi - 5$

Nível 2

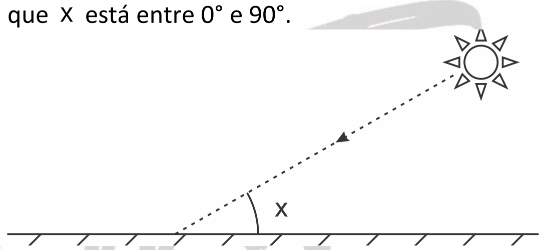
05) (Modelo Enem) A figura abaixo representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo α mede $\frac{5\pi}{6}$ radianos.



A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é

a) $26\sqrt{3}$. b) $\sqrt{3}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. e) 1

06) (Enem) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



Quando x = 30° a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

a) 33% b) 50% c) 57% d) 70% e) 86%

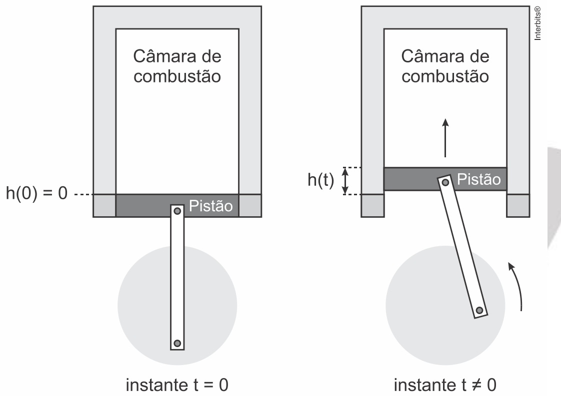
Nível 3

07) (Enem) Um satélite de telecomunicações, t minutos apos ter atingido sua orbita, esta a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por $r(t) = \frac{5865}{1 + 0{,}15.\cos(0{,}06t)}$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

a) 12 765 km.
b) 12 000 km.
c) 11 730 km.
d) 10 965 km.
e) 5 865 km.

08) (Enem) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4\text{sen}\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β, que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 8

GABARITO – AULAS 32 e 33

1) a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) a) S = $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ b) S = $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ c) S = $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{33\pi}{18}\right\}$ d) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ e) $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

f) $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ g) $\left\{0, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

3) a **4)** b **5)** b **6)** b **7)** b **8)** d

VÍDEO AULA 34 e 35
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

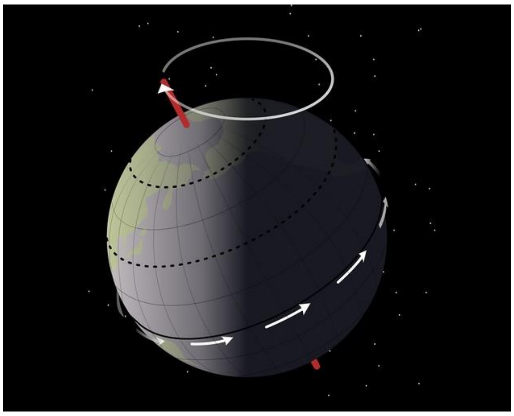
CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 34

AULA 35

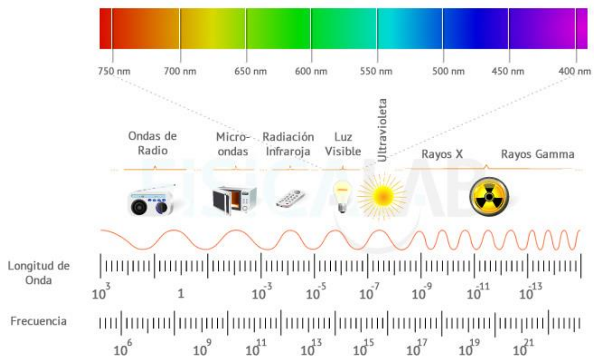
Introdução

Movimento periódico é o movimento de um corpo qualquer que se repete regularmente com o passar do tempo, ou seja, o corpo retorna a uma dada posição após um determinado intervalo de tempo fixo.
Se pensarmos um pouco, poderemos identificar vários tipos de movimentos periódicos na vida cotidiana. A Terra, em sua órbita em torno do Sol, volta à mesma posição a cada ano. A Lua retorna para a mesma posição, em relação à Terra, resultando em uma Lua Cheia, aproximadamente, uma vez por mês.



Uma criança, brincando num balanço no *playground*, oscila para frente e para trás oscilando periodicamente.

Em adição a estes exemplos do seu dia a dia, numerosos outros sistemas exibem movimentos periódicos. Por exemplo, as moléculas de um sólido vibram em torno de suas posições de equilíbrio; ondas eletromagnéticas, como as ondas de luz, radar e ondas de rádio, são caracterizadas pela oscilação dos vetores campo elétrico e campo magnético; e em circuitos de corrente alternada, tensão, corrente e carga elétrica variam periodicamente com o tempo.



Nesse módulo estaremos estudando as funções trigonométricas que modelam as situações apresentadas.

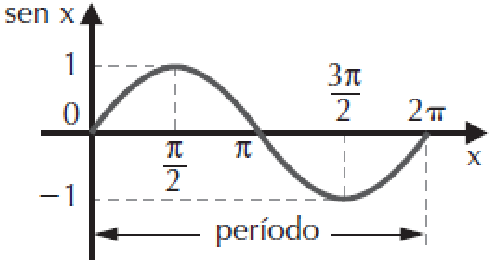
1. Função Seno

Denominamos função seno a função f: $\Re \to \Re$ que associa a cada número real x, o valor sen x.

$$\boxed{y = f(x) = \text{sen } x}$$

Gráfico da Função Seno:

Observe, agora, como varia a função $y = f(x) = \text{sen } x$ no intervalo $[0,2\pi]$.

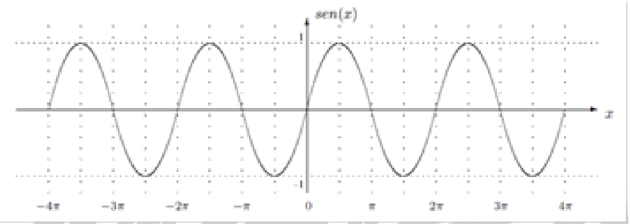


A curva acima é chamada de senóide.

Observando o gráfico da função **f(x) = sen x**, conclui-se:

- Admite valores positivos no 1º e 2º Quadrantes e negativos no 3º e 4º Quadrantes.
- É crescente no 1º e 4º Quadrantes e decrescente no 2º e 3º Quadrantes.
- Imagem: Im = $\{y \in R \mid -1 \le y \le 1\} = [-1, 1]$.

Importante: A cada 2π rad o comportamento da função seno se repete. Dizemos, então, que o período da função seno é $p = 2\pi$ rad.



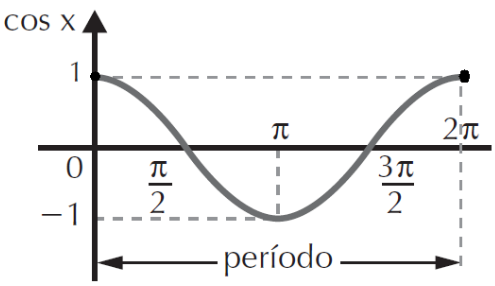
2. Função Cosseno

Denominamos função cosseno a função f: $\Re \to \Re$ que associa a cada número real x, o valor cos x.

$$\boxed{y = f(x) = \cos x}$$

Gráfico da Função Cosseno:

Observe, agora, como varia a função $y = f(x) = \cos\ x$ no intervalo $[0, 2\pi]$

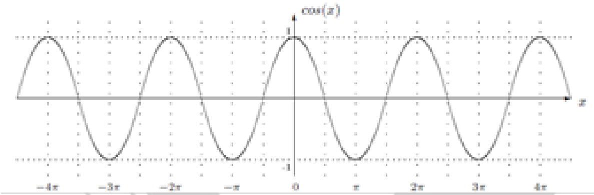


A curva acima é chamada de cossenóide.

Observando o gráfico da função **f(x) = cos x**, conclui-se que:

- Admite valores positivos no 1º e 4º Quadrantes e Negativos no 2º e 3º Quadrantes.
- É crescente no 3º e 4º Quadrantes e Decrescente no 1º e 2º Quadrantes.
- Imagem: Im = $\{y \in R \mid -1 \le y \le 1\} = [-1, 1]$.

Importante: A cada 2π rad o comportamento da função cosseno se repete. Dizemos, então, que o período da função cosseno é $p = 2\pi$ rad.



Funções Genéricas

$\boxed{f(x) = a + b.\text{sen}(mx + n)}$ ou $\boxed{f(x) = a + b.\cos(mx + n)}$

- O Parâmetro "a" é responsável pelo deslocamento vertical do gráfico.

  $a > 0 \to$ desloca para cima
  $a < 0 \to$ desloca para baixo

- O Parâmetro "b" é responsável pela mudança na amplitude do gráfico.

  $b > 1 \to$ aumenta a amplitude.
  $0 < b < 1 \to$ diminui a amplitude

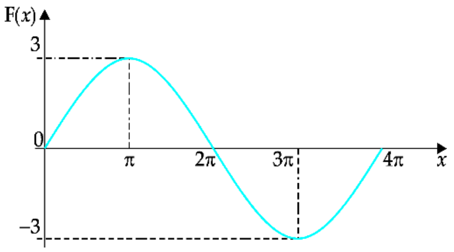
- O Parâmetro "m" é responsável pela mudança no período do gráfico.

$$\boxed{\text{Período } (p) = \frac{2\pi}{|m|}}$$

Exercícios

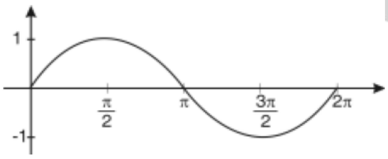
Nível 1

01) (Fixando conteúdo) O gráfico na figura é o da função f: $[0, 4\pi] \rightarrow \Re$, definida por:



a) f(x) = sen 2x
b) f(x) = 3 cos x
c) f(x) = 3 sen x
d) f(x) = 3 sen 2x
e) f(x) = 3sen $\frac{x}{2}$

02) (Fixando conteúdo) Senóide é o nome que se dá à curva que representa a função y = sen x, cuja imagem é [-1, 1] eo período é 2π , conforme ilustra o gráfico abaixo.



Com base nos textos e em seus conhecimentos, é correto afirmar que o período (p) e a imagem (Im) da função y = 2 sen (3x) são respectivamente.

a) p = 6π e Im = [-3 , 3]
b) p = $\frac{2\pi}{3}$ e Im = [- 2, 2]
c) p = 4π e Im = [-3, 3]
d) p = 2π e Im = [-1, 1]
e) p = 2π e Im = [-2, 2]

Nível 2

03) (Modelo Enem) Uma gráfica que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei

C(t) = 200 + 120. sen $\frac{\pi . t}{2}$ com t medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximo e mínimo desse produto são

a) 320 e 200
b) 200 e 120
c) 200 e 80
d) 320 e 80
e) 120 e 80

04) (Modelo Enem) A pressão arterial P (em mmHg) de uma pessoa varia, com o tempo t (em segundos), de acordo com a função definida por $P(t) = 100 + 20\cos(6t + \pi)$, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.

Considerando que $19\pi \approx 60$, quais são, de acordo com a função, respectivamente, a pressão mínima, a pressão máxima e a frequência de batimentos cardíacos por minuto dessa pessoa?

a) 80, 120 e 57
b) 80, 120 e 60
c) 80, 100 e 19
d) 100, 120 e 19
e) 100, 120 e 60

05) (Modelo Enem) A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias.

Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg) de um cidadão portoalegrense em função do tempo (em segundos) é dada por $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$.

Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg, são iguais, respectivamente, a

a) 60 e 100
b) 60 e 120
c) 80 e 120
d) 80 e 130
e) 90 e 120

Nível 3

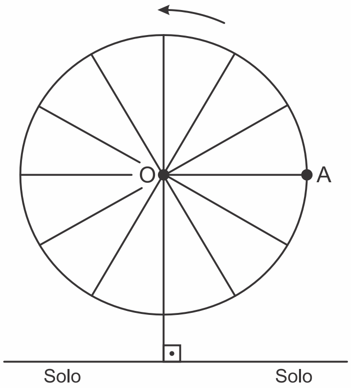
06) (Enem) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.
Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

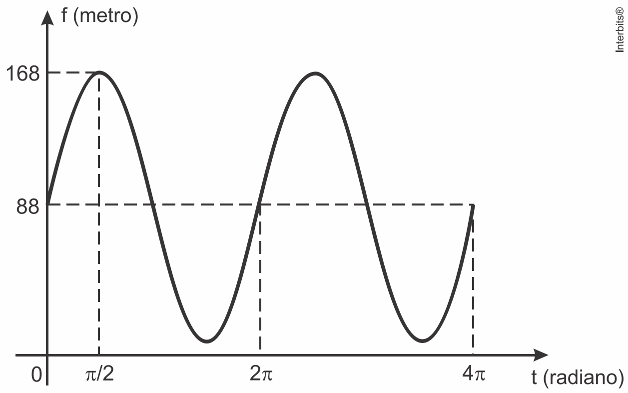
a) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$
b) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$
c) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$
d) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$
e) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

07) (Enem) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t.

Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

a) $f(t) = 80\,\text{sen}(t) + 88$
b) $f(t) = 80\cos(t) + 88$
c) $f(t) = 88\cos(t) + 168$
d) $f(t) = 168\,\text{sen}(t) + 88\cos(t)$
e) $f(t) = 88\,\text{sen}(t) + 168\cos(t)$

08) (Enem) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0 \le h \le 24)$ e *A* e *B* os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.
Quais devem ser os valores de *A* e de *B* para que o pedido dos funcionários seja atendido?

a) $A = 18$ e $B = 8$
b) $A = 22$ e $B = -4$
c) $A = 22$ e $B = 4$
d) $A = 26$ e $B = -8$
e) $A = 26$ e $B = 8$

GABARITO – AULA 34 e 35

1) e **2)** b **3)** d **4)** a **5)** c **6)** a
7) a **8)** b

VÍDEO AULA 36 e 37
GEOMETRIA ANALÍTICA – ESTUDO DO PONTO

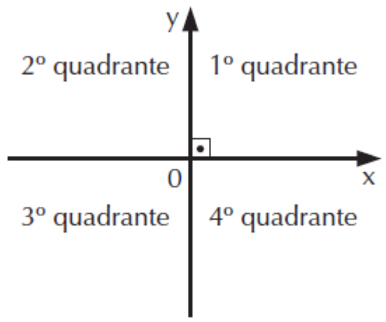
CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 36

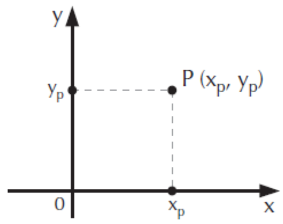
AULA 37

1. Plano Cartesiano

O sistema cartesiano ortogonal como já vimos em funções, é composto por duas retas **x** e **y** perpendiculares entre si, no ponto O (origem). A reta x é denominada eixo das abscissas e a reta y é denominada eixo das ordenadas.
Os dois eixos dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes numerados no sentido anti-horário.



O ponto O é denominado origem do sistema de eixos cartesianos.
Cada ponto do plano cartesiano está associado um par ordenado (x, y) e vice-versa.
Dizemos que (x_P, y_P) são as coordenadas do ponto P, onde o número real x_P é chamado abscissa do ponto e o número real y_P é chamado ordenada do ponto.



Destacamos abaixo algumas posições particulares de pontos no plano cartesiano:

- Se um ponto A pertence ao eixo das abscissas sua ordenada é nula.

$$\boxed{A(a,0)}$$

- Se um ponto C pertence ao eixo das ordenadas sua abscissa é nula.

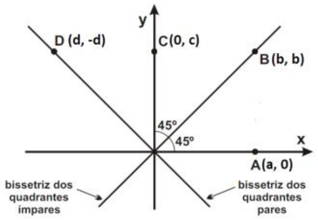
$$\boxed{C(0,c)}$$

- Se um ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares suas coordenadas são iguais

$$\boxed{B(b,b)}$$

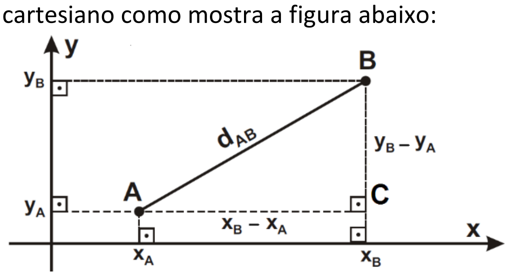
- Se um ponto D pertence à bissetriz dos quadrantes pares suas coordenadas são simétricas.

$$\boxed{D(d,-d)}$$



2. Distância entre dois pontos

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos do plano cartesiano como mostra a figura abaixo:



A distância entre os pontos A e B indicada por d_{AB} é calculada aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Então: $\boxed{\mathbf{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}}$

Exercícios Resolvidos:

1) Determinar a distância entre os pontos $A(2,4)$ e $B(5,8)$.

Resolução: $\begin{cases} A(2,4) \to x_A = 2;\ y_A = 4 \\ B(5,8) \to x_B = 5;\ y_B = 8 \end{cases}$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow d_{AB} = 5$$

Resposta: 5 unidades de comprimento

2) Determinar no eixo das abscissas um ponto P, equidistante dos pontos $A(-2,2)$ e $B(2,6)$.

Resolução:

$$\begin{cases} P(x,0) \to x_P = x;\ y_P = 0 \\ A(-2,2) \to x_A = -2;\ y_A = 2 \\ B(2,6) \to x_B = 5;\ y_B = 8 \end{cases}$$

Devemos ter $d_{PA} = d_{PB}$:

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$\sqrt{(x-(-2))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (0-6)^2}$$

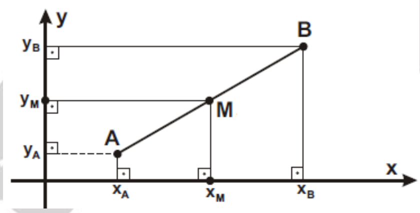
$$x^2 + 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 36$$

$$\therefore x = 4$$

Portanto: $P(4,0)$

3. Ponto Médio de um Segmento

Sejam os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ extremidades de um segmento de reta. As coordenadas do ponto médio do segmento AB são obtidas por médias aritméticas. Acompanhe:



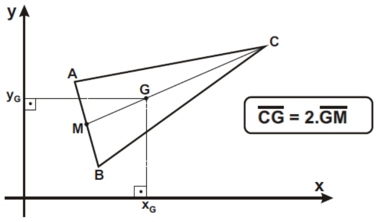
$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Dessa forma: $\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$

4. Mediana e Baricentro

Mediana é o segmento de reta cujas extremidades são um dos vértices do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Num triângulo ABC, denomina-se baricentro ou centro de gravidade ao ponto de encontro das medianas desse triângulo. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos, de maneira que o que tem extremidade em um vértice possui a medida o dobro do que tem extremidades no ponto médio do lado do triângulo.

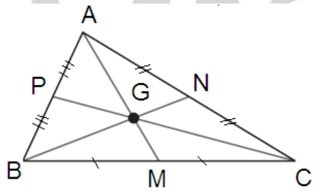


CM é uma mediana
G é o Baricentro

Coordenadas do baricentro de um triângulo

Como você viu, o baricentro de um triângulo ABC divide cada mediana na razão 2 para 1, ou seja:

$$\boxed{\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GP}} = \frac{2}{1}}$$



$$\begin{cases} A(x_A, y_A) \\ B(x_B, y_B) \\ C(x_C, y_C) \\ G(x_G, y_G) \end{cases}$$

A partir do exposto, vamos determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo.

Em x:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1} \to \frac{x_G - x_A}{x_M - x_G} = \frac{2}{1} \to x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \to 3x_G = 2x_M + x_A \text{ (I)}$$

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$3x_G = 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) + x_A \to 3x_G = x_B + x_C + x_A \to x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

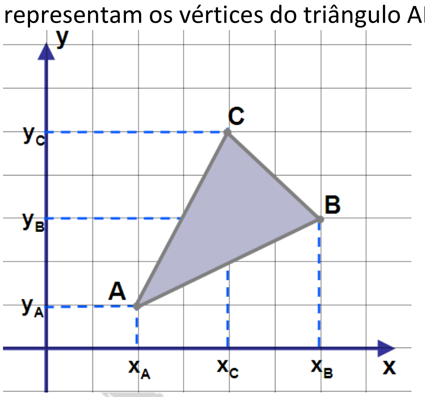
De forma análoga prova-se que: $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Assim as coordenadas do baricentro do triângulo ABC são:

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

5. Área do Triângulo

Considere os três pontos $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B); C(x_C, y_C)$ que representam os vértices do triângulo ABC da figura abaixo.

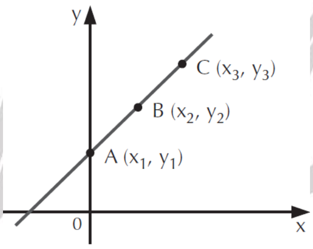


A área do triângulo ABC é dada pela fórmula:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|}$$

OBSERVAÇÃO:

Se os pontos A, B e C estiverem alinhados, temos:



$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercícios

Nível 1

01) (Fixando conteúdo) O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ sendo $A(1,2)$ e $B(7,8)$ é:

a) $\left(\frac{7}{2},5\right)$ b) $(4,5)$ c) $(8,11)$ d) $(13,14)$ e) $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

02) (Fixando conteúdo) Em uma aula de Geometria Analítica, o professor salientava a importância do estudo de triângulos em Engenharia, e propôs a seguinte questão:
O triângulo determinado pelos pontos A (0,0), B (5,4) e C (3,8) do plano cartesiano tem área igual a _______.
Feitos os cálculos, os alunos concluíram que a resposta correta era:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 14
e) 28

03) (Enem) Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto $A(1;2)$. No ponto médio entre a loja A e a loja B está o sanitário S, localizado no ponto $S(5;10)$. Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B.

a) $(-3;-6)$
b) $(-6;-3)$
c) $(3;6)$
d) $(9;18)$
e) $(18;9)$

04) (Fixando conteúdo) Sendo os pontos A(2, 3) e C(5, 6) vértices opostos de um quadrado, o comprimento do lado desse quadrado é
a) 2
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) 3
e) $5\sqrt{2}$

05) (Fixando conteúdo) Sendo os pontos A (– 1, 5) e B(2, 1) vértices consecutivos de um quadrado, o comprimento da diagonal desse quadrado é
a) 2
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) 5
e) $5\sqrt{2}$

06) (Modelo Enem) Na arquitetura, a matemática é usada a todo momento. A geometria é especialmente necessária no desejo de projetos. Essa parte da Matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir a medidas desses espaços. Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência, que deve ter o formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A(8,4); B(4,6); C(2,4). No ponto médio do lado formado pelos pontos A e C é colocado um suporte para luminárias. Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto B mede, em unidades de comprimento.

a) $\sqrt{37}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$

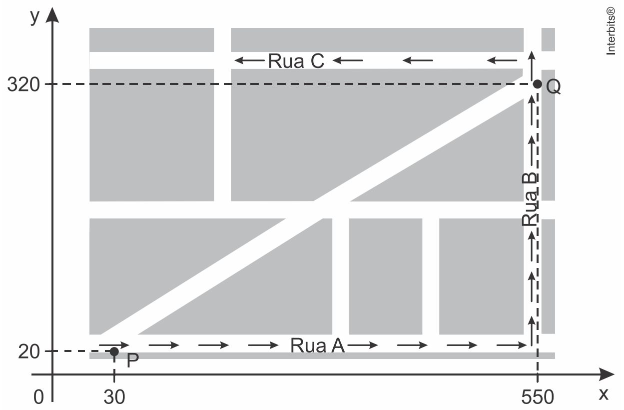
07) (Fixando conteúdo) O ponto do eixo das abscissas, equidistantes dos pontos P(-2,2) e Q(2,6), é:

a) A(2,0)
b) B(5,0)
c) C(3,0)
d) D(0,2)
e) E(4,0)

Nível 2

08) (Fixando conteúdo) Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices consecutivos são, respectivamente, (1, 4), (–2, 6) e (0, 8). A soma das coordenadas do quarto vértice é:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

09) (Enem) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

a) $(290; 20)$.

b) $(410; 0)$.

c) $(410; 20)$.

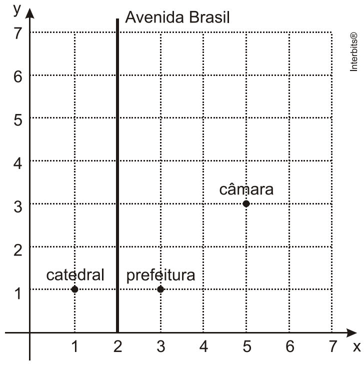
d) $(440; 0)$.

e) $(440; 20)$.

Nível 3

10) (Modelo Enem) A figura a seguir apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano.

Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores.



Sabendo que a distância real entre a catedral e a prefeitura é de 500 m, podemos concluir que a distância real, em linha reta, entre a catedral e a câmara de vereadores é de

a) 1500 m.

b) $500\sqrt{5}$ m.

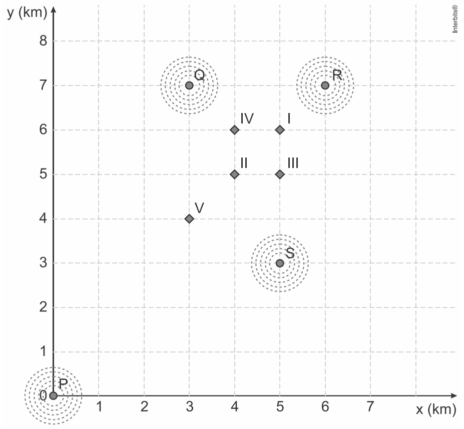
c) $1000\sqrt{2}$ m.

d) $500 + 500\sqrt{2}$ m.

e) 3400 m

11) (Enem) Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.



Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e $S,$ simultaneamente?

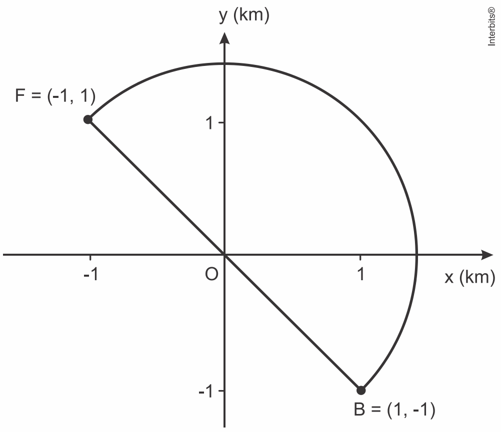
a) I b) II c) III d) IV e) V

12) Calcule as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC, sabendo que AD é uma de suas medianas e que A(-5, 8) e D(1, -1).

a) (0, 2)
b) (-1, 2)
c) (2, -1)
d) (-1, 1)
e) (2, -2)

13) Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte f até o reservatório de um novo bairro b.

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.

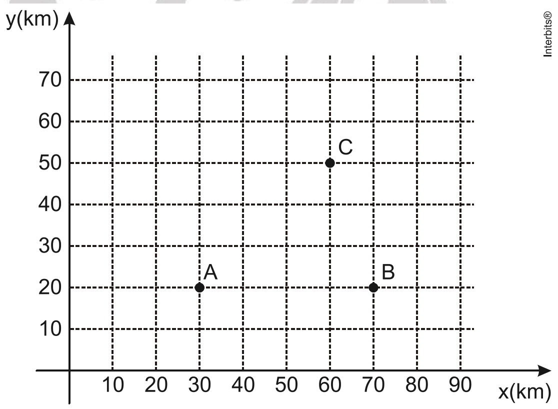


Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora $1{,}0\text{ h},$ enquanto que 1m de construção de galeria via semicircunferência demora $0{,}6\text{ h}.$ Há urgência em disponibilizar água para esse bairro. Use 3, como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}.$

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de

a) 1.260.
b) 2.520.
c) 2.800.
d) 3.600.
e) 4.000.

14) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65 ; 35).
b) (53 ; 30).
c) (45 ; 35).
d) (50 ; 20).
e) (50 ; 30).

GABARITO – AULAS 36 e 37

1) b	**2)** d	**3)** d	**4)** d	**5)** e	**6)** c	**7)** e
8) b	**9)** e	**10)** b	**11)** a	**12)** b	**13)** b	**14)** e

VÍDEO AULA 38 a 41

GEOMETRIA ANALÍTICA – ESTUDO DA RETA

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 38

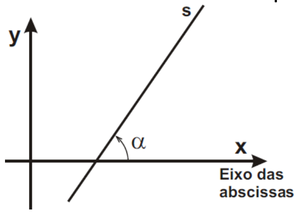
AULA 39

AULA 40

AULA 41

1. Coeficiente Angular da Reta

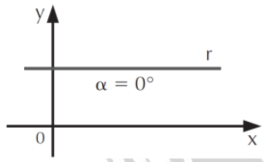
Denomina-se coeficiente angular da reta **s** ao número real **m** tal que $m = tg\alpha$, onde α é a inclinação da reta **s,** medida no sentido antihorário a partir do eixo das abscissas.



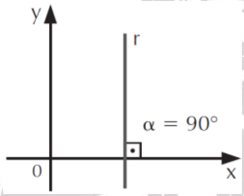
$\boxed{m = tg\alpha}$

Acompanhe os casos abaixo:

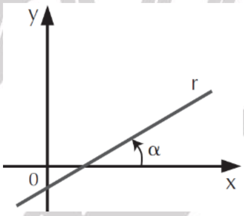
CASO I



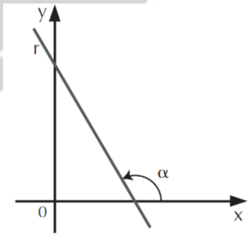
CASO II



CASO III



CASO IV



$\boxed{\text{CASO I: } \alpha = 0° \Leftrightarrow tg0° = 0 \Leftrightarrow m = 0}$

$\boxed{\text{CASO II: } \alpha = 90° \Leftrightarrow tg90° = 0 \Leftrightarrow m \text{ não está definida}}$

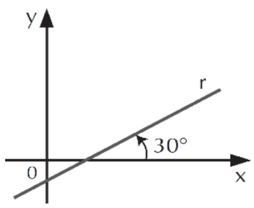
$\boxed{\text{CASO III: } 0° < \alpha < 90° \Leftrightarrow tg\alpha > 0 \Leftrightarrow m > 0}$

$\boxed{\text{CASO IV: } 90° < \alpha < 180° \Leftrightarrow tg\alpha < 0 \Leftrightarrow m < 0}$

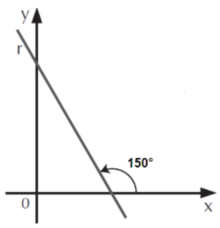
Exemplos:

Determine o coeficiente angular das retas indicadas abaixo:

a)



b)



Resolução:

a) $m = tg\alpha$

$m = tg30°$

$m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

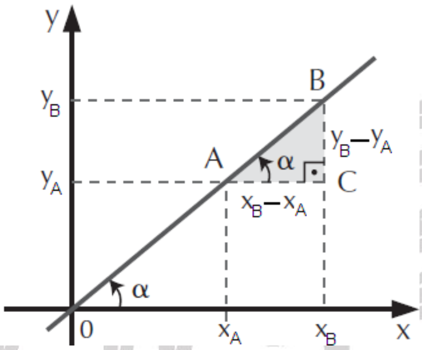
b) $m = tg\alpha$

$m = tg150°$

$m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Coeficiente Angular da Reta quando se conhecem dois de seus pontos

Considere uma reta não paralela ao eixo das ordenadas que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.



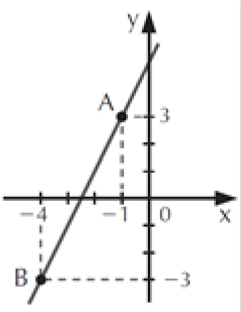
O triângulo ABC da figura acima é retângulo em C.Aplicando a tangente do ângulo α, temos:

$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo: $\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$

Exemplo:

Determine o coeficiente angular das reta indicada abaixo:



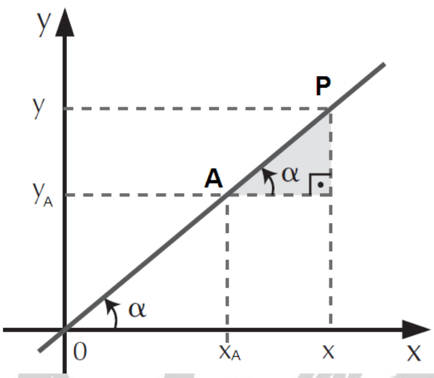
Resolução:

$$\begin{cases} A(-1,3) \\ B(-4,-3) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-3}{-4-(-1)} \Rightarrow m = 2$$

Observação: Dizer que o coeficiente angular da reta é igual a 2 é o mesmo que dizer que a "taxa de variação" da reta é 2, ou seja, "a cada aumento de uma unidade em x significa um aumento de 2 unidades em y".

3. Equação de uma reta conhecendo um ponto e sua inclinação

Podemos obter a equação de uma reta se conhecermos um de seus pontos e sua inclinação.



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_A}{x - x_A}$. Então:

$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

Observação: No caso da reta ser paralela ao eixo das ordenadas, sua equação é: $\boxed{x = x_A}$

Exemplos:

1) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,4)$ e cujo coeficiente angular é igual a 2.

Resolução:

$$\begin{cases} A(2,4) \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 2)$$

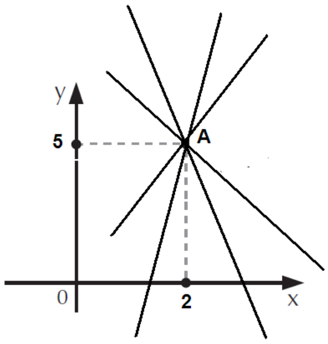
Portanto $2x - y = 0$ é a equação da reta procurada.

2) Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $A(2,5)$

Resolução:

$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = m(x - 2)$

Portanto $y - 5 = m(x - 2)$ é a equação do feixe de retas que passam pelo ponto $A(2,5)$.



Observe que à medida que o coeficiente angular (m) varia vamos obtendo infinitas retas concorrentes em A, inclusive a reta vertical $x = 2$, para qual não definimos coeficiente angular.

4. Formas de escrever a equação da reta

4.1. Equação Geral

Recebe o nome equação geral de uma reta a toda equação colocada na forma $\boxed{ax + by + c = 0}$ com a e b não simultaneamente nulos.

Exemplo: Determinar a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(1,5)$ e $B(3,9)$.

Resolução:

$$\begin{cases} A(1,5) \\ B(3,9) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-5}{3-1} \Rightarrow m = 2$$

Usando o ponto A, temos:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y - 5 = 2(x - 1)$$
$$2x - y + 3 = 0$$

Portanto a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B é $\boxed{2x - y + 3 = 0}$

<u>Outro modo de resolução:</u>

Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da reta que passa por A e B, podemos afirmar que P, A e B estão alinhados. Então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x + 3y + 9 - 15 - 9x - y = 0$$
$$\Rightarrow -4x + 2y - 6 = 0$$
$$\Rightarrow 2x - y + 3 = 0$$

Observação:

Considere dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, de coordenadas conhecidas e um ponto genérico de coordenadas (x, y), todos pertencentes à mesma reta.
Podemos definir a equação geral de uma reta através da condição de alinhamento:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante e agrupando os termos semelhantes, temos:

$$\underbrace{(y_A - y_B)}_{a}x + \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}y + \underbrace{(x_A y_B - x_B y_A)}_{c} = 0$$

ou

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

4.2. Equação Reduzida

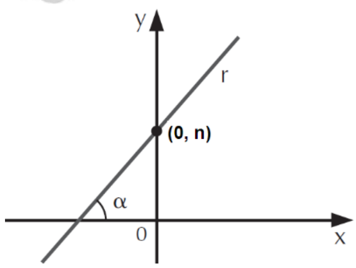
Considere a reta não vertical dada por $ax + by + c = 0$. Isolando y, temos:

$$by = -ax - c \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$, vem:

$$\boxed{y = mx + n}$$

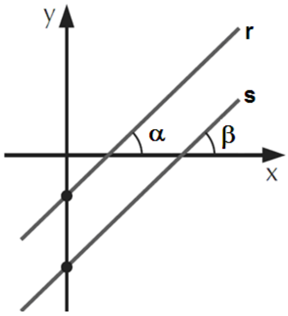
onde **m** é o coeficiente angular da reta, enquanto **n** é o coeficiente linear da reta.
Observação: O coeficiente linear da reta **(n)** indica a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas.



5. Posição entre 2 retas

RETAS PARALELAS DISTINTAS (r//s)

Considere **r** e **s** duas retas não verticais, com inclinações α e β respectivamente.



Se as retas **r** e **s** são paralelas, temos:

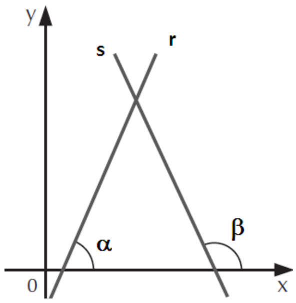
$$\alpha=\beta \rightarrow tg\alpha = tg\beta \rightarrow \boxed{m_r = m_s}$$

Ou seja:
Se duas retas não verticais são paralelas distintas, seus coeficientes angulares são iguais.

Observação: Se as retas **r** e **s** possuirem além dos mesmos coeficientes angulares, também os mesmos coeficientes lineares, elas serão ditas **retas coincidentes**.

RETAS CONCORRENTES (r x s)

Duas retas **r** e **s** que não possuem mesmo coeficiente angular não são paralelas; consequentemente são ditas **retas concorrentes**.



$$\alpha \neq \beta \rightarrow tg\alpha \neq tg\beta \rightarrow \boxed{m_r \neq m_s}$$

Caso Particular de Concorrência:

Duas retas r e s não verticais são perpendiculares se $\boxed{m_r . m_s = -1}$

Exercícios Resolvidos

1) Determine o valor de **k** para que a reta $r: 2x+3y-1=0$ seja paralela à reta $s: kx+5y-2=0$.

Resolução:

$$\begin{cases} r: 2x+3y-1=0 \rightarrow y=\dfrac{-2x+1}{3} \therefore m_r = -\dfrac{2}{3} \\ s: kx+5y-2=0 \rightarrow y=\dfrac{-kx+2}{5} \therefore m_s = -\dfrac{k}{5} \end{cases}$$

Devemos ter: $m_r = m_s$. Logo:

$$-\frac{2}{3}=-\frac{k}{5} \rightarrow -3k=-10 \rightarrow k=\frac{10}{3}$$

Portanto, para que as retas r e s sejam paralelas, devemos ter: $k=\dfrac{10}{3}$.

2) Obter a equação da reta **r**, que passa por $A(2,4)$ e é paralela à reta **s** de equação $3x+y-1=0$

Resolução:

$$\begin{cases} s: 3x+y-1=0 \rightarrow y=-3x+1 \therefore m_s=-3 \\ r//s \rightarrow m_r = m_s \rightarrow m_r=-3 \end{cases}$$

A reta r passa pelo ponto $A(2,4)$. Então:

$$y-y_A = m(x-x_A)$$
$$y-4=-3(x-2)$$
$$y=-3x+10$$

Portanto, a equação da reta r é dada por: $y=-3x+10$

3) Determine o valor de **k** para que a reta $r: 2x+3y-1=0$ seja perpendicular à reta $s: kx+5y-2=0$.

Resolução:

$$\begin{cases} r: 2x+3y-1=0 \rightarrow y=\dfrac{-2x+1}{3} \therefore m_r = -\dfrac{2}{3} \\ s: kx+5y-2=0 \rightarrow y=\dfrac{-kx+2}{5} \therefore m_s = -\dfrac{k}{5} \end{cases}$$

Devemos ter: $m_r . m_s = -1$. Logo:

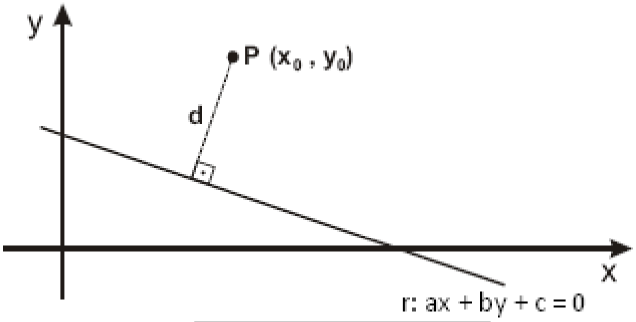
$$-\frac{2}{3}.\left(-\frac{k}{5}\right)=-1$$

$$\frac{2k}{15}=-1 \rightarrow k=-\frac{15}{2}$$

Portanto, para que as retas r e s sejam perpendiculares, devemos ter: $k=-\dfrac{15}{2}$.

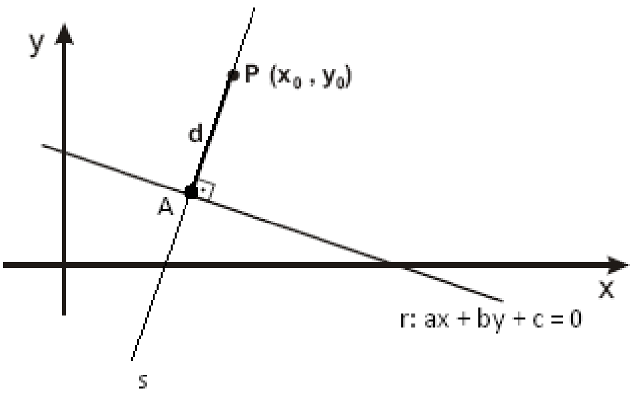
6. Distância entre ponto e reta

Considere um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$, a distância do ponto P a reta r pode ser calculada pela expressão:



$$d_{(P,r)} = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Justificativa da fórmula:



Considere a reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r.

$$\boxed{r \perp s \rightarrow m_r.m_s = -1 \rightarrow m_s = \frac{b}{a}}$$

A equação da reta s é dada por:

$$y - y_o = \frac{b}{a}(x - x_o)$$

$$ay - ay_o = bx - bx_o$$

$$-bx + ay + bx_o - ay_o = 0$$

As coordenadas do ponto A, intersecção das retas **r** e **s**, podem ser obtidas através de um sistema de equações:

$$\begin{cases} r:\ ax + by + c = 0 \\ s:\ -bx + ay + bx_o - ay_o = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$\Rightarrow x = \frac{-ac + b(bx_o - ay_o)}{a^2 + b^2} \text{ e } y = \frac{-bc - a(bx_o - ay_o)}{a^2 + b^2}$$

Portanto, as coordenadas do ponto A são:

$$\left(\frac{-ac + b(bx_o - ay_o)}{a^2 + b^2}, \frac{-bc - a(bx_o - ay_o)}{a^2 + b^2}\right)$$

Finalmente fazendo a distância entre dois pontos (P e A), vem:

$$d_{PA} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2}$$

$$d_{PA} = \sqrt{\left(\frac{-ac + b(bx_o - ay_o)}{a^2 + b^2} - x_o\right)^2 + \left(\frac{-bc - a(bx_o - ay_o)}{a^2 + b^2} - y_o\right)^2}$$

Desenvolvendo os produtos notáveis, temos:

$$d_{PA} = \sqrt{\frac{(a.x_o + b.y_o + c)^2}{a^2 + b^2}} \rightarrow d_{PA} = d_{p,r} = \frac{|a.x_o + b.y_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercício Resolvido

Calcular a distância entre o ponto P(2, 1) e a reta r de equação $4x + 3y - 6 = 0$.

Resolução: $d = \frac{|4.2 + 3.1 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Rightarrow d = \frac{5}{5} \Rightarrow d = 1$

Exercícios

Nível 1

01) (Fixando conteúdo) A equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(0, -4)$ pertencentes ao plano cartesiano pode ser representada por

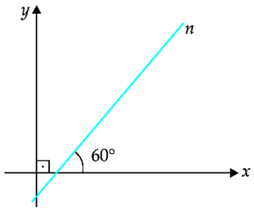
a) $6x+y+4=0.$
b) $-6x-y-1=0.$
c) $x+6y+4=0.$
d) $6x+y-4=0.$
e) $6x-y+4=0.$

02)) (Fixando conteúdo) A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos *A(* 1,5) e *B(* 4,14) é:

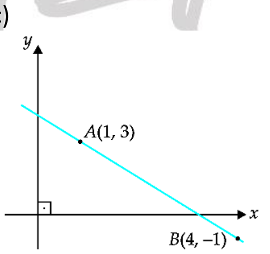
a) 4
b) – 5
c) 3
d) 2
e) 5

03) (Fixando conteúdo) Determine o coeficiente angular das retas abaixo:

a) r: 2x + 3y + 1 = 0
b)



c)

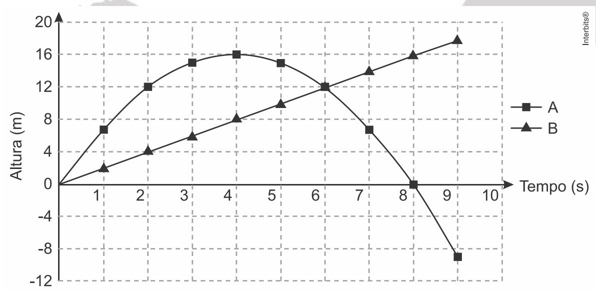


04) (Modelo Enem) Janeiro de 2003 foi um dos meses mais quentes dos últimos anos. Em um certo dia de janeiro, a temperatura da cidade de Joinville, às 10 horas da manhã, era de 25° C, continuou subindo **uniformemente** até às 15 horas, quando alcançou 40° C. Representando esta situação em um gráfico cartesiano na qual a abscissa representa os tempos (em horas) e na ordenada a temperatura (em °C), obtém-se um segmento de reta AB. A equação da reta que contém esse segmento é:

a) 3x + y + 5 = 0
b) 3x – y + 3 = 0
c) 3x + 4y + 3 = 0
d) 3x – y – 5 = 0
e) 5x – y – 3 = 0

Nível 2

05) (Enem) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

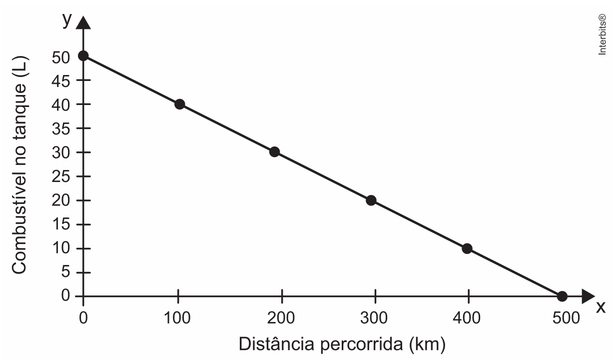


Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) aumentar em 4 unidades.
e) aumentar em 8 unidades.

06) (Enem) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

a) $y = -10x + 500$

b) $y = \frac{-x}{10} + 50$

c) $y = \frac{-x}{10} + 500$

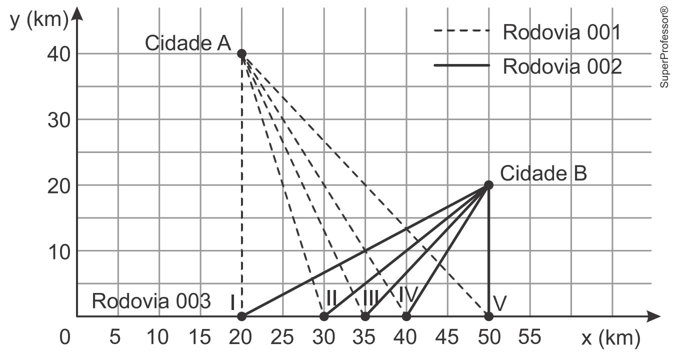
d) $y = \frac{x}{10} + 50$

e) $y = \frac{x}{10} + 500$

.

Nível 3

07) (Enem) O governo de um estado pretende realizar uma obra de infraestrutura para auxiliar na integração e no processo de escoamento da produção agrícola de duas cidades. O projeto consiste na interligação direta das cidades, A e B com a Rodovia 003, pela construção das Rodovias 001 e 002. As duas rodovias serão construídas em linha reta e deverão se conectar a Rodovia 003 em um mesmo ponto, conforme esboço apresentado na figura, na qual estão também indicadas as posições das cidades A e B, considerando o eixo x posicionado sobre a Rodovia 003, e cinco localizações sugeridas para o ponto de conexão entre as três rodovias.

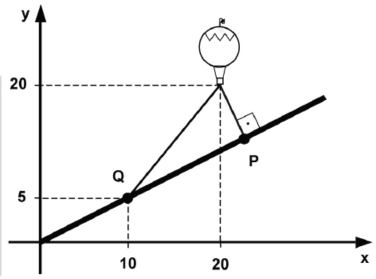


Pretende-se que a distância percorrida entre as duas cidades, pelas Rodovias 001 e 002, passando pelo ponto de conexão, seja a menor possível.

Dadas as exigências do projeto, qual das localizações sugeridas deve ser a escolhida para o ponto de conexão?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

08) (Modelo Enem) Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura ao lado descreve a situação de maneira simplificada. Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. As coordenadas do ponto P, indicado na figura, são, então:

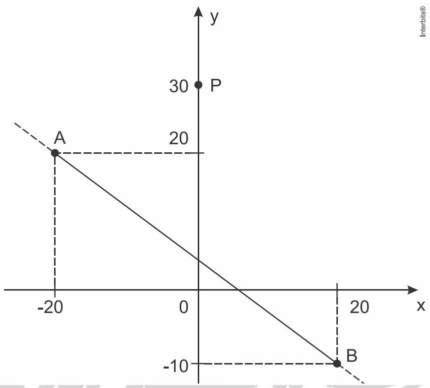


a) (21,7).
b) (22,8).
c) (24,12).
d) (25,13).
e) (26,15).

09) (Modelo Enem) A distância entre duas retas paralelas é o comprimento do segmento de perpendicular às retas que tem uma extremidade em uma reta e a outra extremidade na outra reta. No plano cartesiano, a distância entre as retas de equações $3x+4y=0$ e $3x+4y+10=0$ é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

10) (Modelo Enem) A figura abaixo ilustra as localizações de um Posto de Saúde (P) e de um trecho retilíneo de uma rodovia (AB) em um plano cartesiano ortogonal, na escala $1:200$.



Pretende-se construir uma estrada ligando o Posto à rodovia, de modo que a distância entre eles seja a menor possível. Se a unidade de medida real é o metro, a distância entre o Posto e a rodovia deverá ser igual a:

a) 600 m b) 800 m c) 2 km d) 4 km

GABARITO – AULAS 38 a 41

1) a **2)** e
3) a) m = – 2/3 b) m = $\sqrt{3}$ c) – 4/3
4) d **5)** c **6)** b **7)** d **8)** c
9) a **10)** a

VÍDEO AULA 42 a 43

GEOMETRIA ANALÍTICA – ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

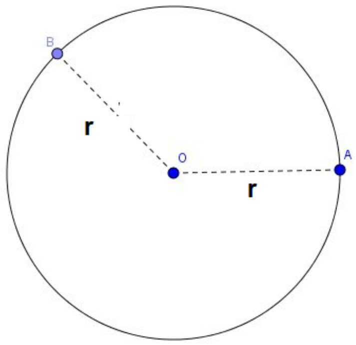
CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 42

AULA 43

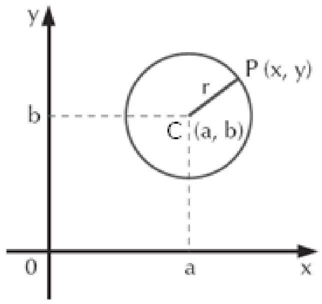
1. Definição

Circunferência é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto O, denominado centro da circunferência, é constante. Essa constante é denominada raio da circunferência (r).



Nesse módulo estaremos estudando a circunferência sob o ponto de vista analítico.

2. Equação Reduzida da Circunferência



Sejam C(a, b) o centro e P(x, y) um ponto da circunferência no plano cartesiano. Observe que a distância de C a P é o raio da circunferência, ou seja:

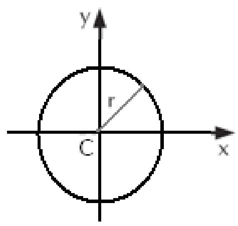
$$\boxed{d_{C,P} = r}$$

Logo: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Portanto: $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

Essa igualdade é dita *equação da circunferência na forma reduzida.*

Observação: Caso a circunferência esteja centrada na origem do sistema cartesiano, sua equação se reduz a:



$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

3. Equação Geral da Circunferência

Desenvolvendo a equação reduzida da circunferência vamos obter:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = r^2$$

Logo:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0}$$

Fazendo $-2a = A$, $-2b = B$ e $a^2 + b^2 - r^2 = C$, temos:

$$\boxed{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

Essa igualdade é dita *equação da circunferência na forma geral.*

4. Identificação do centro e do raio de um circunferência

Quando a equação vem na forma reduzida:

Neste caso as coordenadas do centro e a medida do raio vem diretamente pela comparação com a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Exemplo:

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 36$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \begin{cases} a = 2 \ \text{ e } \ b = 5 \rightarrow C(2, 5) \\ r^2 = 36 \rightarrow r = 6 \end{cases}$$

Quando a equação vem na forma geral:

Neste caso as coordenadas do centro e a medida do raio vem por dois modos:

Exemplo: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

Modo 1: A equação da circunferência na forma geral é dada por: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Fazendo a comparação com $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$, temos:

$$x^2 + y^2 \underset{\downarrow}{-2a}x \underset{\downarrow}{-2b}y + \underbrace{a^2 + b^2 - r^2}_{\downarrow} = 0$$
$$x^2 + y^2 \quad -6x \quad -4y \qquad -12 = 0$$

Daí:

$$\begin{cases} -2a = -6 \rightarrow a = 3 \\ -2b = -4 \rightarrow a = 2 \\ a^2 + b^2 - r^2 = -12 \\ 3^2 + 2^2 - r^2 = -12 \rightarrow r = 5 \end{cases}$$

Portanto, o centro da circunferência é o ponto (3, 2) e o raio é 5..

Modo 2: No ensino fundamental você estudou que:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

A nossa ideia é colocar a equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ na forma reduzida para que as coordenadas do centro e a medida do raio venham diretamente por comparação.

Podemos escrever a equação $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ assim:

$$\underbrace{(x^2-6x+...)}_{I}+\underbrace{(y^2-4y+...)}_{II}=12$$

Para que a expressão I seja um trinômio quadrado perfeito devemos substituir as reticências por 9 e na expressão II por 4. Daí para que a igualdade seja mantida devemos somar ao segundo membro 9 e 4.

Assim:

$$\underbrace{(x^2-6x+...)}_{I}+\underbrace{(y^2-4y+...)}_{II}=12$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-4y+4)=12+9+4$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25$$

Logo, a equação $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ representa um circunferência de centro C(3, 2) e raio 5.

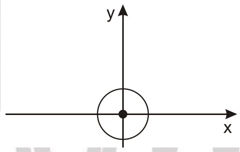
Exercícios

Nível 1

01) (Fixando conteúdo) Determine as coordenadas do centro e o raio das seguintes circunferências dadas pelas equações abaixo:

a) $(x-2)^2+(y-1)^2=16$
b) $(x+2)^2+y^2=25$
c) $x^2+(y-1)^2=81$
d) $x^2+y^2=9$
e) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$
f) $2x^2+2y^2-12x+8y-6=0$
g) $x^2+y^2-8x-2y+1=0$
h) $x^2+y^2-8x-4y+15=0$

02) (Modelo Enem) Resolver a questão com base na regra 2 da FIFA, segundo a qual a bola oficial de futebol deve ter sua maior circunferência medindo de 68cm a 70cm. Considerando essa maior circunferência com 70cm e usando um referencial cartesiano para representá-la, como no desenho abaixo, poderíamos apresentar sua equação como



a) $x^2+y^2=\frac{35}{\pi}$

b) $x^2+y^2=\left(\frac{35}{\pi}\right)^2$

c) $x^2+y^2=\frac{70}{\pi}$

d) $x^2+y^2=\left(\frac{70}{\pi}\right)^2$

e) $x^2+y^2=70^2$

03) (Modelo Enem) Uma antena de telefone celular rural cobre uma região circular de área igual a $900\,\pi\,km^2$. Essa antena está localizada no centro da região circular e sua posição no sistema cartesiano, com medidas em quilômetros, é o ponto $(0,10)$.

Assim, a equação da circunferência que delimita a região circular é

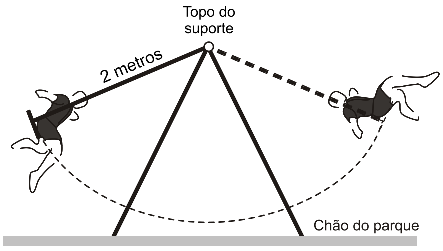
a) $x^2+y^2-20y-800=0.$
b) $x^2+y^2-20y+70=0.$
c) $x^2+y^2-20x-800=0.$
d) $x^2+y^2-20y-70=0.$
e) $x^2+y^2=900.$

Nível 2

04) (Fixando conteúdo) O raio da circunferência determinada pela equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ é, em unidades de medida:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 6

05) (Enem) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

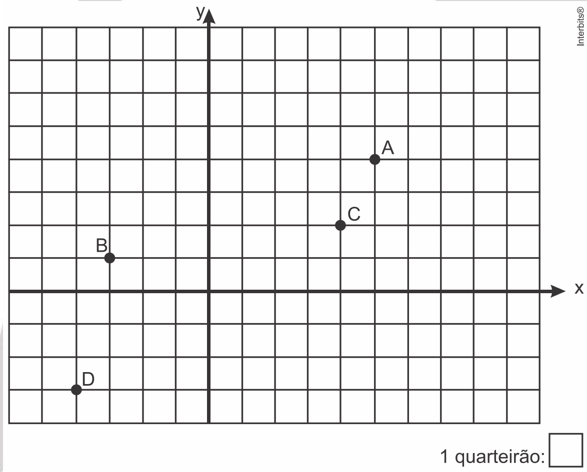
A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$
b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$
c) $f(x) = x^2 - 2$
d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Nível 3

06) (Enem) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema.

A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos *A*, *B*, *C* e *D* representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



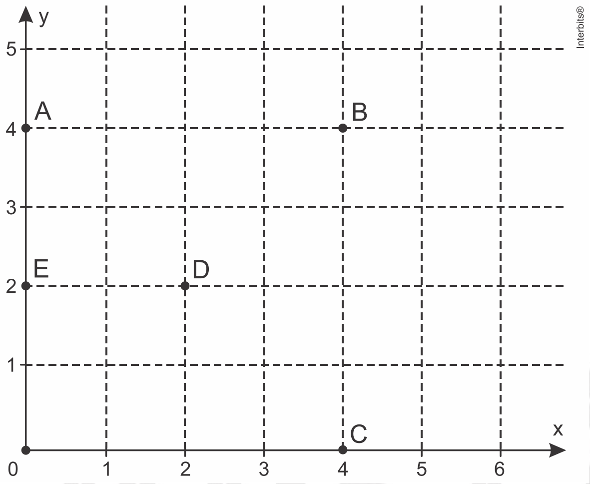
Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \le 0$.

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não.

Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas

a) A e C.
b) B e C.
c) B e D.
d) A, B e C.
e) B, C e D.

07) **(Enem)** Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: $A(0;4), B(4;4), C(4;0), D(2;2)$ e $E(0;2)$.



Passando pelo ponto A, qual a equação forneceria a maior pontuação?

a) $x = 0$
b) $y = 0$
c) $x^2 + y^2 = 16$
d) $x^2 + (y-2)^2 = 4$
e) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

GABARITO – AULAS 42 e 43

1) a) C(2, 1) R = 4 b) C(-2, 0) R = 5 c) C(0, 1) R = 9
d) C(0, 0) R = 3 e) C(2, 3) R = 5 f) C(3, -2) R = 4
g) C(4,1) R = 4 h) C(4, 2) R = $\sqrt{5}$
2) b **3)** a **4)** d **5)** d **6)** d **7)** e