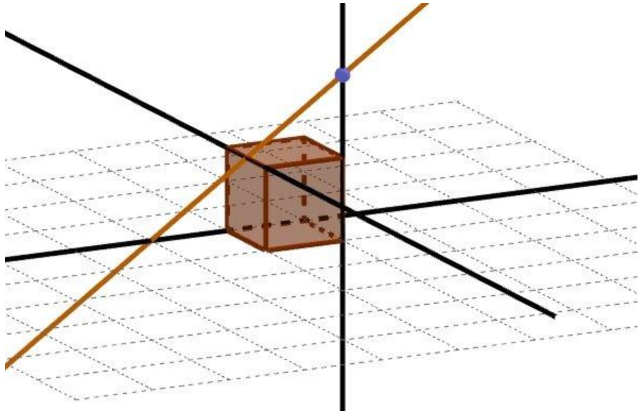
Professor Ricardinho

MATEMÁTICA X

Setor B – Aulas 25 e 26
Introdução à Geometria Espacial

Geometria de Posição



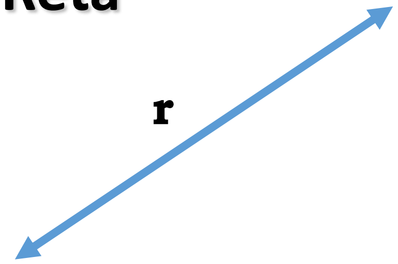
CONCEITOS PRIMITIVOS

São conceitos adotados sem definição.

Ponto

- Não possui dimensão;
- Sua representação geométrica é indicada por letra maiúscula.

Reta



- É unidimensional e tem comprimento infinito;
- Sua representação geométrica é indicada por letra minúscula;

Plano

- É bidimensional, possui largura e comprimentos infinitos e não possui espessura.
- Sua representação geométrica é indicada por letra do alfabeto grego.

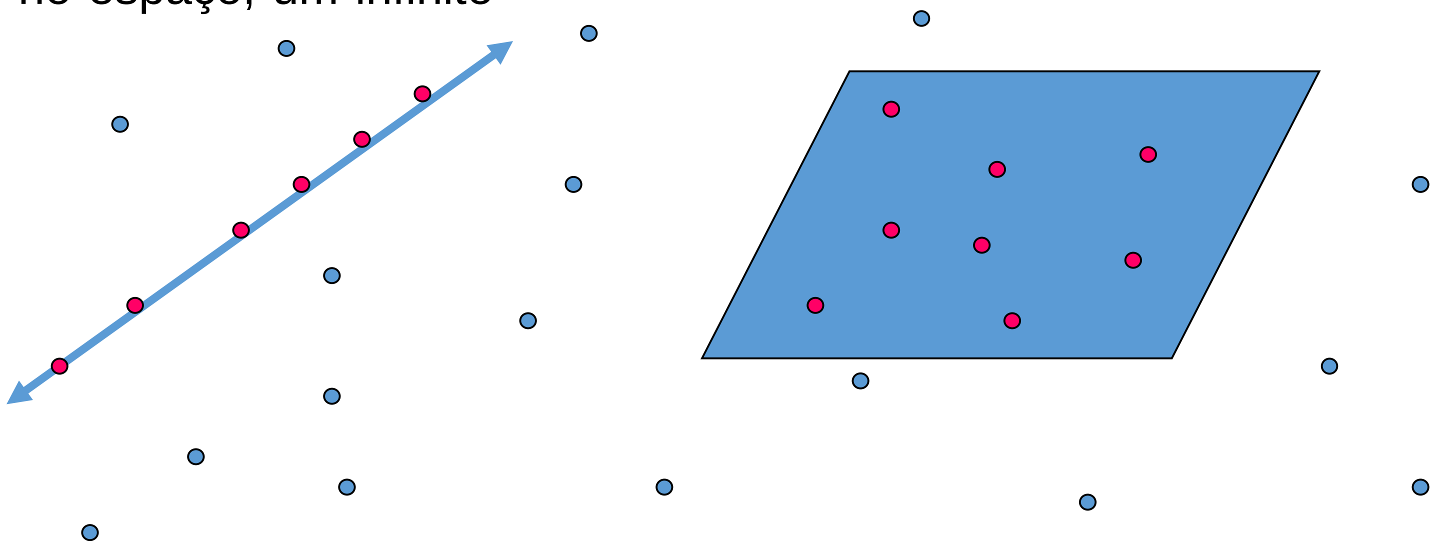
Geometria de Posição

POSTULADOS - TEOREMAS

Teoremas: São proposições aceitas desde que demonstradas.

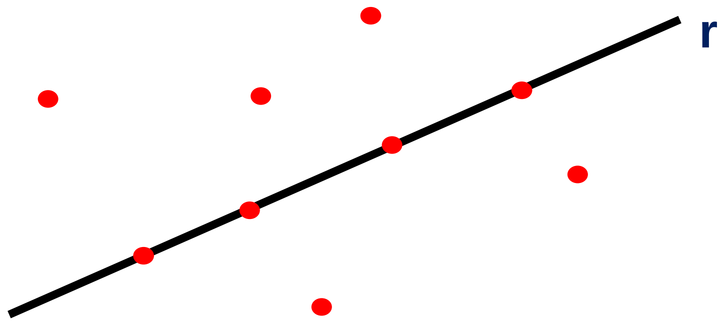
Postulados: São proposições aceitas sem demonstração.

Postulado Fundamental: Existem no espaço, um infinito número de pontos, retas e planos.

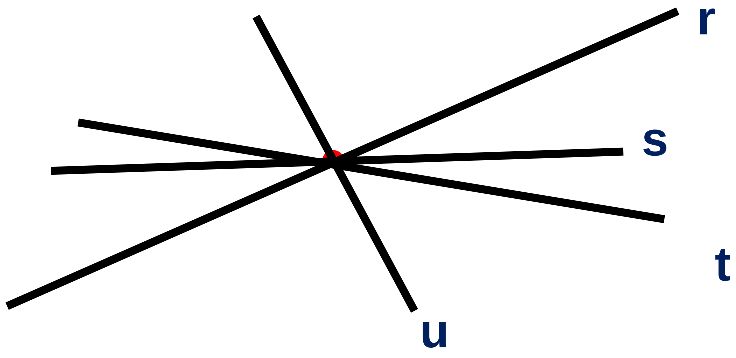


POSTULADOS DA RETA

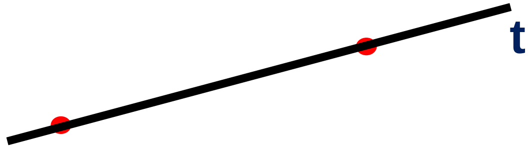
- Em uma reta e fora dela existem infinitos pontos.



- Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.

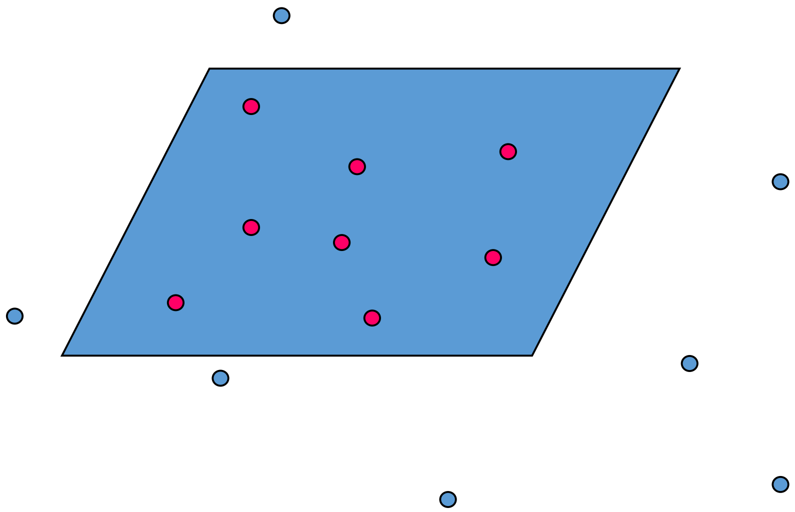


- Por dois pontos distintos passa uma única reta.

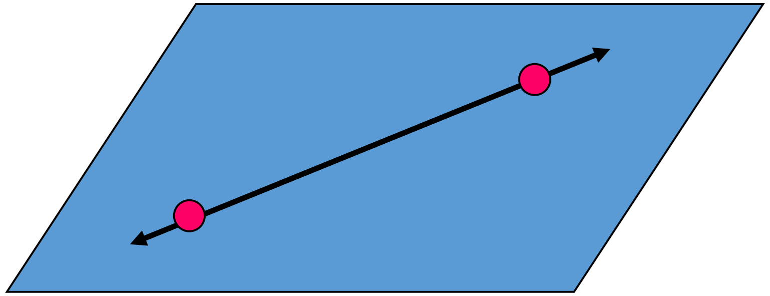


POSTULADOS DO PLANO

- Em um plano e fora dele existem infinitos pontos.

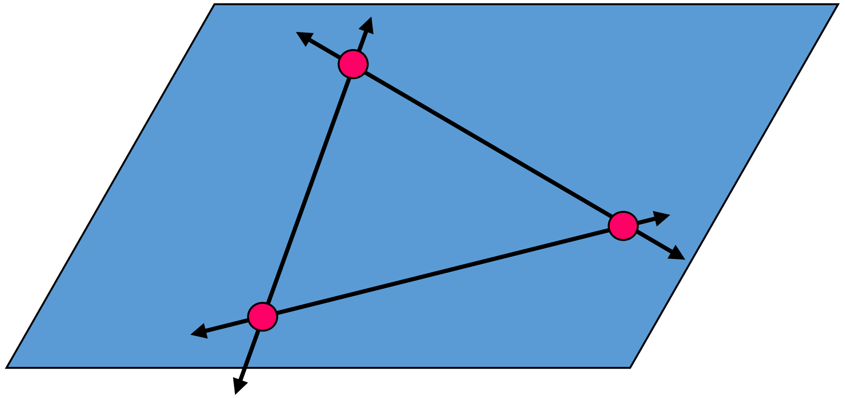


- Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, a reta está contida no plano.

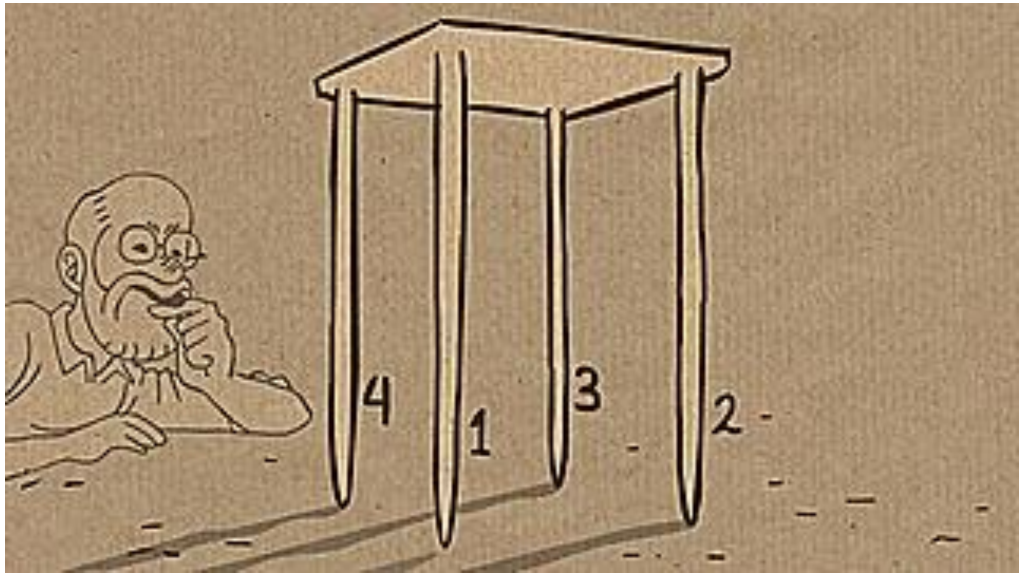


POSTULADOS DO PLANO

- **Por três pontos não-colineares passa um único plano, ou seja, 3 pontos distintos e não alinhados são sempre coplanares**



mesa com três pernas não balança

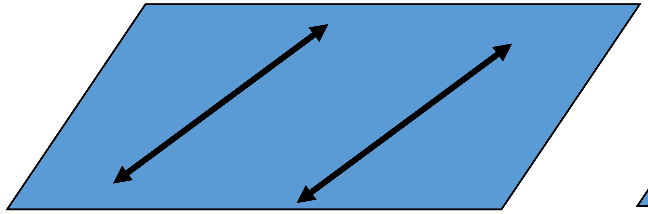


POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

- **COPLANARES (mesmo plano)**

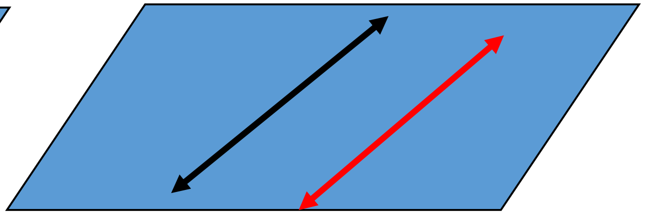
Paralelas

Paralelas distintas



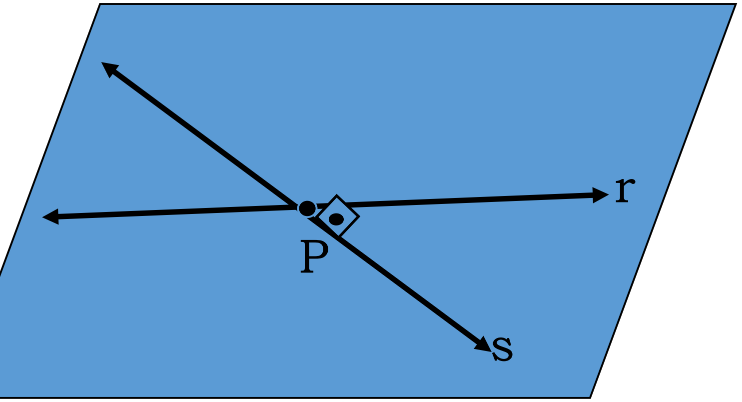
$r \cap s = \varnothing$

Paralelas coincidentes



$r \equiv s$

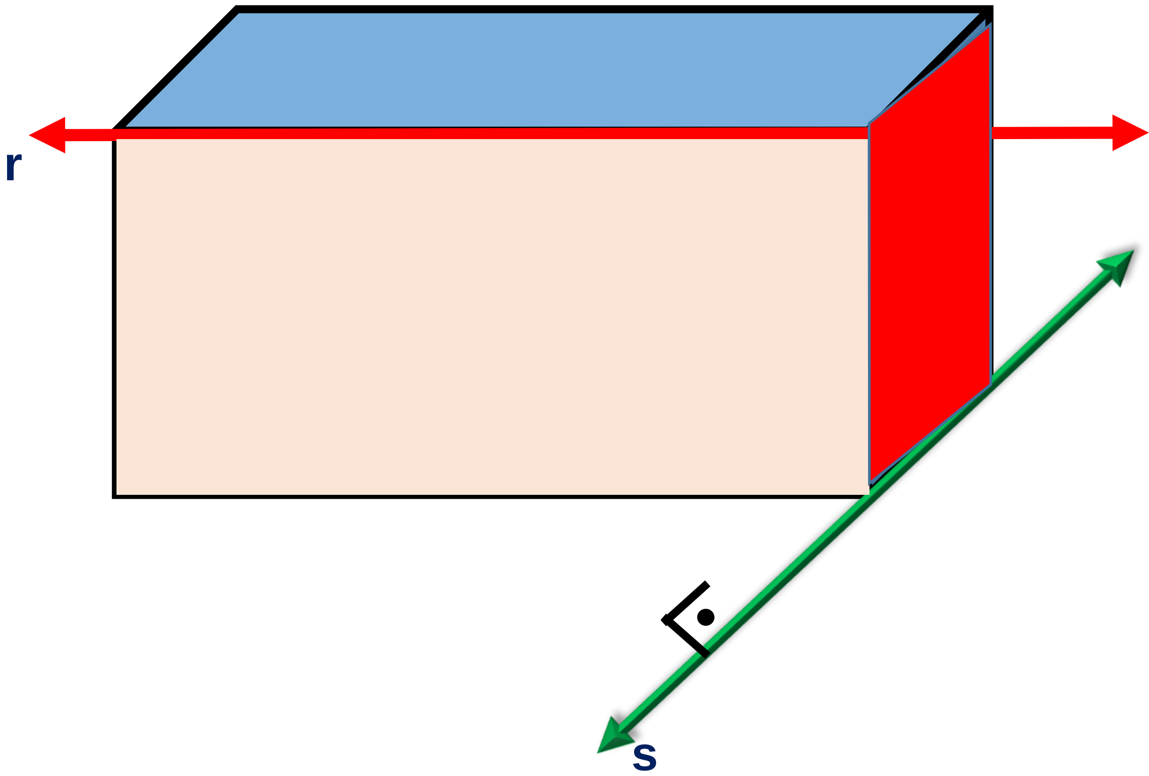
Concorrentes



Concorrentes e perpendiculares

$r \cap s = P$

- **REVERSAS (planos diferentes)**



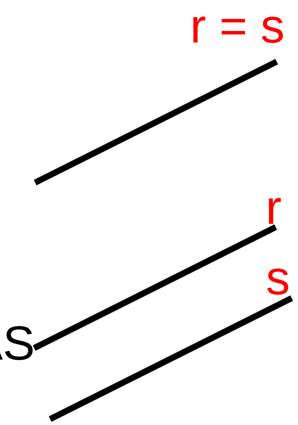
Retas ortogonais: *retas cuja projeção de uma sobre a outra forma um ângulo reto.*

Em síntese...

COPLANARES
(que estão no mesmo plano)

PARALELAS COINCIDENTES

$\mathbf{r \cap s =}$ $r = s$

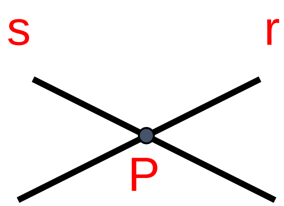


PARALELAS DISTINTAS

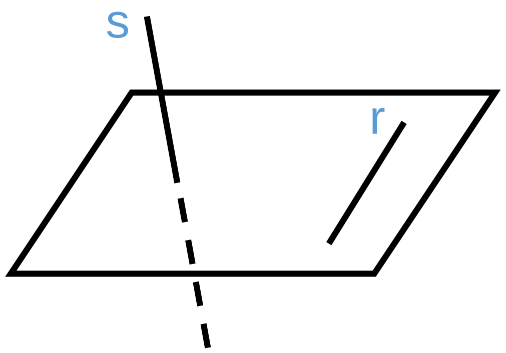
$\mathbf{r \cap s =}$ $\varnothing$

CONCORRENTES

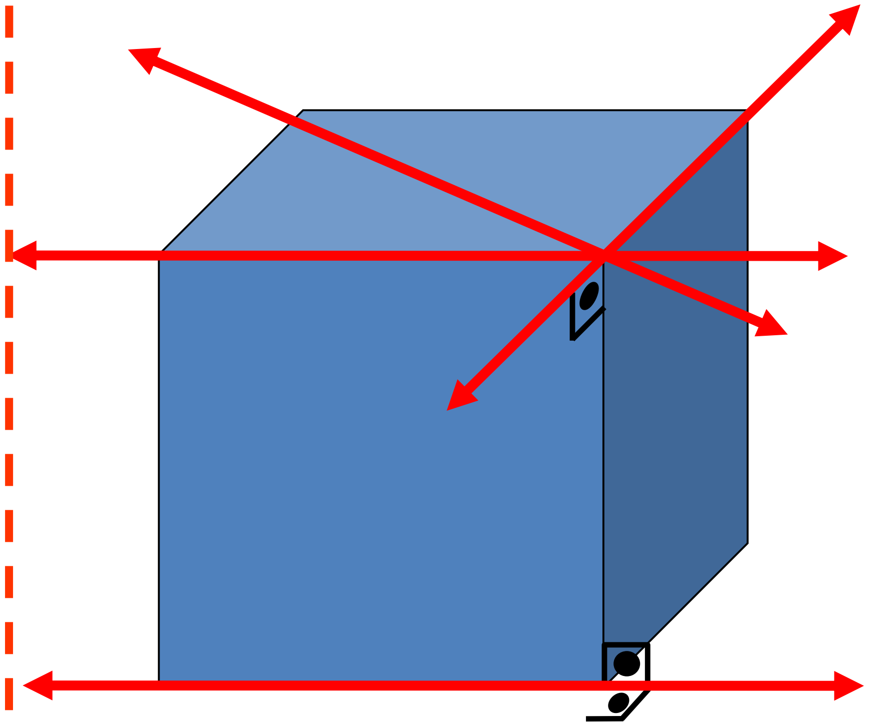
$\mathbf{r \cap s =}$ $\{P\}$



REVERSAS
(que não estão no mesmo plano)

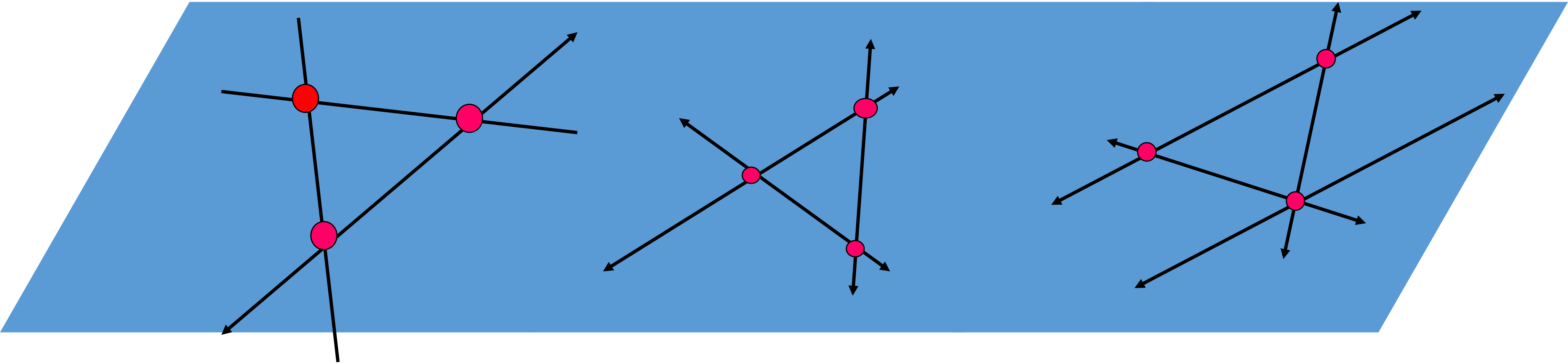


$\mathbf{r \cap s =}$ $\varnothing$



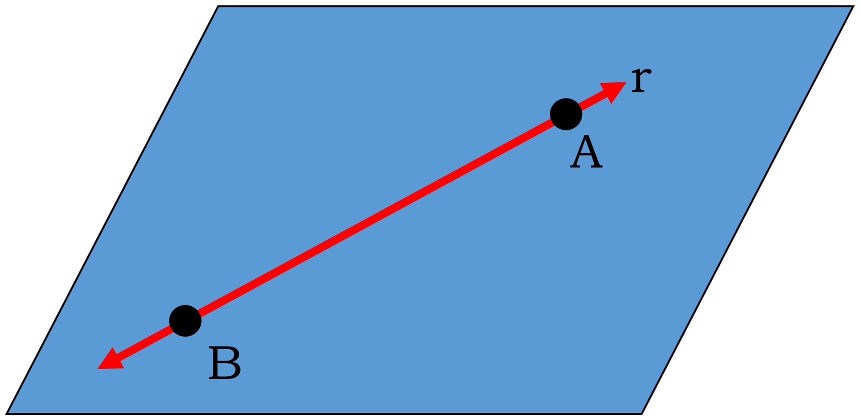
DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

1. Três pontos não colineares.
2. Uma reta e um ponto não pertencente a ela
3. Duas retas concorrentes
4. Duas retas paralelas distintas

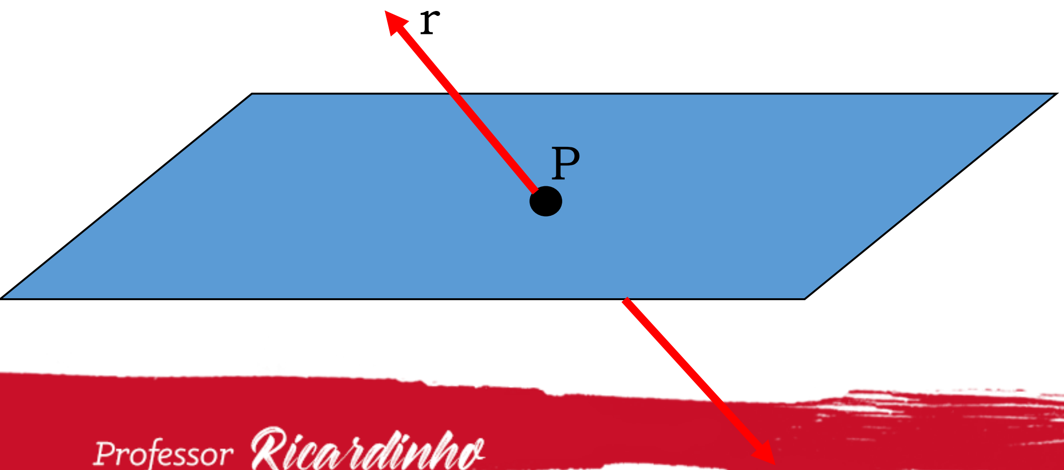


POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Reta contida no plano: uma reta está contida no plano quando, pelo menos, dois de seus pontos pertencem ao plano.

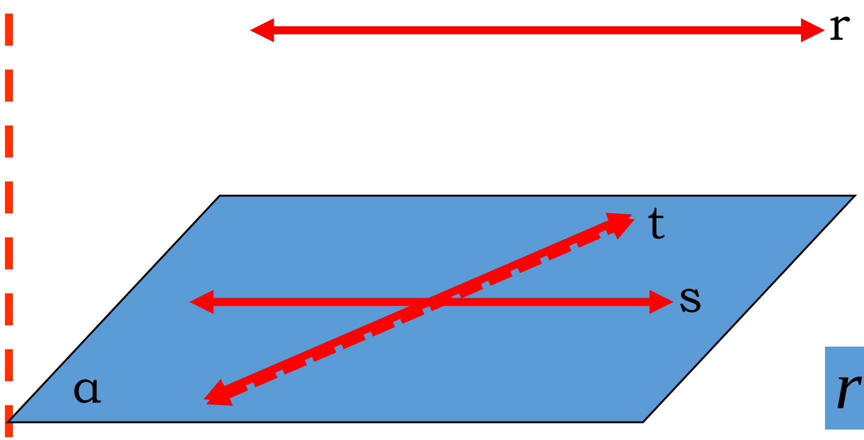


Reta e plano concorrentes: quando possuem um único ponto em comum.



Reta e plano paralelos: se uma reta é paralela a um plano, essa reta é paralela a pelo menos uma reta desse plano.

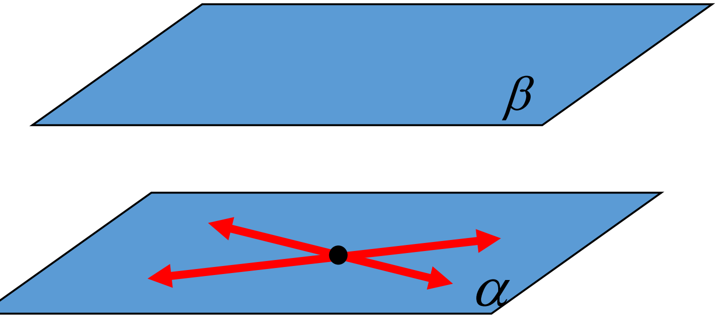
Em α existem infinitas retas paralelas e reversas.



$$r \,//\, \alpha \Rightarrow r \cap \alpha = \varnothing$$

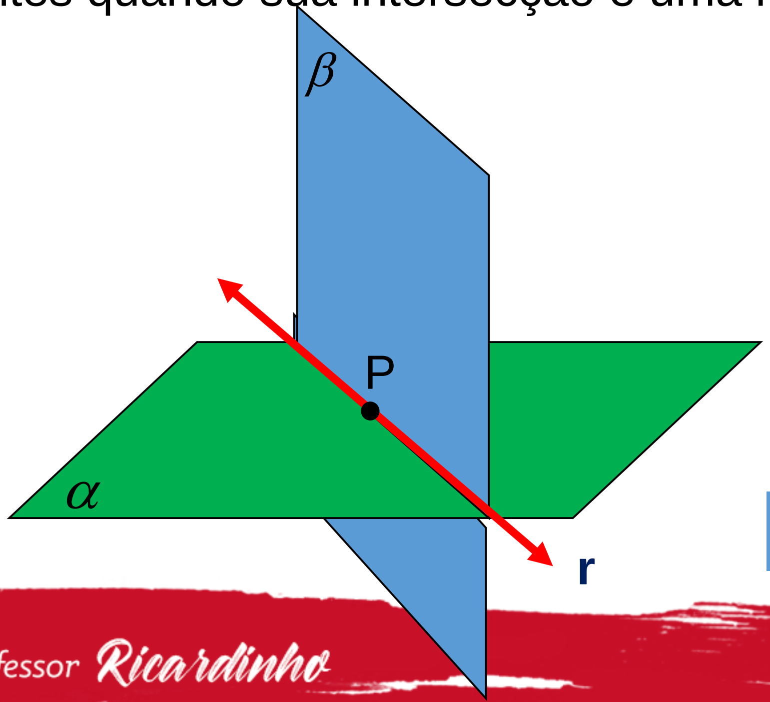
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DOIS PLANOS

Planos paralelos: dois planos são paralelos quando não possuem ponto em comum.



$\alpha \cap \beta = \varnothing$

Planos concorrentes: dois planos são concorrentes (secantes quando sua intersecção é uma reta.



$\alpha \cap \beta = r$

https://www.geogebra.org/m/fqJNPt5t

Universidade Estadual de Londrina

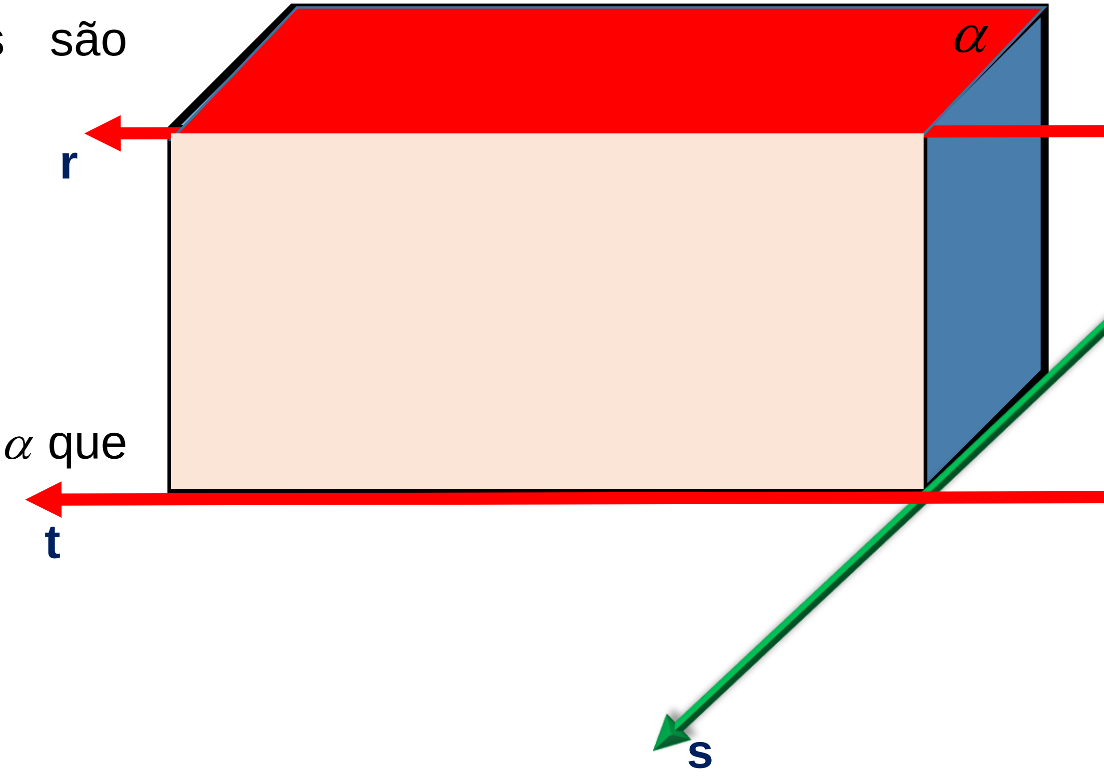
Sobre os conhecimentos de geometria tridimensional, considere as afirmativas:

I. Se duas retas distintas não são paralelas, então elas são concorrentes. **Falso. Elas podem ser reversas**

II. Três pontos distintos entre si determinam um único plano.
Falso. Faltou colocar não colineares

III. Duas retas paralelas distintas determinam um plano.
Verdadeiro

IV. Se duas retas *r* e *s* são reversas, então existe um único plano α que contém *r* e é paralelo a *s* .
Verdadeiro



A alternativa que contém todas as afirmativas corretas é:

a) I e II
b) I e IV
c) III e IV
d) I, II e III
e) II, III e IV

Nas afirmações seguintes, **r**, **s** e **t** representam retas no espaço, e α representa um plano no espaço. Some as afirmações corretas:

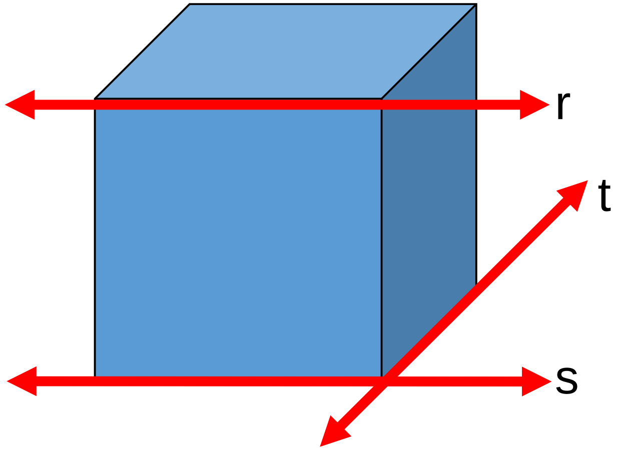
01. Se **r** é paralela a **s** e **s** intersecta **t**, então **r** necessariamente **intersecta t**. **FALSO**

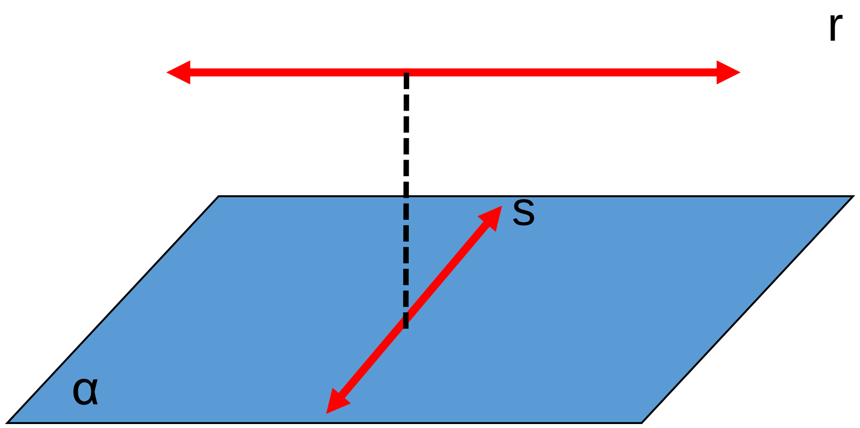
02. Se **r** é paralela a α, então as retas que pertencem a α são paralelas a **r**. **FALSO**

04. Se **r** é paralela a α, existem infinitas retas pertencentes a α que são paralelas a **r**.

08. Se **r** e **s** são paralelas a α, então r é necessariamente paralela a **s**.

16. Se **r** é perpendicular a **s** e **s** é perpendicular a **t**, então pode ocorrer que **r** seja perpendicular a **t**.





UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Nas afirmações seguintes, **r**, **s** e **t** representam retas no espaço, e α representa um plano no espaço. Some as afirmações corretas:

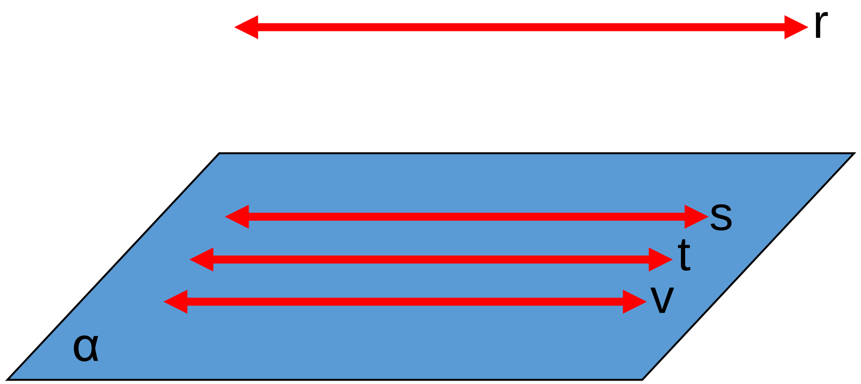
01. Se **r** é paralela a **s** e **s** intersecta **t**, então **r** necessariamente **intersecta** **t**. **FALSO**

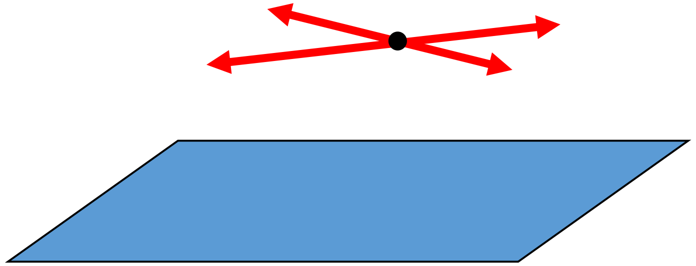
02. Se **r** é paralela a α, então as retas que pertencem a α são paralelas a **r**. **FALSO**

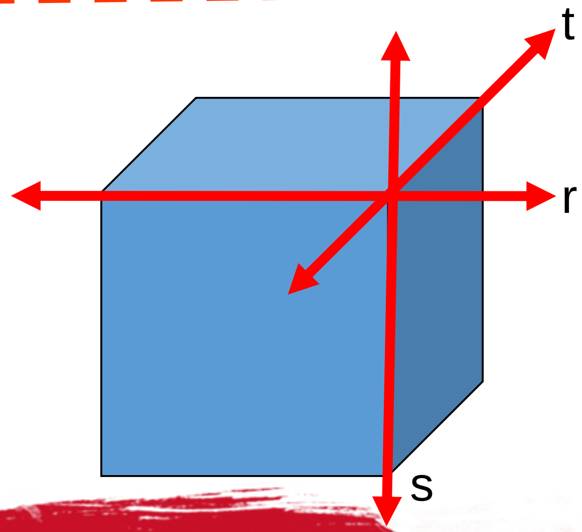
04. Se **r** é paralela a α, existem infinitas retas pertencentes a α que são paralelas a **r**. **VERDADEIRO**

08. Se **r** e **s** são paralelas a α, então r é necessariamente paralela a **s**. **FALSO**

16. Se **r** é perpendicular a **s** e **s** é perpendicular a **t**, então pode ocorrer que **r** seja perpendicular a **t**. **VERDADEIRO**

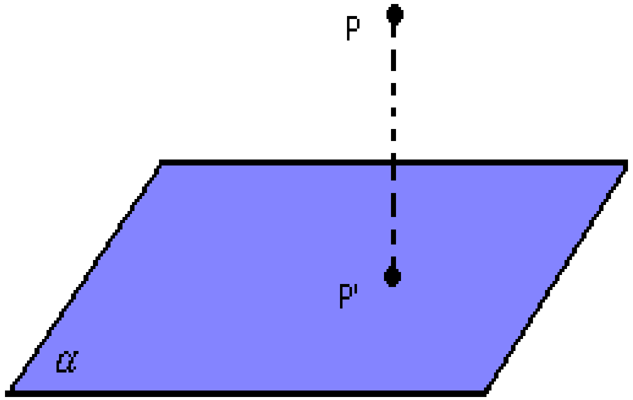


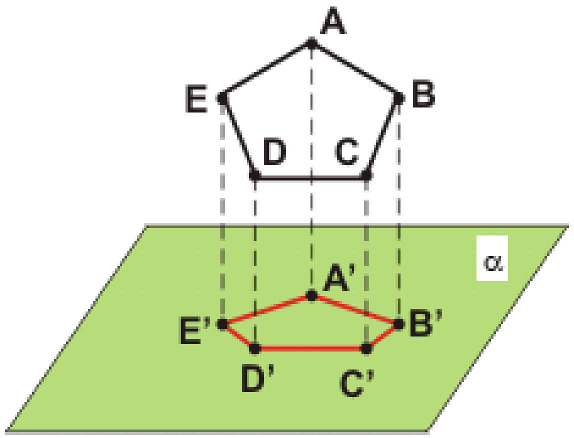


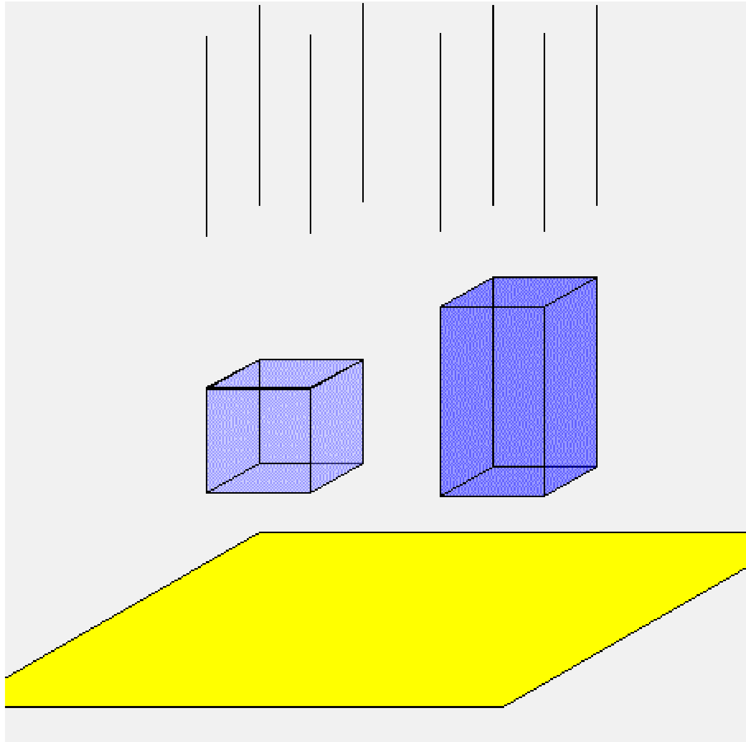


PROJEÇÕES SOBRE UM PLANO

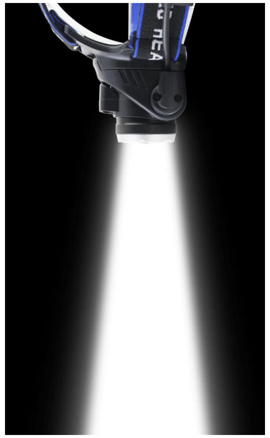
Considere um plano α (plano de projeção) e um ponto **P** qualquer. Seja **P´** o pé da perpendicular a α conduzida por **P**. O ponto **P´** é denominado *projeção ortogonal* de **P** sobre α, ou por convenção, projeção de **P** sobre α.

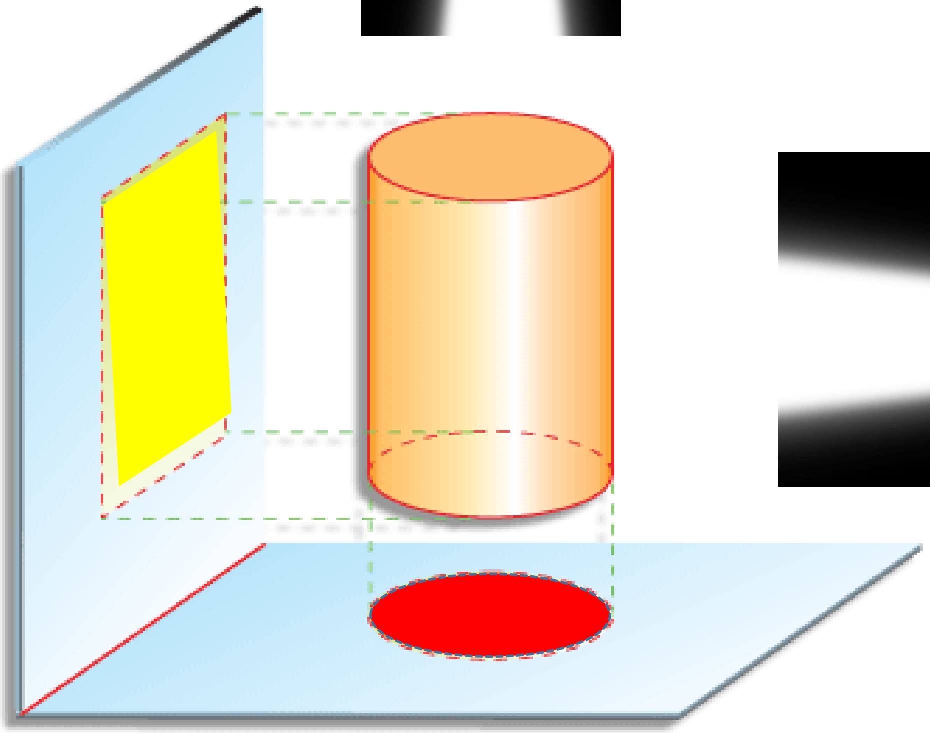


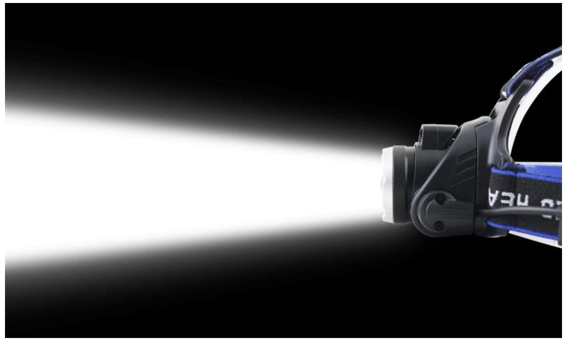




PROJEÇÕES SOBRE UM PLANO







De olho no Enem

enem
EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

Figura 1

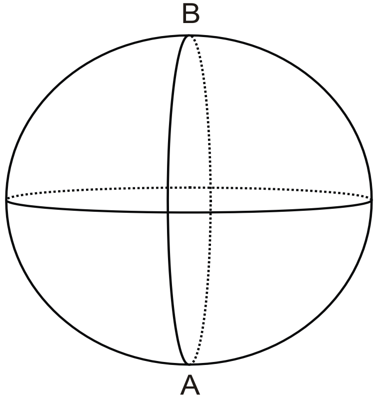
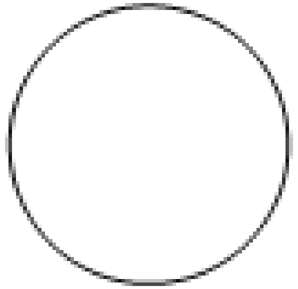


Figura 2

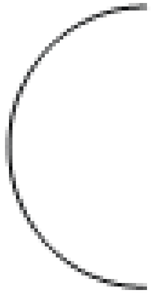
Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

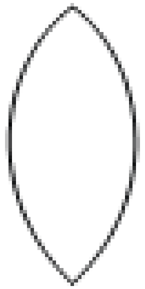
a)



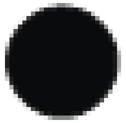
b)



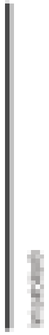
c)

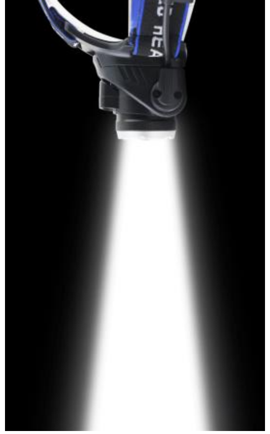


d)



e)





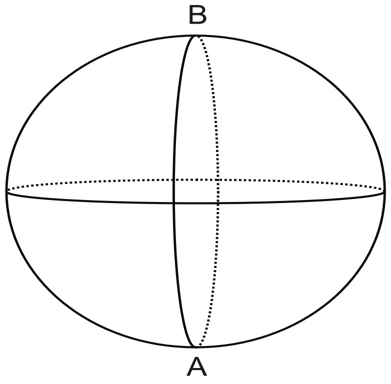
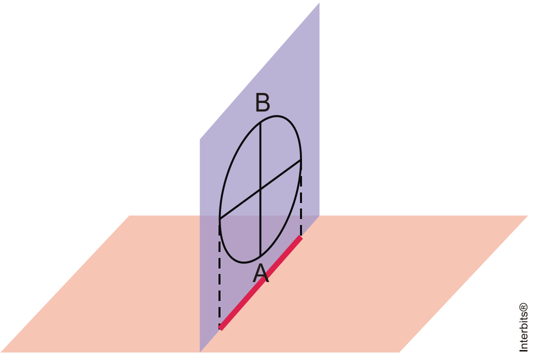
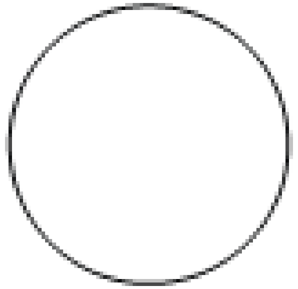


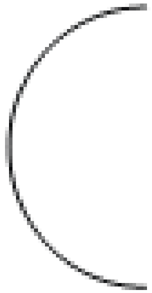
Figura 2



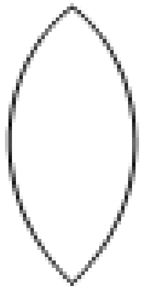
a)



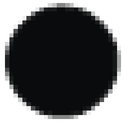
b)



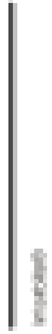
c)



d)



e)

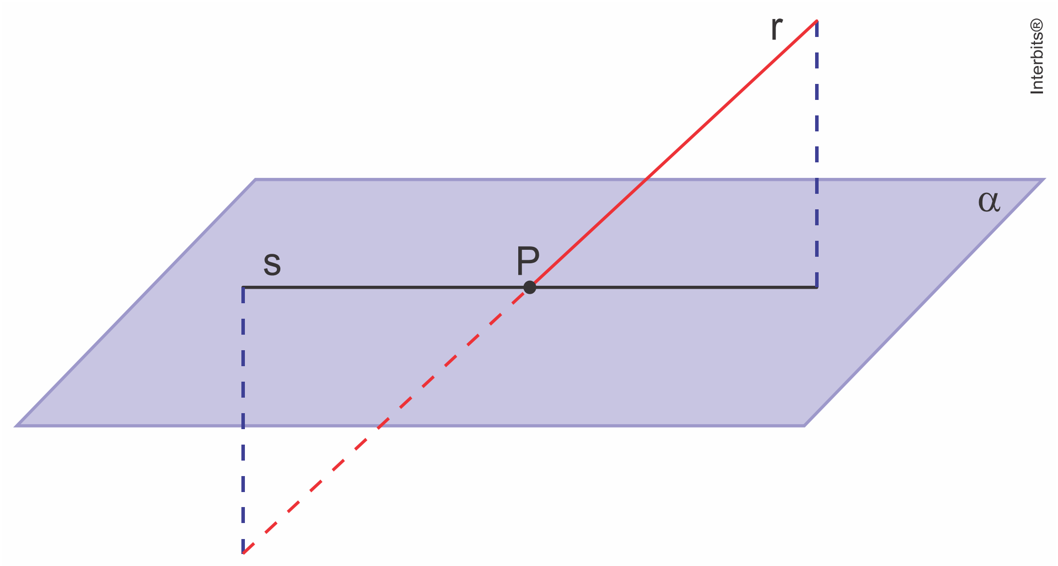


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SISTEMA ACAFE

(**F**) Se duas retas no espaço não têm ponto comum, então elas são paralelas distintas.

(**F**) Se a projeção ortogonal da reta r sobre o plano α é a reta s então a reta r é paralela ao plano α



(**F**) Se uma reta no espaço é paralela a dois planos simultaneamente então esses planos são paralelos

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

A soma das proposição(ões) CORRETA(S) é:

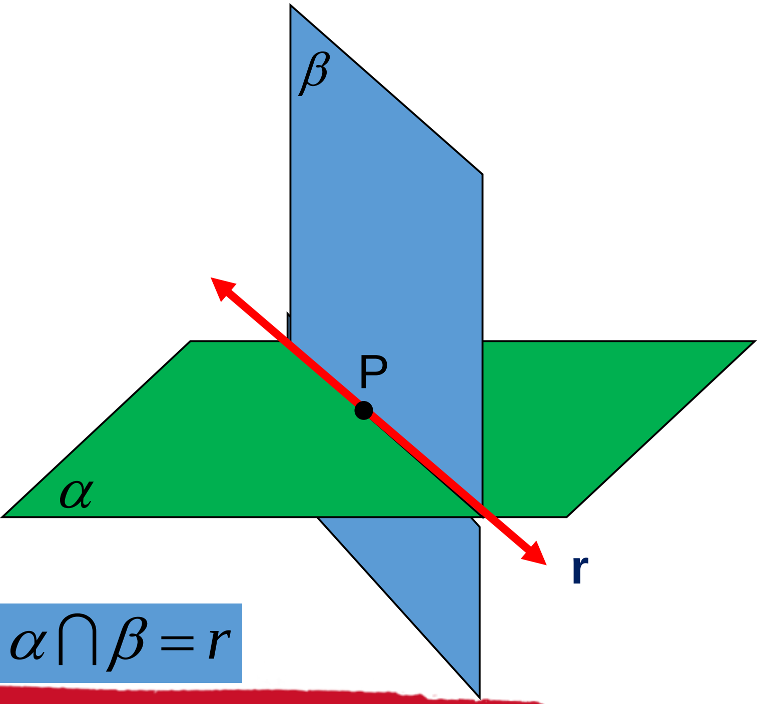
F 01) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.

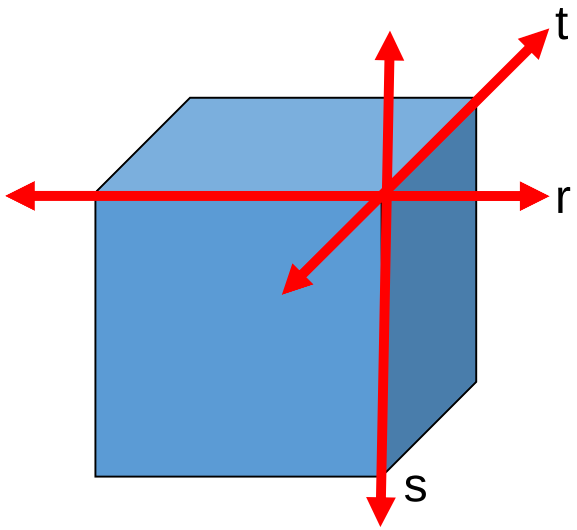
F 02) Se duas retas r e s, no espaço, são ambas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas.

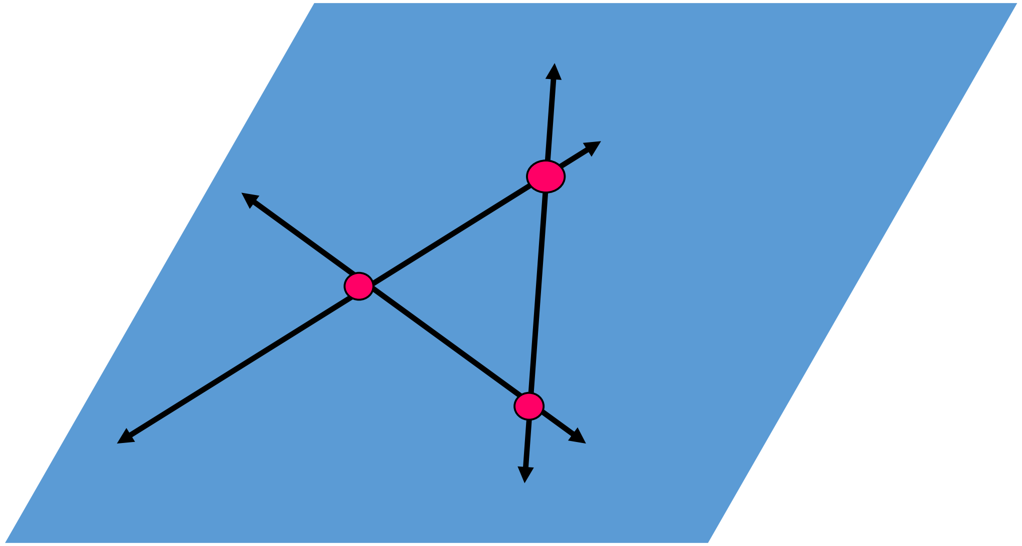
V 04) Duas retas concorrentes determinam um único plano.

08) Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então A e B são planos paralelos.

16) Se duas retas r e s são paralelas a um plano A, então r e s são paralelas.







A soma das proposição(ões) CORRETA(S) é:

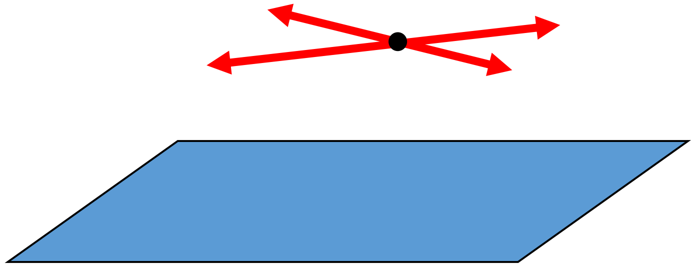
F 01) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.

F 02) Se duas retas r e s, no espaço, são ambas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas.

V 04) Duas retas concorrentes determinam um único plano.

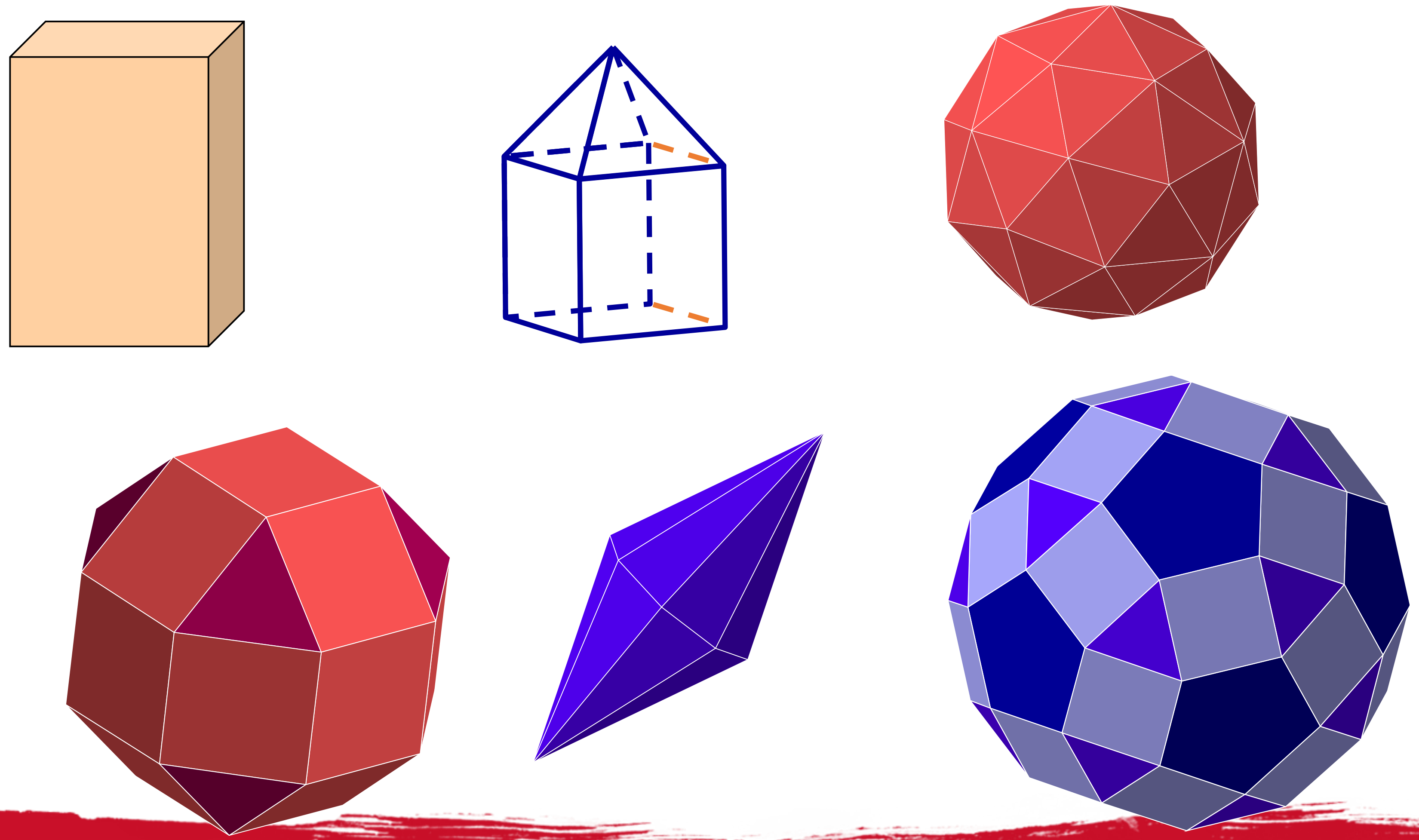
F 08) Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então A e B são planos paralelos.

F 16) Se duas retas r e s são paralelas a um plano A, então r e s são paralelas.

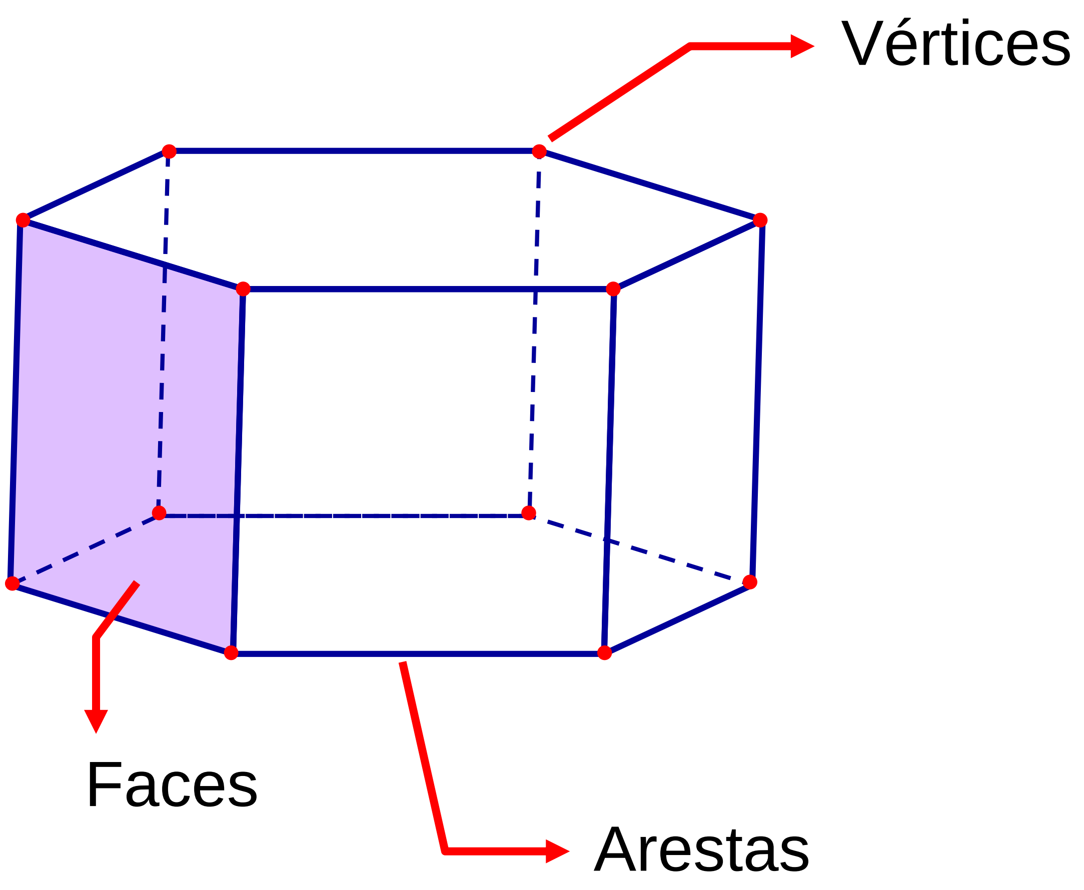


POLIEDROS

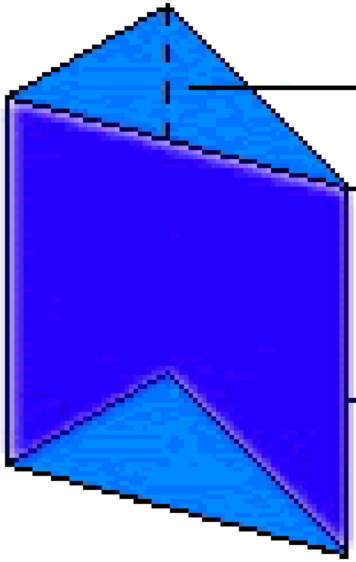
Sólidos geométricos limitados por polígonos.



Elementos do Poliedro



Relação de Euler

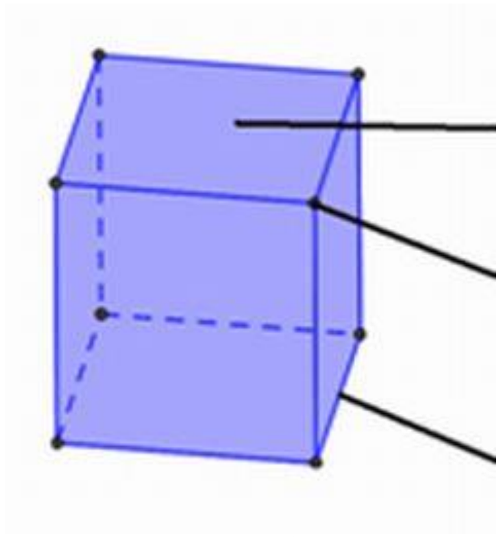


Faces (5)

Vértices (6)

Arestas (9)

$6 + 5 = 9 + 2$



Faces (6)

Vértices (8)

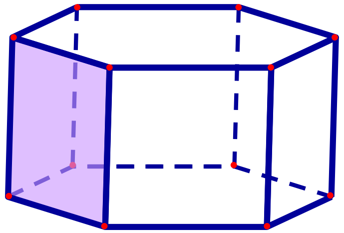
Arestas (12)

$8 + 6 = 12 + 2$

Relação de Euler

$$\boxed{V + F = A + 2}$$

Exercício 1: Qual a quantidade de vértices, arestas e faces de um poliedro limitado por seis faces quadrangulares e duas faces hexagonais?



$$
\begin{array}{r}
6F_4 \\
+ \quad 2F_6 \\
\hline
\end{array}
$$

$\boxed{F = 8}$

$$A = \frac{6(4) + 2(6)}{2}$$

$$A = \frac{24 + 12}{2}$$

$\boxed{A = 18}$

$$V + F = A + 2$$

$$V + 8 = 18 + 2$$

$\boxed{V = 12}$

Exercício 2: Um poliedro possui cinco faces triangulares, cinco faces quadrangulares e uma pentagonal. Determine o número de arestas, faces e vértices.

$$
\begin{array}{r}
5F_{(3)} \\
+ \quad 5F_{(4)} \\
1F_{(5)} \\
\hline
\end{array}
$$

$\boxed{F = 11}$

$$A = \frac{5(3) + 5(4) + 1(5)}{2}$$

$$A = \frac{15 + 20 + 5}{2}$$

$\boxed{A = 20}$

$$V + F = A + 2$$

$$V + 11 = 20 + 2$$

$\boxed{V = 11}$

Exercício 3: Um poliedro convexo possui 9 faces triangulares, 9 faces quadrangulares, 1 face pentagonal e 1 face hexagonal. Calculando-se o número de vértices, obtém-se:

$$9F_{(3)}$$
$$9F_{(4)}$$
$$1F_{(5)}$$
$$+\quad 1F_{(6)}$$

$$\boxed{F = 20}$$

$$A = \frac{9(3) + 9(4) + 1(5) + 1(6)}{2}$$

$$A = \frac{27+36+5+6}{2} \qquad \boxed{A = 37}$$

$$V + F = A + 2$$

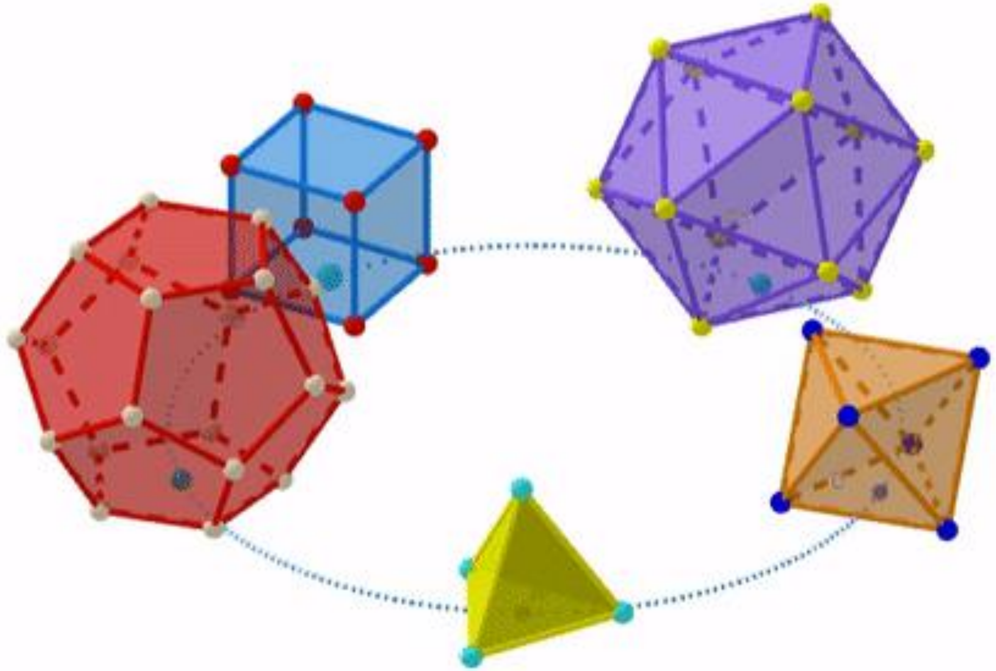
$$V + 20 = 37 + 2$$

$$\boxed{V = 19}$$

Poliedros Regulares

. Todas as faces são polígonos regulares iguais;

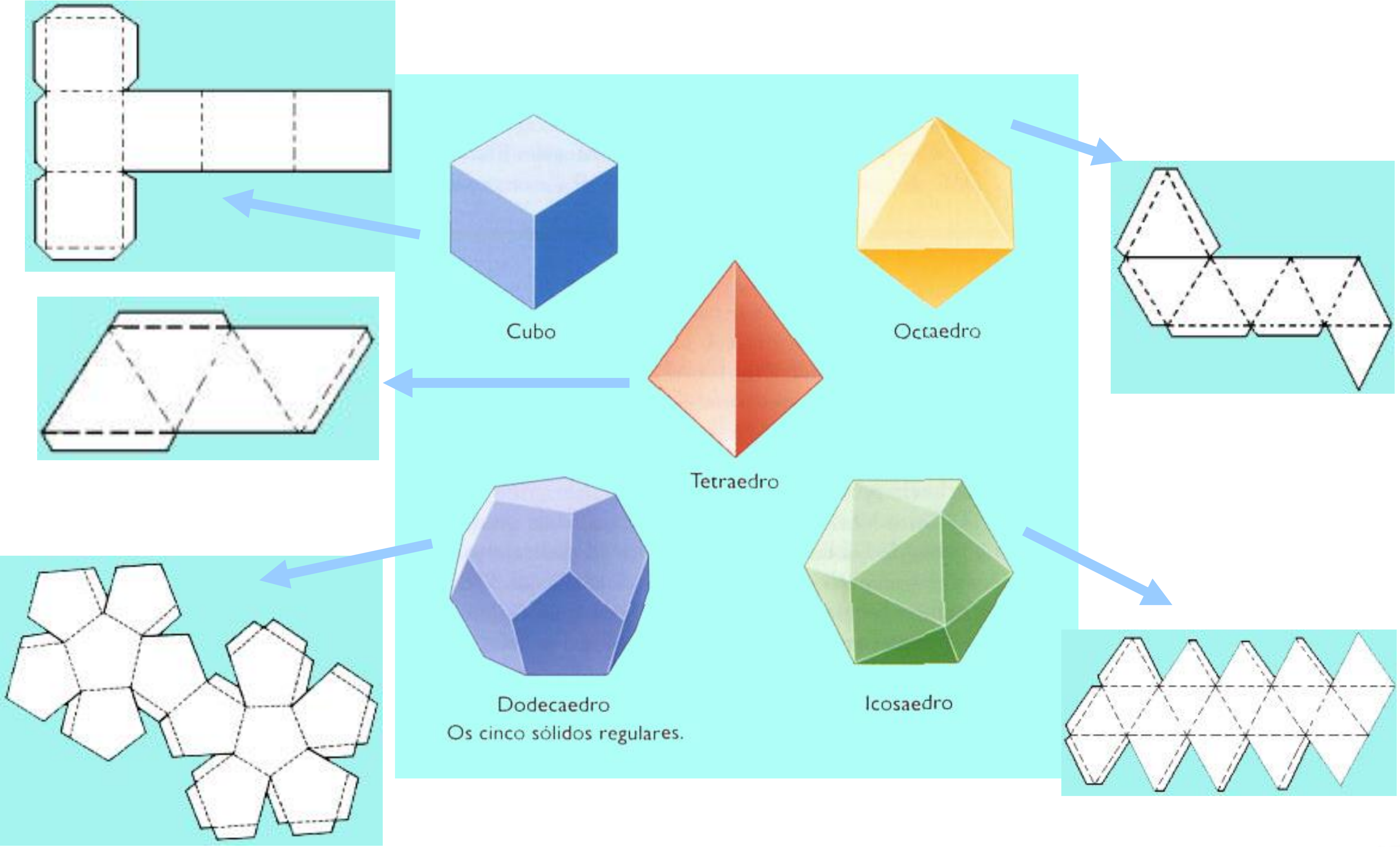
. Todos os ângulos poliédricos são iguais.



Poliedros Regulares

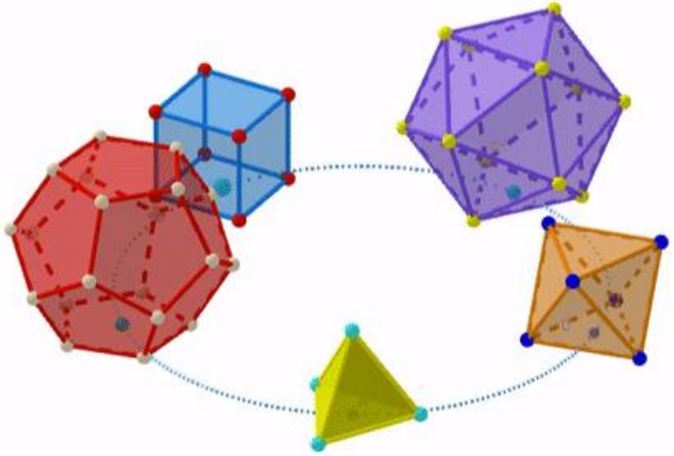
. Todas as faces são polígonos regulares iguais;

. Todos os ângulos poliédricos são iguais.



Poliedros Regulares

. Todas as faces são polígonos regulares iguais;
. Todos os ângulos poliédricos são iguais.



seis faces quadradas

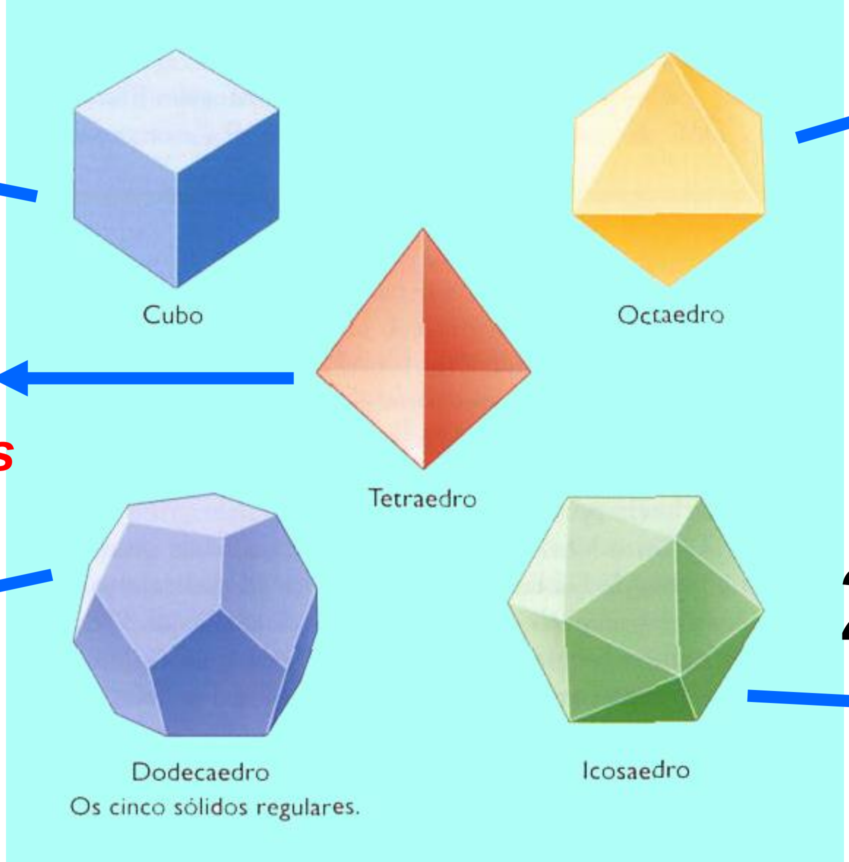
$6F_{(4)}$

oito faces triangulares

$8F_{(3)}$

quatro faces triangulares

$4F_{(3)}$



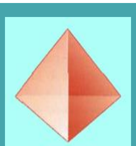
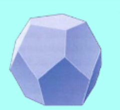
doze faces pentagonais

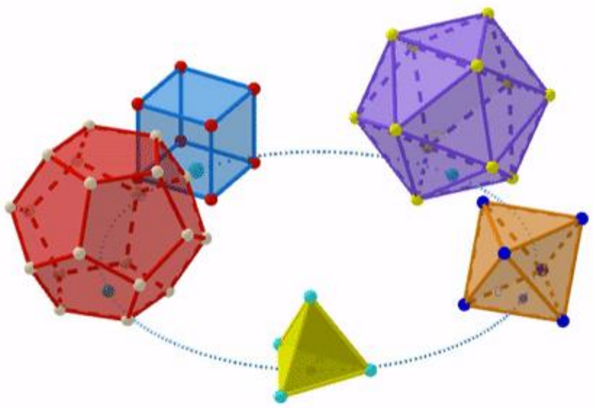
$12F_{(5)}$

$20F(3)$

vinte faces triangulares

V + F = A + 2

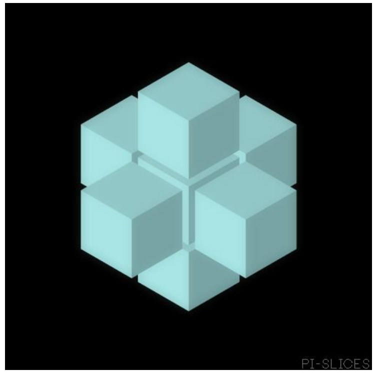
	V	F	A	2
 Tetraedro *TETRA* $4_{F(3)}$	4	4	6	2
 Cubo *HEXA* $6_{F(4)}$	8	6	12	2
 Octaedro *OCTA* $8_{F(3)}$	6	8	12	2
 Dodecaedro Os cinco sólidos regulares *DODE* $12_{F(5)}$	20	12	30	2
 Icosaedro *ICOSA* $20_{F(3)}$	12	20	30	2

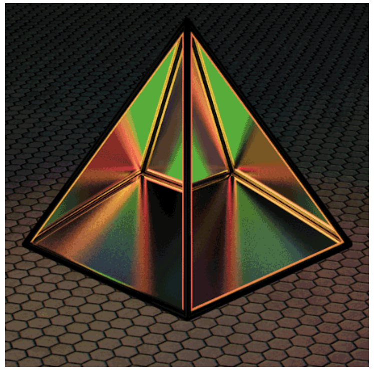


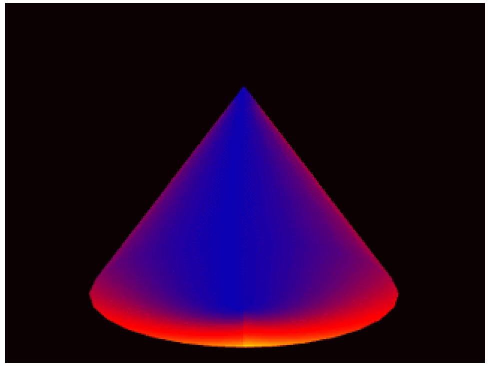
Setor B – Aulas 27 e 28

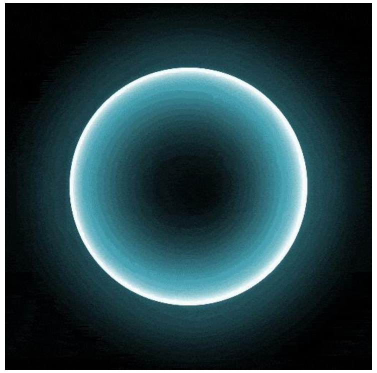
Introdução à Geometria Espacial

Poliedros – Sólidos de Revolução







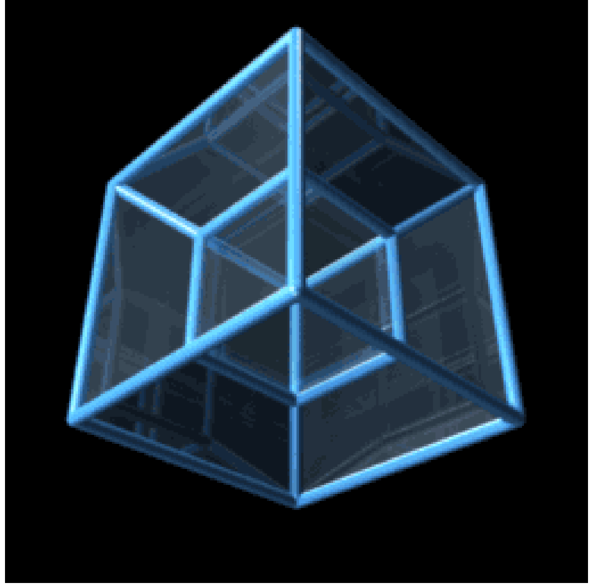


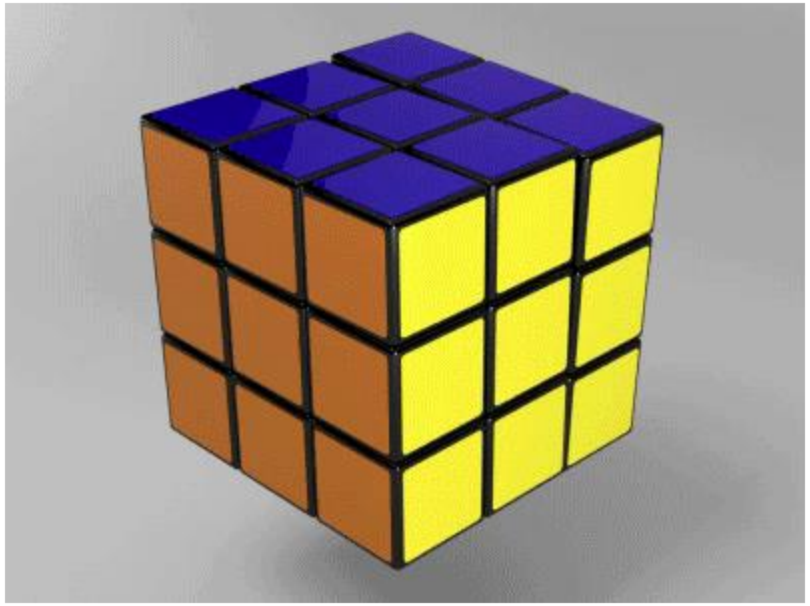
Objetos do curso

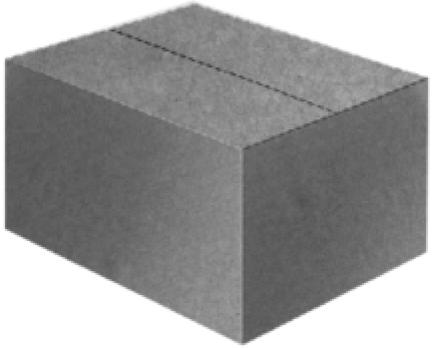
- **Prismas**
- **Pirâmides**
- **Pirâmides - Troncos**

Objetos do curso

- **Cilindros**
- **Cones**
- **Cones - Troncos**
- **Esferas**



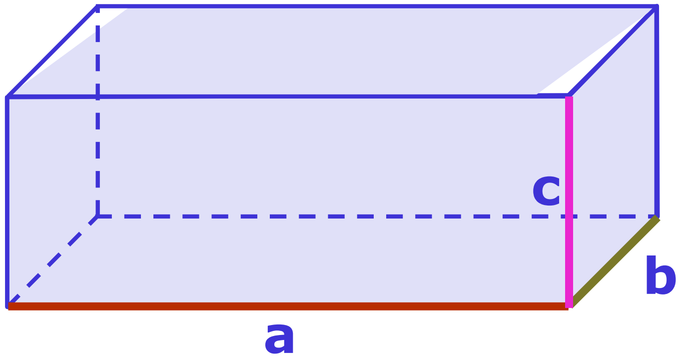


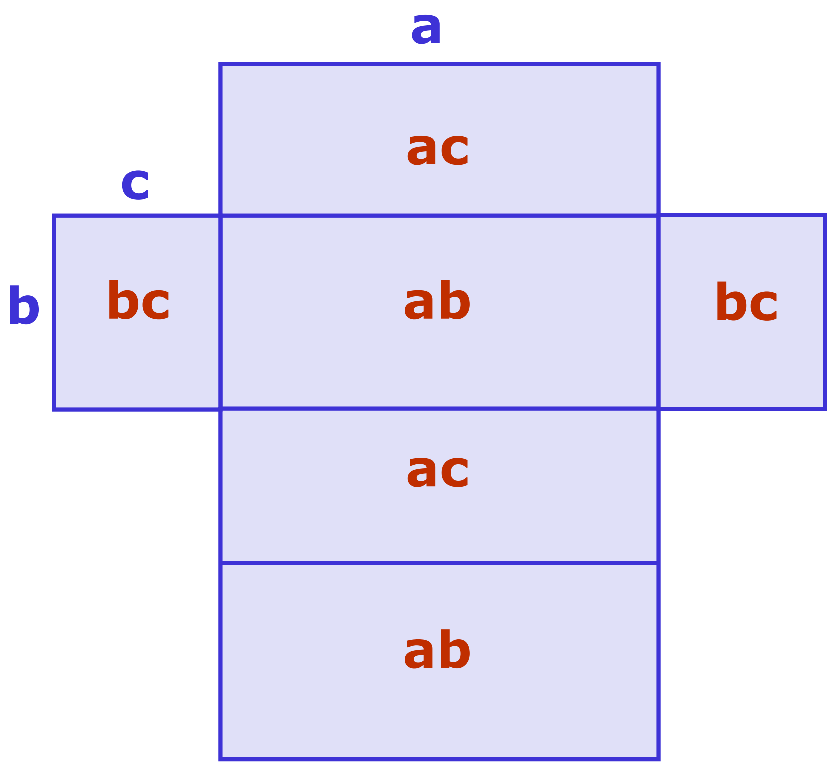


Prismas Especiais - Paralelepípedo

PARALELEPÍPEDO

a, b e c → dimensões





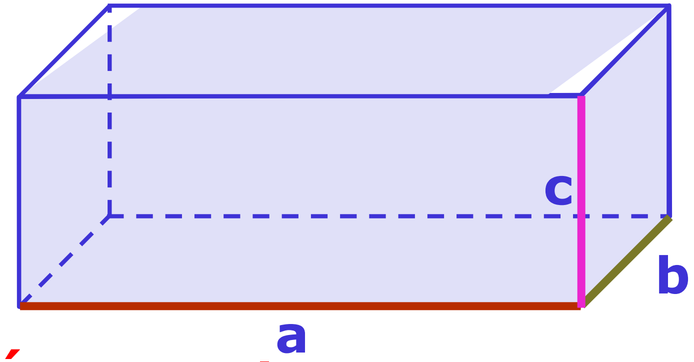
Área total

$$S_T = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\boxed{S_T = 2(ab + ac + bc)}$$

Prismas Especiais - Paralelepípedo

PARALELEPÍPEDO



Área total

$$S_T = 2(ab + ac + bc)$$

Diagonais

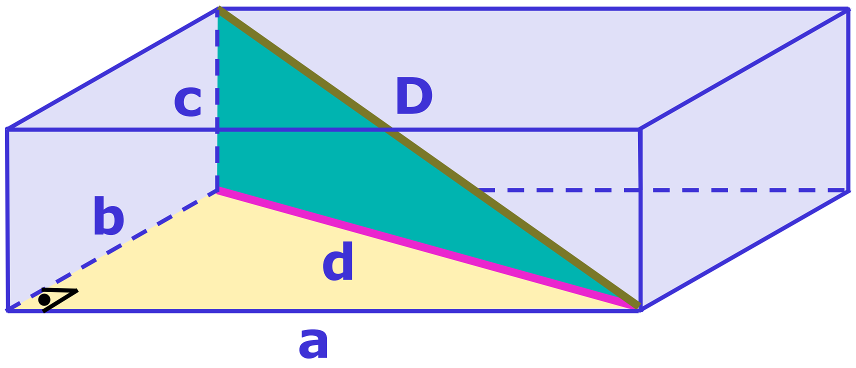
$d^2 = a^2 + b^2$

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Volume

$$V = S_B . H \Rightarrow V = abc$$

PARALELEPÍPEDO - Diagonais



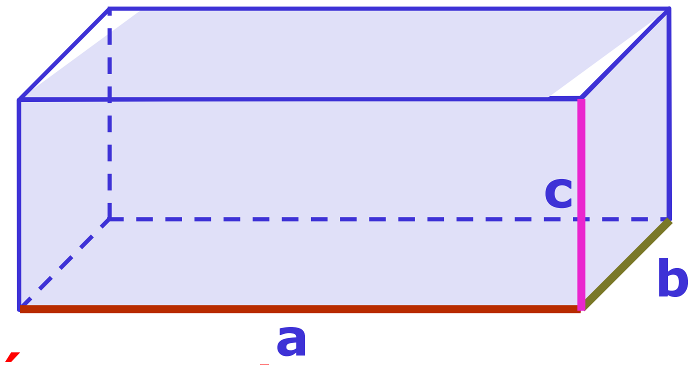
Importante!

1 cm³ - 1 mL

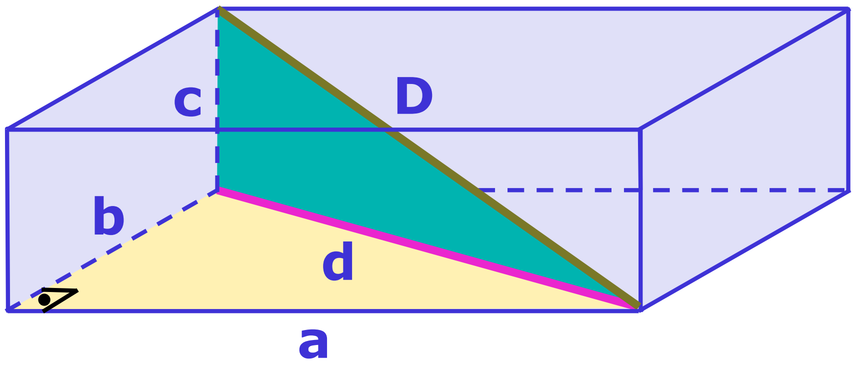
1 m³ - 1000 L

Prismas Especiais - Paralelepípedo

PARALELEPÍPEDO



PARALELEPÍPEDO - Diagonais



Área total

$$S_T = 2(ab + ac + bc)$$

Diagonais

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Volume

$$V = S_B.H \Rightarrow V = abc$$

Importante!

$1\ cm^3$ - 1 mL

$1\ m^3$ - 1000 L

Dicas importantes!

Soma das dimensões: $a + b + c$

Soma das arestas: $4a + 4b + 4c$

Dimensões em P.A.: $x – r, x, x + r$

Dimensões em P.G.: $x/q, x, xq$

UFSC

Exercício 1: A área total de um paralelepípedo reto retângulo é de 376 m² e as suas dimensões são proporcionais aos números 3, 4 e 5. Determine a décima parte do volume desse paralelepípedo. Depois, passe o resultado para o cartão resposta

$$\begin{cases} a = 3k = 6 \\ b = 4k = 8 \\ c = 5k = 10 \\ S_T = 376\ m^2 \end{cases}$$

$$\boxed{S_T = 2(ab + ac + bc)}$$

$$3\cancel{7}6 = \cancel{2}(3k.4k + 3k.5k + 4k.5k)$$

$$188 = 12k^2 + 15k^2 + 20k^2$$

$$188 = 47k^2$$

$$4 = k^2$$

$$\boxed{k = 2}$$

$$\boxed{V = a.b.c}$$

$$V = 6.8.10$$

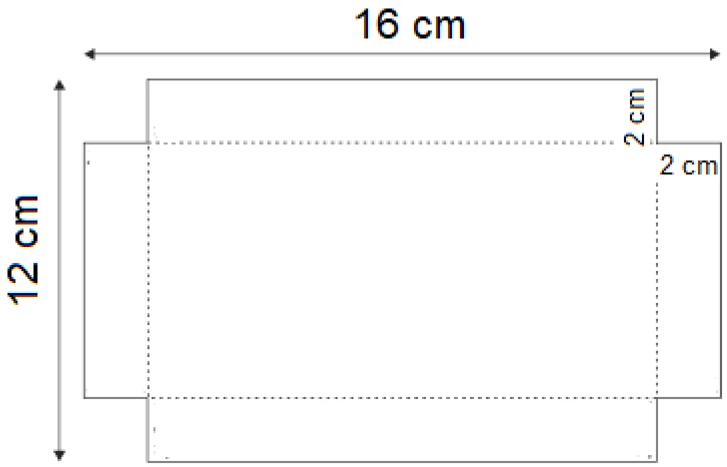
$$V = 480m^3$$

Décima parte do volume: 48

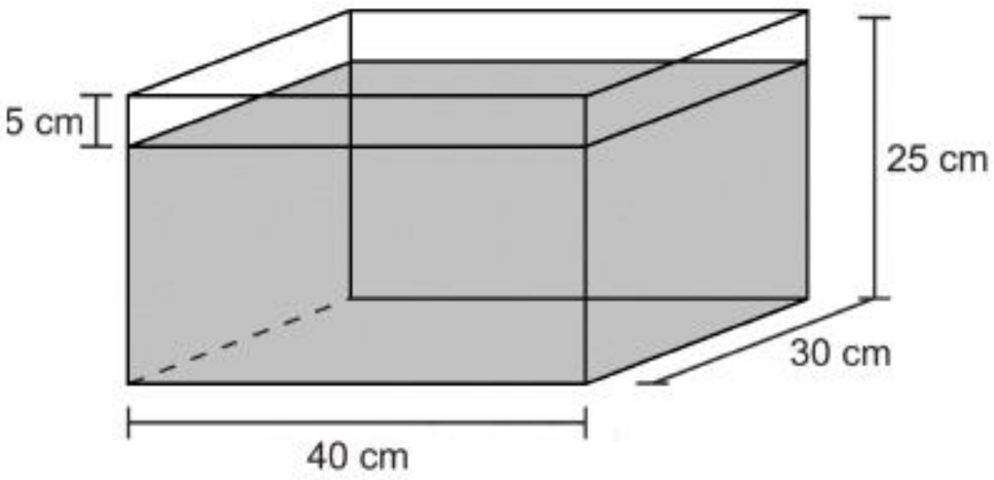
Professor Ricardinho

MATEMÁTICA X

Exercício 2: Usando um pedaço retangular de papelão, de dimensões 12cm e 16cm, desejo construir uma caixa sem tampa, cortando, em seus cantos, quadrados iguais de 2cm de lado e dobrando, convenientemente, a parte restante. A terça parte do volume da caixa, em cm^3, é:

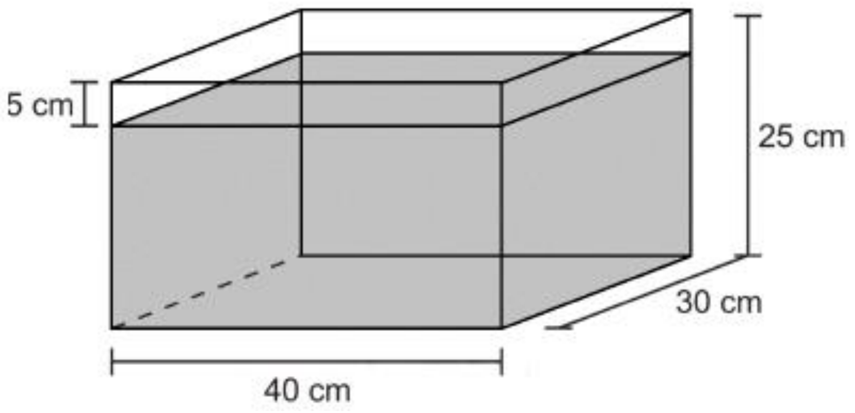


Exercício 3: Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostra a figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de $2.400\ cm^3$?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2.400 cm^3?

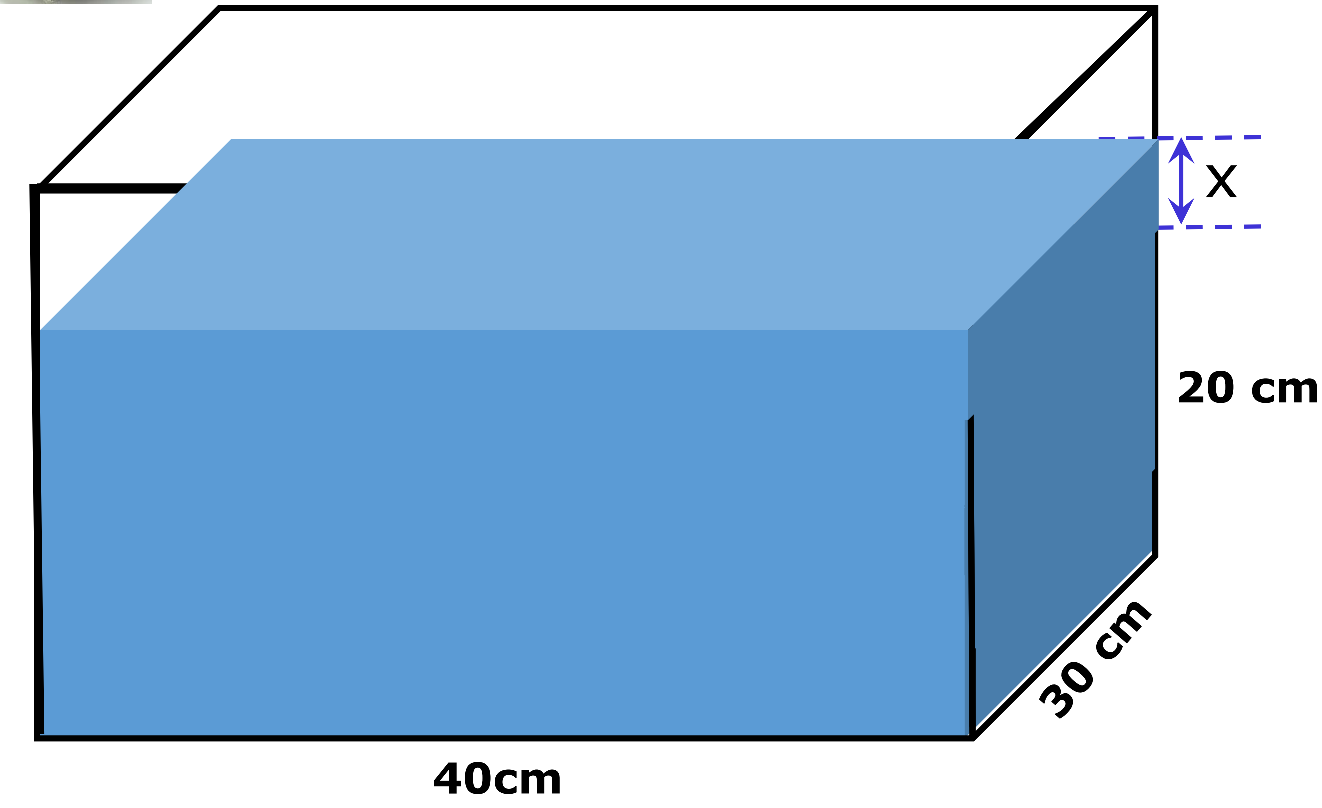
a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.



x

30 cm

40cm

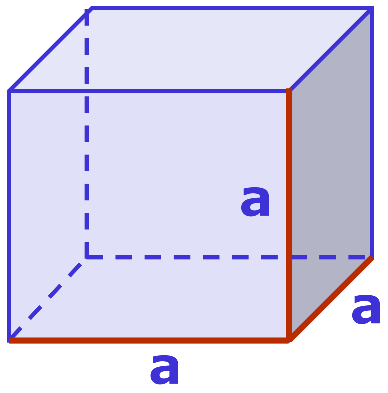
$$V_{cai} = V_{\text{líquido deslocado}}$$

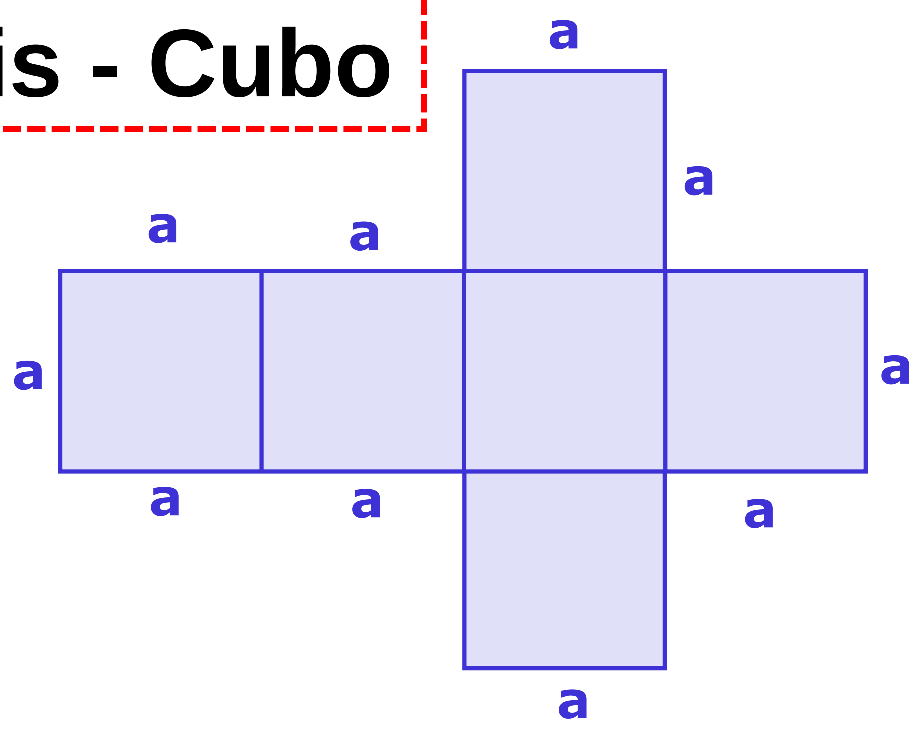
$$V_{pedra} = V_{\text{paralelepípedo deslocado}}$$

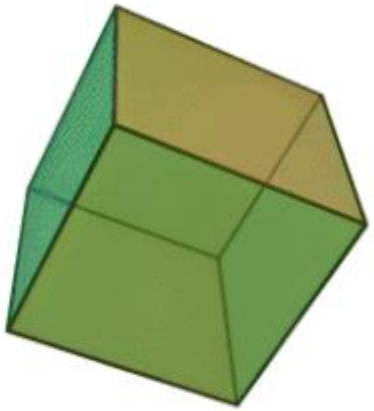
$$2400 = 40.30.x$$

$$\boxed{\Rightarrow x = 2cm}$$

Prismas Especiais - Cubo





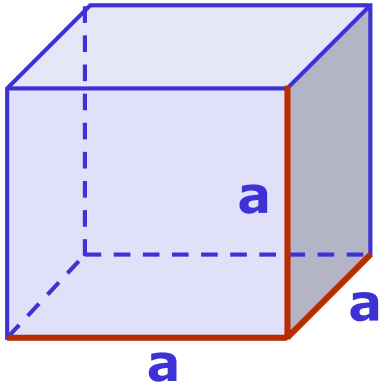


a → **medida de cada uma das arestas**

Área total

$$\boxed{S_T = 6a^2}$$

Prismas Especiais - Cubo



Área total

$$\boxed{S_T = 6a^2}$$

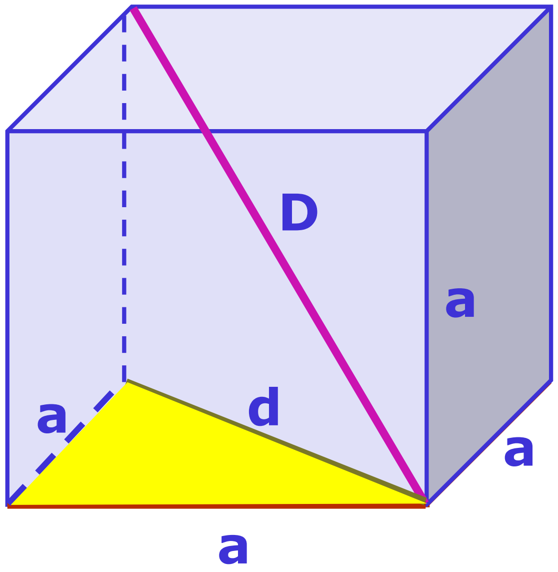
Diagonais

$$\boxed{\Rightarrow \quad d = a\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad D = a\sqrt{3}}$$

Volume

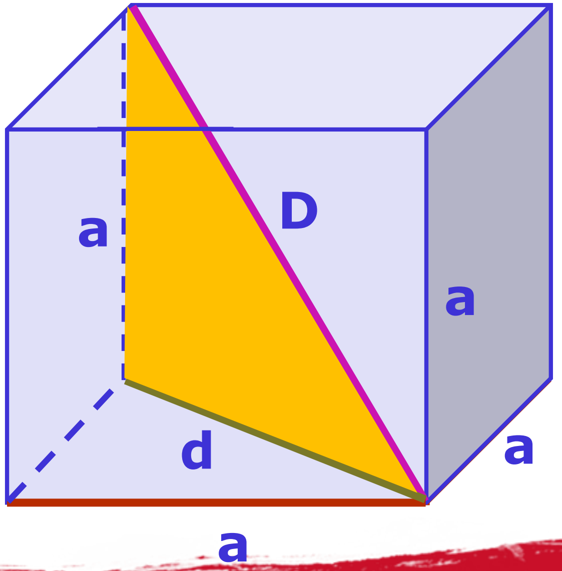
$$\boxed{V = a^3}$$



$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$\Rightarrow \quad d^2 = 2a^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad d = a\sqrt{2}}$$



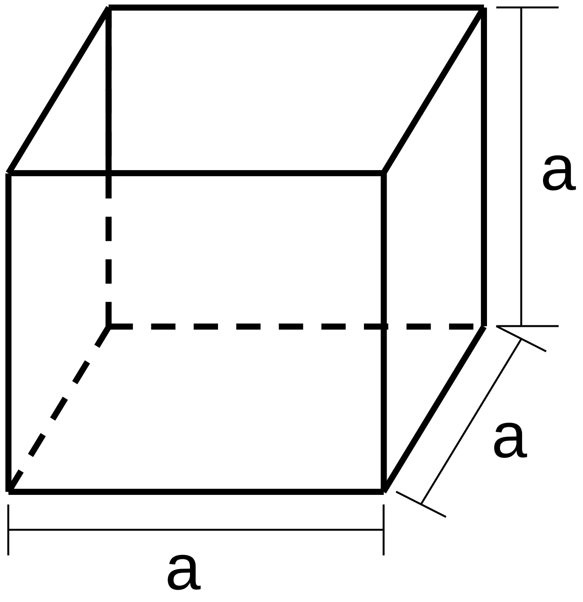
$$D^2 = a^2 + d^2$$

$$\Rightarrow \quad D^2 = a^2 + 2a^2$$

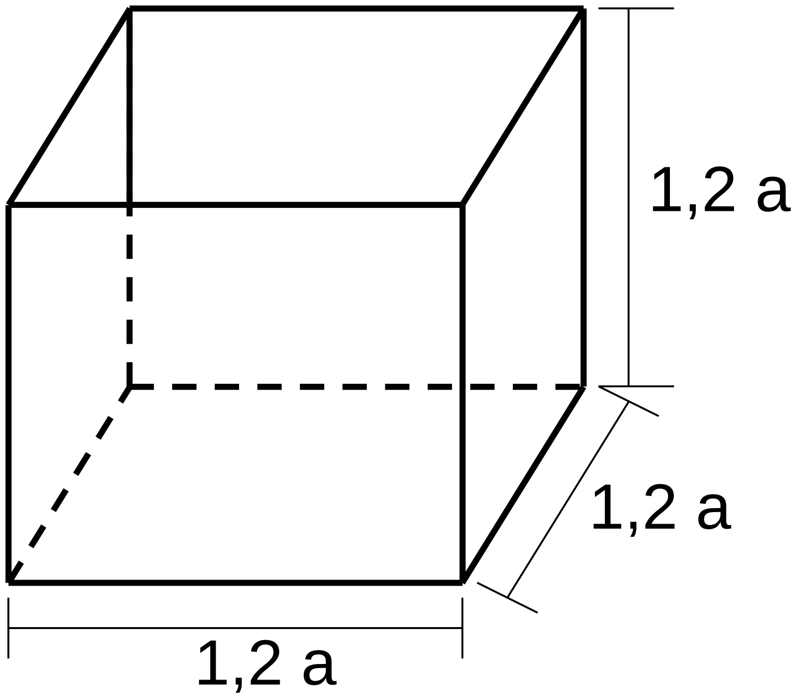
$$\Rightarrow \quad D^2 = 3a^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad D = a\sqrt{3}}$$

Exercício 4: **Se um cubo tem as suas arestas aumentadas em 20% cada uma, então o seu volume fica aumentado em:**



$\boxed{V = 1a^3}$



$V = (1,2a)^3$

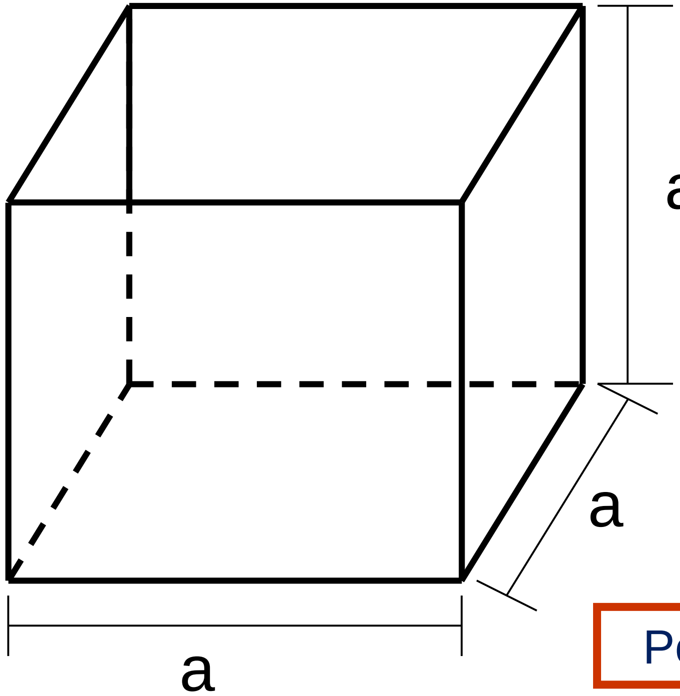
$\boxed{V = 1,728a^3}$

Portanto, o volume aumentado em 72,8%

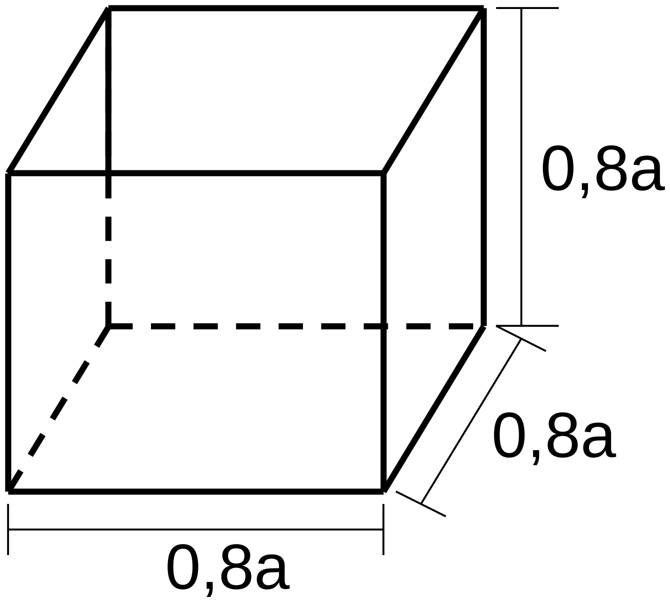
A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo "espaços vazios" que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a, diminui para um valor que é

a) 20% menor que V, uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.
b) 36% menor que V, porque a área da base diminui de a^2 para $[(1 – 0,2)a]^2$.
c) 48,8% menor que V, porque o volume diminui de a^3 para $(0,8a)^3$.
d) 51,2% menor que V, porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.
e) 60% menor que V, porque cada lado diminui 20%.



$V = 1a^3$



$V = (0,8a)^3$

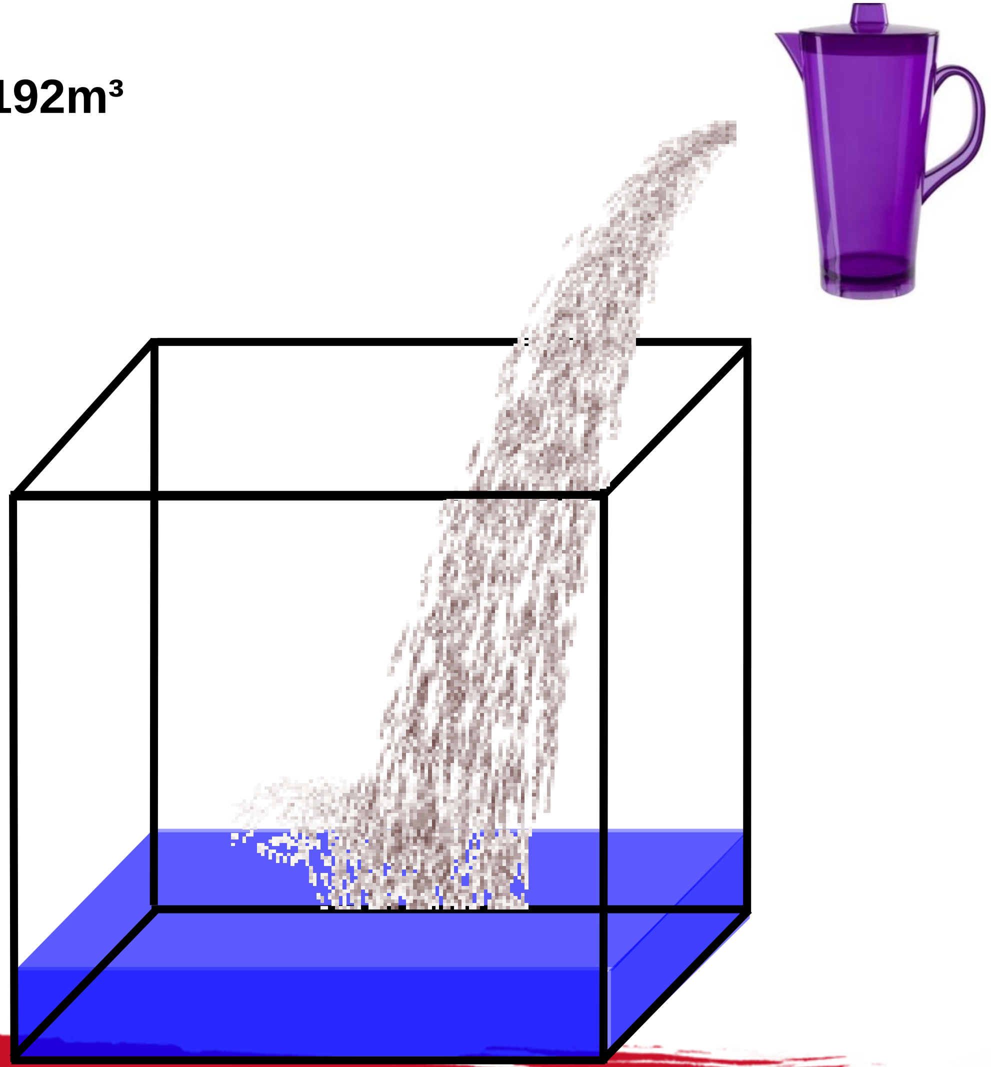
$V = 0,512a^3$

Portanto, o volume foi diminuído em 48,8%

Exercício 7: Ao colocar 192 litros de água em um reservatório cujo volume interior tem a forma de um cubo com uma das faces na horizontal, o nível da água sobe 30 cm. Qual é a dimensão desse reservatório?

192 litros = $0,192 m^3$

30 cm = 0,3m



192 litros

$$V = a.b.c$$

$$0,192 = x.x.0,3$$

$$0,64 = x^2$$

$$x = 0,8m = 8dm = 80cm$$

0,3

x

x

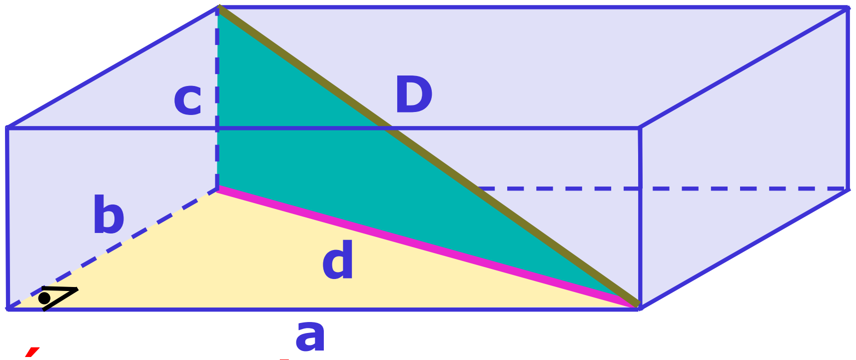
DE OLHO NO VESTIBULAR

UEPG
Universidade Estadual de Ponta Grossa

UFSC

Prismas Especiais - Paralelepípedo

PARALELEPÍPEDO



Área total

$$S_T = 2(ab + ac + bc)$$

Diagonais

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Volume

$$V = S_B . H \Rightarrow V = abc$$

Considere um paralelepípedo retangular com lados 6cm, 2cm e 3cm. A distância máxima entre dois vértices deste paralelepípedo é:

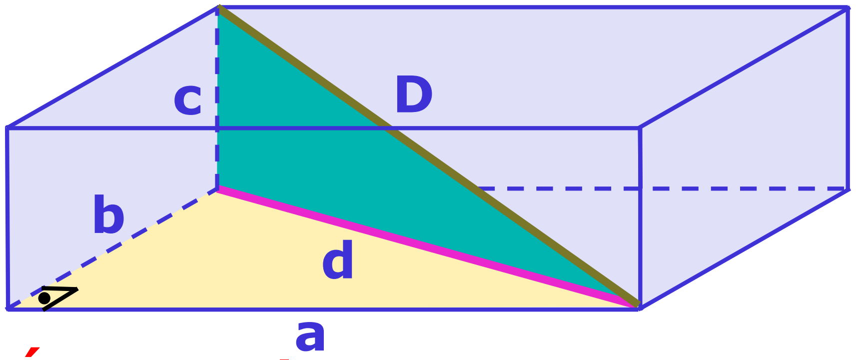
(UEPG – PR) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 1, 2 e 3 e sua área total é igual a 198cm². Sobre esse paralelepípedo, assinale o que for correto.

01. Seu volume vale 162cm³ .
02. As suas dimensões formam uma progressão aritmética.
04. A soma das medidas de todas as suas arestas é 72cm.
08. Sua diagonal é maior que 11cm.

(UFSC - SC) Num paralelepípedo retângulo, as medidas das arestas estão em progressão aritmética de razão 3. A medida, em CENTÍMETROS, da menor aresta desse paralelepípedo, sabendo que a área total mede 132 cm², é:

Prismas Especiais - Paralelepípedo

PARALELEPÍPEDO



Área total

$$S_T = 2(ab + ac + bc)$$

Diagonais

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Volume

$$V = S_B.H \Rightarrow V = abc$$

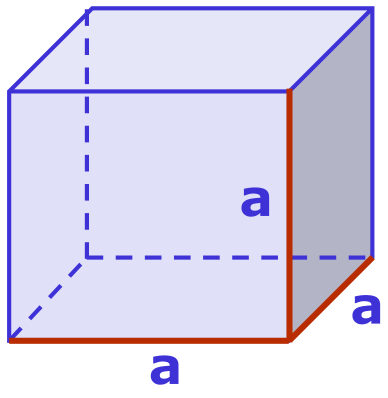
08) (UFSC – SC) Um tanque, em forma de paralelepípedo, tem por base um retângulo de lados 0,50m e 1,20m. Uma pedra, ao afundar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,01m. Então, o volume da pedra, em decímetros cúbicos, é:

(1m – 10dm)

DE OLHO NO ENEM

EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO
UM ENSAIO PARA A VIDA

Prismas Especiais - Cubo



Área total

$$S_T = 6a^2$$

Diagonais

$$\Rightarrow \quad d = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad D = a\sqrt{3}$$

Volume

$$V = a^3$$

(ENEM) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que tem o formato de cubo e igual a

a) 5 cm.
b) 6 cm.
c) 12 cm.
d) 24 cm.
e) 25 cm.