AULA 01

PROBABILIDADE (I) – DEFINIÇÕES INICIAIS

1. Conceitos Iniciais

Considere os seguintes experimentos:

1. Queda livre de um corpo;

2. Ebulição da água ao aquecê-la.

Nos experimentos acima podemos fazer previsão sobre a velocidade com que um corpo atingirá o solo, saber a que temperatura a água entra em ebulição. Esse tipo de experimento é denominado ***experimento determinístico***.

Um Experimento Determinístico é aquele cujo resultado pode ser determinado antes da sua realização.

Considere agora os experimentos:

1. Retirada de uma carta de um baralho;

2. Sorteio dos números da mega sena;

3. Lançamento de um dado.

Nesses experimentos, ao retirarmos por exemplo uma carta do baralho uma ou mais vezes, não podemos prever a carta obtida, sabemos apenas os possíveis resultados. Você não pode também determinar qual face de um dado ficará voltada para cima antes do lançamento do dado ou determinar quais números serão sorteados no próximo concurso da Mega Sena. Esse tipo de experimento é denominado ***experimento aleatório***.

Experimento Aleatório é todo experimento que realizado repetidas vezes sob as mesmas condições, apresenta resultados variados, impossibilitando uma previsão lógica do que vai acontecer.

1.1. Espaço Amostral

O *Espaço Amostral,* que simbolizaremos pela letra **U**, é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Representaremos o espaço amostral pela letra **U** e o seu número de elementos por **n(U)**.

Exemplos:

1) Veja que apesar de não podermos determinar que face ficará voltada para cima no lançamento de um dado, ainda assim podemos listar todos os possíveis resultados, ou seja, determinar o espaço amostral desse experimento.
Espaço amostral: $U=\{1,2,3,4,5,6\}$; n(U) = 6

2) No lançamento de uma moeda, o conjunto de todos os resultados possíveis é:
Espaço amostral: $U=\{cara,coroa\}$; n(U) = 2

3) Quando lançamos dois dados, um branco e um vermelho, qual o espaço amostral?
Vamos representar cada resultado como um par ordenado (B,V), onde o primeiro número do par representa o resultado do dado branco e o segundo do dado vermelho. Assim, por exemplo, o par (2,6) significa que ocorreu 2 na face do dado branco e 6 no dado vermelho. Assim, os elementos do espaço amostral são descritos abaixo:

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

1.2. Evento

Evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Representaremos o espaço amostral pela letra **A** e o seu número de elementos por **n(A)**.

Observe o exemplo:

Lançamos um dado e observamos a face voltada para cima. Já sabemos que o espaço amostral desse experimento é $U=\{1,2,3,4,5,6\}$. Suponha que estejamos interessados na:

a) Ocorrência de um número par.

Vamos descrever estes resultados que nos interessam através do conjunto $A=\{2,4,6\}$, que será chamado de Evento A. Note que A é subconjunto de **U**.

b) Ocorrência de um número primo.
Como no item anterior, temos aqui mais um evento, que chamaremos de evento B. Assim $B=\{2,3,5\}$

c) Ocorrência de um número maior do que 7.

Um evento desse tipo costuma ser chamado de *evento impossível* e é representado pelo conjunto vazio $\varnothing$.

d) Ocorrência de um número menor do que 10.

Vamos chamar este evento de C. É claro que $C=\{1,2,3,4,5,6\}$. Como este evento é igual ao espaço amostral, ele será chamado de *evento certo*.

d) Ocorrência de um número maior do que 5.
Temos aqui o evento $D=\{6\}$, formado por um único elemento. Eventos representados por conjuntos unitários são chamados de *eventos elementares.*

IMPORTANTE!

Evento união: é a reunião de dois eventos;
Evento intersecção: é a intersecção (elementos em comum) de dois ou mais eventos.

Ainda no exemplo anterior, considere os eventos:

5) E $\rightarrow$ocorrência de um número par
$\therefore$ E= {2, 4, 6}
6) F $\rightarrow$ ocorrência de um número primo
$\therefore$ F= {2, 3, 5}

Evento união: $E\cup F=\{2,3,4,6\}$
Evento intersecção: $E\cap F=\{2\}$

2. Conceito de Probabilidade

Não podemos prever com antecedência se determinado evento de um experimento aleatório vai ou não ocorrer. No entanto, podemos atribuir ao evento um número que represente a chance de sua ocorrência. Esse número é que será chamado de probabilidade.

Seja **A** o espaço amostral finito de um determinado experimento aleatório. Suponha que este espaço amostral seja *equiprovável*, isto é, que todos os eventos elementares (conjunto unitário), tenham iguais chances de ocorrer. Sendo assim, a *Probabilidade* de ocorrer um determinado evento **A**, que representamos por $P(A)$, é dada pela fórmula:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}}$$

em que n(U) representa o número de elementos do espaço amostral U.

A fórmula acima basicamente nos diz que uma probabilidade nada mais é do que o quociente entre o número de situações que nos interessam no experimento e o número de resultados possíveis do experimento, isto é,

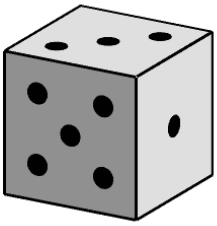
$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de casos que interessam}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Observações:

- $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$
- Quando P(A) = 1, dizemos que o evento é **certo.**
- Quando P(A) = 0, dizemos que o evento é impossível.
- É usual representarmos uma probabilidade na forma de porcentagem. Por exemplo: $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

Exercícios Resolvidos

1) No lançamento de um dado, qual a probabilidade de a face voltada para cima ser um número ímpar?



Solução:

a) Nesta experiência o espaço amostral é o conjunto U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, logo n(U) = 6.

b) O evento "sair número ímpar" é o conjunto A = {1, 3, 5}, logo n(A) = 3

c) A probabilidade de ocorrer o evento é $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Resposta: $P(A) = \frac{1}{2}$ ou $P(A) = 50\%$

2) Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis.

Se uma bola dessa urna é retirada ao acaso, qual a probabilidade de se obter uma bola azul?

Solução:

Espaço Amostral U: $\begin{cases} 6 \text{ bolas vermelhas} \\ 4 \text{ bolas azuis} \end{cases} \Rightarrow n(U) = 10$

Evento A: bola azul $\Rightarrow n(A) = 4$

A probabilidade de ocorrer o evento é $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Resposta: $P(A) = \frac{2}{5}$ ou $P(A) = 40\%$

3) De um baralho de 52 cartas extraímos uma carta. Qual a probabilidade de que a carta seja um rei, sabendo que ela é uma figura?

Solução:

Note que o espaço amostral desse experimento não é o conjunto das 52 cartas. Com a informação de que a carta é uma figura, o espaço amostral será formado pelas 12 figuras do baralho. Como existem 4 reis, a probabilidade será $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Probabilidades como essas são denominadas **probabilidades condicionadas** e será assunto do módulo 77.

3. Cálculo do número de elementos de um espaço amostral

Apesar de ser essencial termos em mente como são os elementos do espaço amostral de um experimento, em geral não faremos a listagem dos mesmos; nos preocuparemos mais em saber quantifica-los..

O número de elementos de um espaço amostral de um experimento pode ser calculado usando os conceitos vistos em análise combinatória. Observe os exemplos abaixo:

1) Calcule o número de elementos do espaço amostral correspondente ao números obtidos no lançamento de dois dados.

Resolução:
Lançando um mesmo dado duas vezes ou lançando dois dados diferentes, o espaço amostral será o mesmo

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Repare que se a intenção é definir apenas a quantidade de elementos poderíamos usar o princípio fundamental da contagem:

$\boxed{\underbrace{6}_{1^{\circ}\text{dado}} \cdot \underbrace{6}_{2^{\circ}\text{dado}} = 36}$ Logo n(U) = 36.

2) De um baralho de 52 cartas extraímos duas sucessivamente e sem reposição. Calcule a probabilidade de ambas serem valetes?

Resolução:

Eis aqui um exemplo onde "não é de bom senso" tentar listar os elementos do espaço amostral. Alguns deles são
$U = \{(3\text{copas}, 2\text{paus}); (6\text{ouro}, \text{dama espada}); (\text{rei paus}, 5\text{paus}); \ldots\}$
Veja que cada elemento do espaço consiste num grupo de duas cartas extraídas dentre as 52. Está claro também que a ordem em que as duas cartas são extraídas não tem a menor importância. Portanto, o total de casos possíveis é

$$n(U) = C_{52}^{2} = \frac{52!}{2!50!} = 1326$$

3) Determinar o número de elementos do espaço amostral relativo à escolha de um número de 2 algarismos distintos, formado a partir dos algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Resolução: A quantidade de números de 2 algarismos distintos que podemos formar a partir de 6 algarismos disponíveis é dada por um arranjo de 6 elementos tomados 2 a 2. Logo:

$A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$ Então $n(U) = 30$

4) Dê o número de elementos do espaço amostral relativo à escolha de um anagrama da palavra BOLA.

Resolução: A quantidade de anagramas que podemos formar com as letras da palavra BOLA é dada pela permutação das 4 letras, ou seja:

$P_4 = 4! = 24$ Então $n(U) = 24$

Exercícios Resolvidos

4) Uma comissão será formada por 3 pessoas sorteadas entre 5 homens e 4 mulheres. Escolhida uma comissão ao acaso, qual a probabilidade de nessa comissão terem apenas mulheres?

Solução:

a) Nesta experiência o espaço amostral é o total de comissões formadas por 3 pessoas a partir de 9 disponíveis, ou seja:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

logo n(U) = 84.

b) O evento "comissão só com mulheres" é dado por:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

logo n(A) = 4

c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Resposta: $P(A) = \frac{1}{21}$

5) Considere todos os números naturais de 3 algarismos distintos que se podem formar com os algarismos do conjunto $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Escolhendo um deles, aleatoriamente, qual é a probabilidade de sair um número múltiplo de 5?

Solução:

a) O espaço amostral é o total de números com 3 algarismos distintos formados a partir de K, ou seja:

$$\underline{?}\,\underline{?}\,\underline{?} \rightarrow A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 210$$

logo n(U) = 210.

b) O evento "número múltiplo de 5" é dado por:

$$\underline{?}\,\underline{?}\,\underline{5} \rightarrow A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$$

logo n(A) = 30

c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

Resposta: $P(A) = \frac{1}{7}$

3) Dois dados, um azul e outro vermelho, são lançados simultaneamente.

Qual a probabilidade de a soma das faces voltadas para cima ser maior do que 7?

Solução:

a) O espaço amostral pode ser dado pelo princípio fundamental da contagem:

$$\boxed{\underbrace{6}_{1^{\text{o}}\text{dado}} \cdot \underbrace{6}_{2^{\text{o}}\text{dado}} = 36}$$

Logo n(U) = 36.

Abaixo estão as 36 possibilidades:

Dado 1

Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b) O evento "soma maior do que 7" é dado analisando o quadro abaixo:

Dado 1

Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Veja que n(A) = 15

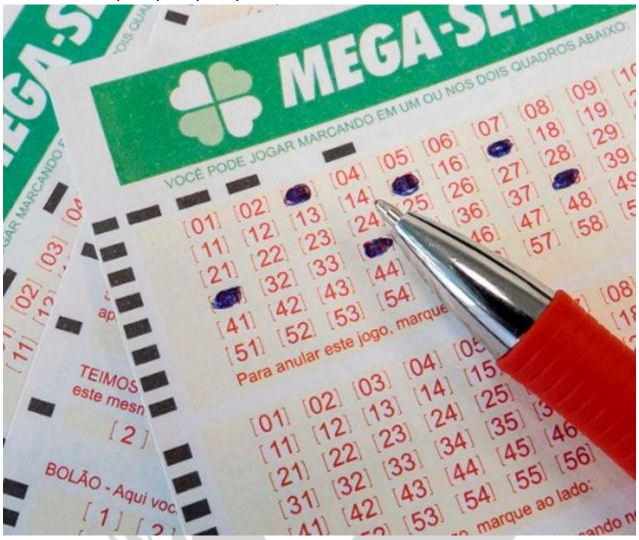
c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Resposta: $P(A) = \frac{5}{12}$

SAIBA MAIS!

Qual dos seguintes grupos de 6 números você acha mais "interessante" para jogar na Mega Sena: 02, 08, 21, 44, 56 e 59 ou 01, 02, 03, 04, 05 e 06?



Seguramente você jamais jogaria no segundo grupo, por achar totalmente improvável que esses números venham a ser sorteados. Para seu espanto, fique sabendo que do ponto de vista da matemática, a chance do primeiro grupo ser sorteado é exatamente igual à chance do segundo.

As chances da Mega Sena

Se alguém fizer a aposta mínima que custa hoje R$3,50 que chance tem de ganhar?

Solução:

a) Nesta experiência o espaço amostral é o total de combinações diferentes que podemos obter com 6 números a partir de 60 disponíveis, ou seja:

$$C_{60}^{6} = \frac{60!}{54!6!} = 50063860$$

logo n(U) = 50 063 860.

b) O ganhador acertará a mega sena se os seis números escolhidos por ele coincidirem com os seis números sorteados, sendo assim:

logo n(A) = 1;

c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{50063860} \cong 0{,}000002\%$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) (IFSUL – RS) De acordo com a revista *Veja*, “um em cada cinco adolescentes pratica *bullying* no Brasil”, violência caracterizada por agressões verbais ou físicas, intencionais, aplicadas repetidamente contra uma pessoa ou um grupo.
Com base em tais informações, afirma-se que a probabilidade de um adolescente praticar *bullying* no Brasil é de

a) 10%
b) 20%
c) 50%
d) 60%

02) (ENEM) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.
Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\dfrac{1}{100}$
b) $\dfrac{19}{100}$
c) $\dfrac{20}{100}$
d) $\dfrac{21}{100}$
e) $\dfrac{80}{100}$

03) (UEL – PR) No lançamento de disco, a abertura da gaiola é de aproximadamente 36°, como se pode observar na figura 14.

Figura 14: Gaiola de lançamento de disco

Durante o lançamento, acidentalmente, o disco escapa da mão do atleta. Supondo, para simplificar, que o movimento do braço do atleta ocorre num plano horizontal, então a probabilidade de o disco sair da gaiola é de:

a) 1/10
b) 1/8
c) 1/6
d) 1/4
e) 1/2

04) (ENEM) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

a) 8%.
b) 9%.
c) 11%.
d) 12%.
e) 22%.

05) (UEPG – PR) Assinale o que for correto.

01. A probabilidade de sair uma bola verde de uma urna com 6 bolas verdes e 5 pretas é superior a 50%.
02. Jogando dois dados, a probabilidade de saírem números iguais nas faces voltadas para cima é maior que 20%.
04. A probabilidade de sortear um múltiplo de 5 entre 30 cartões numerados de 1 a 30 é 20%.
08. A probabilidade de ganhar um prêmio num sorteio de 50 números tendo comprado dois deles é 4%.

Nível 2

06) (ENEM) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

07) (ACAFE – SC) Tomando-se ao acaso uma das diagonais formadas pelos vértices de um octógono regular, a probabilidade de que a diagonal passe pelo centro do octógono é de:

a) 50%.
b) 40%.
c) 20%.
d) 0%.

08) (UEL – PR) Um recipiente contém bolas numeradas de 1 a 50. Supondo que cada bola tenha a mesma probabilidade de ser escolhida, então a probabilidade de que uma bola sorteada tenha número múltiplo de 3 e de 4, simultaneamente, é de:

a) 8%
b) 10%
c) 15%
d) 28%
e) 36%

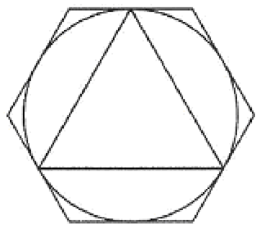
Nível 3

09) Qual é a probabilidade de, escolhendo ao acaso 2 vértices de um cubo, obtermos exatamente os vértices pertencentes a uma mesma aresta?

10) Algumas diagonais do decágono regular passam pelo seu centro e outras não. Sendo assim, escolhendo-se ao acaso uma diagonal desse polígono, qual é a probabilidade de ela não passar pelo centro do decágono?

a) 6/7 b) 1/2 c) 3/4 d) 3/5 e) 1/7

11) (UFRGS – RS) Observe a figura abaixo



Na figura, um triângulo equilátero está inscrito em um círculo, e um hexágono regular está circunscrito ao mesmo círculo, Quando se lança um dardo aleatoriamente, ele atinge o desenho. A probabilidade de que o dardo não tenha atingido a região triangular é:

a) 32,5%
b) 40%
c) 62,5%
d) 75%
e) 82,5%

12) (UFRGS – RS) Considere as retas r e s, paralelas entre si. Sobre a reta r, marcam-se 3 pontos distintos: A, B e C; sobre a reta s, marcam-se dois pontos distintos: D e E. Escolhendo ao acaso um polígono cujos vértices coincidam com alguns desses pontos, a probabilidade de que o polígono escolhido seja um quadrilátero é de

a) $\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{3}{4}$.

GABARITO – AULA 01

1) b	**2)** c	**3)** a	**4)** c	**5)** 13	**6)** d	**7)** c
8) a	**9) 3/7**	**10)** a	**11)** c	**12)** a		

AULA 02

PROBABILIDADE (II) – PROBABILIDADE DA UNIÃO DE 2 EVENTOS

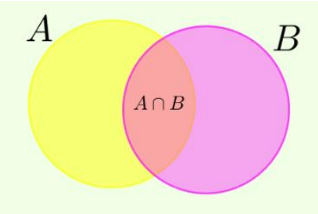
Probabilidade da união de dois eventos

Sejam **A** e **B** eventos quaisquer de um espaço amostral **S**. Temos que:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Justificativa:

Considere os conjuntos **A**, **B** e **U.**



Sabemos que: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

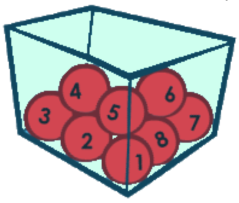
Dividindo a expressão anterior por $n(U)$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

Então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercícios Resolvidos:

1) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 15. Sorteando-se uma das bolas, qual é a probabilidade de sair um número par ou um número múltiplo de 3?



Resolução:

O espaço amostral é $U = \{1,2,3,4,5,......15\} \to n(U) = 15$

Eventos:

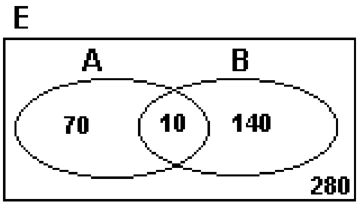
- Ocorrência de um número par: $A = \{2,4,6,8,10,12,14\} \to n(A) = 7$
- Ocorrência de um múltiplo de 3: $B = \{3,6,9,12,15\} \to n(A) = 5$
- $A \cap B = \{6,12\} \to n(A \cap B) = 2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{7}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15}$$
$$P(A \cup B) = \frac{10}{15}$$
$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

2) Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam engenharia, 150 estudam economia e 10 estudam engenharia e economia. Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que ele estude economia ou engenharia?

Solução:

Vamos chamar de A ao evento "estudar engenharia" e de B ao evento "estudar economia". Recorrendo aos diagramas da teoria dos conjuntos podemos organizar o seguinte esquema:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{80}{500} + \frac{150}{500} - \frac{10}{500}$$
$$P(A \cup B) = \frac{220}{500} = \frac{11}{25}$$

Observação: Dois eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos quando não possuem elementos em comum, ou seja: Se $A \cap B = \varnothing$.
Nesse caso temos que: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

3) No lançamento de um dado qual a probabilidade de ocorrer um número maior ou igual a 5 ou um número menor que 3?

Resolução:

Nesse caso o espaço amostral é: $U = \{1,2,3,4,5,6\} \to n(U) = 6$

- Ocorrência de um número maior ou igual a 5: $A = \{5,6\} \to n(A) = 2$
- Ocorrência de um número menor do que 3 : $B = \{1,2\} \to n(B) = 2$
- $A \cap B = \varnothing \to$ A e B são eventos mutuamente exclusivos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\downarrow}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - 0$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

SAIBA MAIS!

Quantas ...?

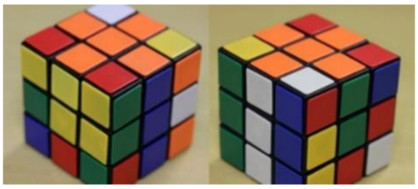
- Maneiras existem de rearrumar as 26 letras do alfabeto?

Resposta: 403.291.461.126.605.635.584.000.000

- Maneiras existem de embaralhar um maço de cartas?

Resposta:
80.658.175.170.943.878.571.660.636.856.403.766.975.289.
505.440.883.277.824.000.000.000.000

- Posições diferentes pode ter um cubo mágico?



Resposta:
43.252.003.274.489.856.000

- Configurações diferentes pode ter um jogo de sudoku?

Resposta:
6.670.903.752.021.072.936.960
(Calculado por Bertram Felgenhauer e Frazer Jarvis, em 2005)
(Almanaque das curiosidades matemáticas)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. A probabilidade de o bilhete sorteado ser um número maior que 40 ou número par é:

a) 60%
b) 70%
c) 80%
d) 90%
e) 50%

02) (UEL – PR) O filme Jumanji (1995) é uma obra de ficção que retrata a história de um jogo de tabuleiro mágico que empresta seu nome ao longa-metragem. O jogo é composto de dois dados distinguíveis de 6 lados, um tabuleiro com um visor de cristal no centro e peças que representam cada jogador. No filme, Alan Parrish é um garoto que encontra o jogo em um local de construção e o leva para casa. Assim que chega, Alan convida Sarah Whittle, uma garota da vizinhança, para jogar. Quando Alan lança os dados, aparece no visor a seguinte mensagem:

Adaptado de google.com.br

Alan então é sugado pelo visor de cristal e transportado magicamente até a selva de Jumanji.
Supondo que os dois dados do jogo sejam independentes e honestos, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a probabilidade de algum jogador lançar os dois dados e obter a soma de 5 ou 8, de modo a tirar Alan da selva.

a) 15%
b) 22%
c) 25%
d) 62%
e) 66%

03) Em um grupo de 100 pessoas, 60 são leitoras do jornal A, 50 são leitoras do jornal B e 30 são leitoras de ambos os jornais. Escolhendo-se uma pessoa ao acaso, a probabilidade de essa pessoa ser leitora do jornal A ou do jornal B é:

Nível 2

04) (UEL – PR) De um total de 500 estudantes da área de exatas, 200 estudam Cálculo Diferencial e 180 estudam Álgebra Linear. Esses dados incluem 130 estudantes que estudam ambas as disciplinas. Qual é a probabilidade de que um estudante escolhido aleatoriamente esteja estudando Cálculo Diferencial ou Álgebra Linear?

a) 0,26
b) 0,50
c) 0,62
d) 0,76
e) 0,80

05) (ENEM) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.
Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{5}{8}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{5}{6}$
e) $\frac{5}{14}$

06) (IFAL – AL) Em um certo grupo de pessoas, 40 falam inglês, 32 falam espanhol, 20 falam francês, 12 falam inglês e espanhol, 8 falam inglês e francês, 6 falam espanhol e francês, 2 falam as 3 línguas e 12 não falam nenhuma das línguas. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa desse grupo, qual a probabilidade de essa pessoa falar espanhol ou francês?

a) 7,5%.
b) 40%.
c) 50%.
d) 57,5%.
e) 67,5%.

07) (UEPG – PR) Em um grupo de 500 estudantes, 90 estudam Química, 160 estudam Biologia e 20 estudam Química e Biologia. Se um aluno é escolhido ao acaso, assinale o que for correto.

01) A probabilidade de que ele estude Química ou Biologia é de 0,46.
02) A probabilidade de que ele não estude Química nem Biologia é de 0,54.
04) A probabilidade de que ele estude Química e Biologia é de 0,04.
08) A probabilidade de que ele estude somente Química é de 0,16.

08) (ENEM) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o *rock* e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1 000 alunos de uma escola.
Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos.

Preferência musical	*rock*	samba	MPB	*rock* e samba
número de alunos	200	180	200	70

Preferência musical	*rock* e MPB	samba e MPB	*rock,* samba e MPB
número de alunos	60	50	20

Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

a) 2%
b) 5%
c) 6%
d) 11%
e) 20%

Nível 3

09) (UNIOESTE – PR) Escolhe-se, ao acaso, um número inteiro entre 101 e 150 inclusive. A probabilidade de o número escolhido ser um quadrado perfeito ou divisível por 4 é:

a) $\frac{12}{50}$.
b) $\frac{13}{50}$.
c) $\frac{14}{50}$.
d) Menor do que 24%.
e) Maior do que 28%.

10) (UFPE – PE) Se b e c são naturais escolhidos aleatoriamente no conjunto {1, 2, 3,..., 10}, qual a probabilidade percentual de as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$ não serem reais?

GABARITO – AULA 02

1) c	**2)** c	**3)** 80%	**4)** b	**5)** a	**6)** d	**7)** 07
8) d	**9)** b	**10)** 38%				

AULA 03

PROBABILIDADE (III) – PROBABILIDADE DO EVENTO COMPLEMENTAR – PRODUTO DE PROBABILIDADADES

1. Probabilidade do evento complementar

Considere o seguinte experimento:

No lançamento de um dado de RPG numerado de 1 a 12, determine a probabilidade de:
a) sair um número primo;
b) de não sair um número primo.

Solução:

a) sair um número primo: A = {2, 3, 5, 7, 11}. Visto que o espaço amostral é U = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...,12}, temos:

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

b) não sair um número primo: B = {1, 4, 6, 8, 9, 10, 12}:

$$P(B) = \frac{7}{12}$$

Veja que nesse exemplo que:

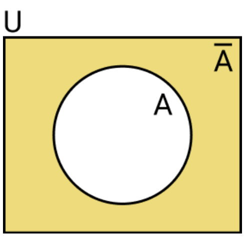
$$P(A) + P(B) = \frac{5}{12} + \frac{7}{12} = \frac{12}{12} = 1 = 100\%$$

Nesses casos os eventos são ditos complementares, ou seja, um dos eventos é a negação do outro.

Notação: $\overline{A}$ é evento complementar de A.

Generalizando:

Observe o diagrama abaixo juntamente com os eventos A e $\overline{A}$ em relação ao mesmo espaço amostral U.



Visto que $A \cup \overline{A} = U$, temos::

$n(A) + n(\overline{A}) = n(U)$

Dividindo-se a igualdade acima por n(U), vem:

$$\frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(\overline{A})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)}$$

Assim:

$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$

2. Produto de Probabilidades

Sejam dois eventos **A** e **B** de um mesmo espaço amostral **U.** A probabilidade de ocorrer A e B é dada por:

$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B/A)}$

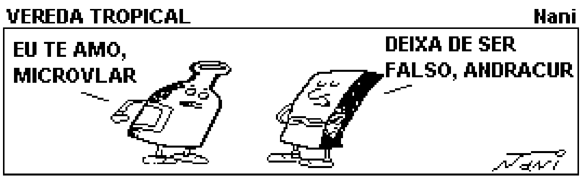
Em que:

- $P(A \cap B)$ é a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente.
- P(A) é a probabilidade de ocorrer A.
- $P(B/A)$ é a probabilidade de ocorrer B, tendo ocorrido A.

Observação: $P(B/A) = P(B)$, dizemos que a probabilidade do evento B ocorrer independe do evento A ter ocorrido, dizemos então, que A e B são eventos independentes, logo:
$\boxed{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

Exercícios Resolvidos:

1) (UERJ – RJ)



(O Dia, 25/08/98)

Suponha haver uma probabilidade de 20% para uma caixa de Microvlar ser falsificada. Em duas caixas, a probabilidade de pelo menos uma delas ser falsa é:

Solução:
Seja o evento A: ocorrer duas caixas de Microvlar verdadeiras.
Como a ocorrência de uma caixa verdadeira independe da probabilidade da outra ser verdadeira, podemos dizer que as ocorrências individuais de caixas de Microvlar verdadeiras são eventos independentes. Assim a probabilidade de ambas serem verdadeiras é:

$$P(A) = 80\%.80\% = \frac{80}{100}.\frac{80}{100} = \frac{64}{100} = 64\% \ .$$

Portanto, o que nos interessa é

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} = 36\% \ .$$

2) Lançando-se uma moeda e um dado, qual a probabilidade de se obter cara na moeda e face 2 no dado?

Resolução: Sejam os eventos:

A: ocorrer cara $\rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

B: ocorrer face 3 $\rightarrow P(B/A) = P(B) = \frac{1}{6}$

Veja que A e B são eventos independentes.

Então:
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6}$

$\text{Portanto}: P(A \cap B) = \frac{1}{12}.$

3) Uma urna contém 10 bolas vermelhas e 6 bolas brancas.

Retirando-se duas bolas ao acaso, qual é a probabilidade de que ambas sejam de mesma cor com:

a) reposição da primeira bola
b) sem reposição da primeira bola

Resolução: Note que queremos que ocorra duas bolas vermelhas **ou** duas bolas brancas. Chamando os eventos de A e B, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

a) com reposição da primeira bola

$$P(AUB) = \underbrace{\frac{10}{16}.\frac{10}{16}}_{2\,vermelhas} + \underbrace{\frac{6}{16}.\frac{6}{16}}_{2\,brancas}$$

$$P(AUB) = \frac{17}{32}$$

b) sem reposição da primeira bola

$$P(AUB) = \underbrace{\frac{10}{16}.\frac{9}{15}}_{2\,vermelhas} + \underbrace{\frac{6}{16}.\frac{5}{15}}_{2\,brancas}$$

$$P(AUB) = \frac{1}{2}$$

4) (FGV – SP) Um sistema de controle de qualidade consiste em três inspetores A, B e C que trabalham em série e de forma independente, isto é, o produto é analisado pelos três inspetores trabalhando de forma independente.
O produto é considerado defeituoso quando um defeito é detectado, ao menos, por um inspetor.
Quando o produto é defeituoso, a probabilidade de o defeito ser detectado por cada inspetor é 0,8. A probabilidade de uma unidade defeituosa ser detectada é:

Solução:

Probabilidade de uma unidade defeituosa não apresentar defeito: 1 – 0,8 = 0,2.
Probabilidade de uma unidade defeituosa não ser detectada por nenhum inspetor.
$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$.
Probabilidade de uma unidade defeituosa ser detectada por pelo menos um inspetor.
1 – 0,008 = $\boxed{\mathbf{0,992}}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

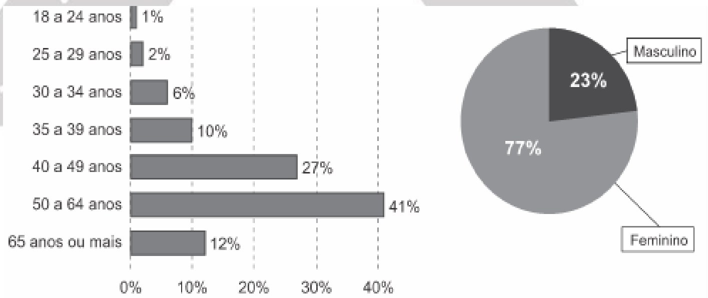
01) (PUC – RJ) Jogamos uma moeda comum e um dado comum. A probabilidade de sair um número par e a face coroa é:

a) 0,1
b) 0,2
c) 0,25
d) 0,33
e) 0,5

02) (UEPG – PR) Sendo P_1, P_2 e P_3, respectivamente, as probabilidades de ocorrência dos eventos abaixo, assinale o que for correto.
- E_1: Em três lançamentos sucessivos de uma moeda, dar 3 caras.
- E_2 :Sair uma bola verde de uma urna com 4 bolas verdes e 6 brancas.
- E_3: Sortear um múltiplo de 5 dentre 30 cartelas numeradas de 1 a 30.

01. $P_3 > P_1$
02. $P_1 > P_2$
04. $P_2 = 2P_3$
08. $P_1 + P_3 > P_2$

03) (FATEC) O artesão brasileiro é um agente de produção nas áreas cultural e econômica do país, gerando empregos e contribuindo para a identidade regional. Observe os gráficos e admita distribuição homogênea de dados.



Suponha que uma viagem será sorteada entre todos os artesãos brasileiros, a probabilidade de que o ganhador da viagem seja uma mulher de 65 anos ou mais é de

a) 31,57%.
b) 20,79%.
c) 12,43%.
d) 9,24%.
e) 4,85%.

Nível 2

04) (IFPE – PE) Dentro de um freezer, há 4 garrafas de vinho da marca A, 6 garrafas de vinho da marca B e 5 garrafas de vinho da marca C, retiram-se duas garrafas sem observar a marca. A probabilidade de que os dois retirados sejam da mesma marca é

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{3}{132}$ d) $\frac{31}{105}$ e) $\frac{1}{5}$

05) (UPE – PE) Dois atiradores, André e Bruno, disparam simultaneamente sobre um alvo.

- A probabilidade de André acertar no alvo é de 80%.
- A probabilidade de Bruno acertar no alvo é de 60%.

Se os eventos "*André acerta no alvo*" e "*Bruno acerta no alvo*", são independentes, qual é a probabilidade de o alvo **não** ser atingido?

a) 8%
b) 16%
c) 18%
d) 30%
e) 92%

06) (UEG – GO) Uma urna possui 5 bolas verdes e 4 amarelas. São retiradas duas bolas aleatoriamente e sem reposição. A probabilidade de ter saído bolas de cores diferentes é

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{9}{17}$ e) $\frac{20}{17}$

07) (ACAFE – SC) Segundo estudos realizados em um centro de pesquisas geológicas, a probabilidade de um terremoto ocorrer no mar de certa cidade é de 70%, e a probabilidade de ocorrer em terra é de 30%. Em ambos os casos podem ou não ocorrer danos à cidade. Se o terremoto ocorre no mar há 60% de chances de ocorrer danos à cidade. Se o terremoto ocorre em terra, a probabilidade de ocorrer danos é de 82%. Qual é a probabilidade de um terremoto ocorrer no mar e não haver danos à cidade?

a) 57,4%
b) 12,6%
c) 42%
d) 28%

08) (ACAFE – SC) A probabilidade de que um médico acerte o diagnóstico de um paciente é de 95%. Dado que esse médico tenha errado o diagnóstico, a probabilidade de não ser processado pelo paciente é 90%. Qual a probabilidade de que o médico erre o diagnóstico e seja processado pelo paciente?

a) 4,5%
b) 3,2%
c) 0,5%
d) 3,8%

09) (ENEM) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \le P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \le P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \le P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \le P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \le P \le 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

a) excelente.
b) bom.
c) regular.
d) ruim.
e) péssimo.

Nível 3

10) (ENEM) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

a) 23,7%
b) 30,0%
c) 44,1%
d) 65,7%
e) 90,0%

11) (ENEM) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

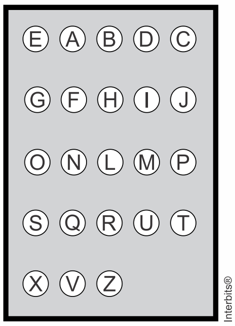
Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075
b) 0,150
c) 0,325
d) 0,600
e) 0,800

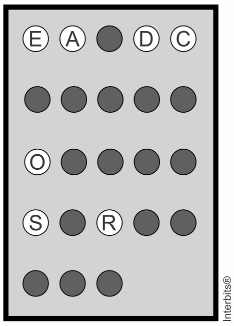
12) (UERJ – RJ) Os consumidores de uma loja podem concorrer a brindes ao fazerem compras acima de R$ 100,00. Para isso, recebem um cartão de raspar no qual estão registradas 23 letras do alfabeto em cinco linhas. Ao consumidor é informado que cada linha dispõe as seguintes letras, em qualquer ordem:

- linha 1 – {A, B, C, D, E};
- linha 2 – {F, G, H, I, J};
- linha 3 – {L, M, N, O, P};
- linha 4 – {Q, R, S, T, U};
- linha 5 – {V, X, Z}.

Observe um exemplo desses cartões, com as letras ainda visíveis:



Para que um consumidor ganhasse um secador, teria de raspar o cartão exatamente nas letras dessa palavra, como indicado abaixo:



Considere um consumidor que receba um cartão para concorrer a um ventilador.
Se ele raspar as letras corretas em cada linha para formar a palavra VENTILADOR, a probabilidade de que ele seja premiado corresponde a:

a) $\dfrac{1}{15000}$
b) $\dfrac{1}{18000}$
c) $\dfrac{1}{20000}$
d) $\dfrac{1}{25000}$

GABARITO – AULA 03

1) c	**2)** 05	**3)** d	**4)** d	**5)** a	**6)** a	**7)** d
8) c	**9)** b	**10)** d	**11)** c	**12)** a		

AULA 04

PROBABILIDADE (IV) – PROBABILIDADE CONDICIONAL E DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

De um baralho de 52 cartas extraímos uma carta. Qual a probabilidade de que a carta seja um rei, sabendo que ela é uma figura?

Solução:

Note que o espaço amostral desse experimento não é o conjunto das 52 cartas. Com a informação de que a carta é uma figura, o espaço amostral será formado pelas 12 figuras do baralho. Como existem 4 reis, a probabilidade será $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

Probabilidades como essas são denominadas **probabilidades condicionadas** e será objeto de nosso módulo.

1. Probabilidade condicional

Acompanhe o seguinte exemplo:

Numa escola existem 20 estudantes, dos quais 12 são mulheres e 8 são homens.

Ao prestarem vestibular no final do ano observou-se que 5 mulheres e 3 homens foram aprovados, como mostra o quadro:

Considere agora, os seguintes eventos:

	aprovados	**Não aprovados**	**total**
Mulheres	5	7	12
Homens	3	5	8
Total	8	12	20

A: O estudante escolhido foi aprovado: $P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

B: O estudante escolhido é mulher: $P(B)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

Daí pergunta-se: Qual é a probabilidade de o estudante ter sido aprovado, sabendo que é mulher?

Resolução: Observe que o problema pede a probabilidade de ocorrer **A**(estudante ter sido aprovado), mas informa que já ocorreu **B** (estudante é mulher); Portanto o novo espaço amostral está condicionado. Veja o quadro abaixo:

	aprovados	**Não aprovados**	**total**
Mulheres	5	7	12

Portanto, a probabilidade que procuramos é: $\frac{5}{12}$

Generalização

De um modo geral, se **U** é um espaço amostral e A e B eventos, denominamos **probabilidade condicional** de A, dado B, a probabilidade de ocorrer A visto que já ocorreu B.

Notação: $P(A/B)$

Cálculo: $\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$ com $P(B)\neq 0$

No exemplo anterior, temos:

A: O estudante escolhido foi aprovado: $P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

B: O estudante escolhido é mulher: $P(B)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

$A\cap B$: O estudante escolhido foi aprovado e é mulher:

$P(A\cap B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Aplicando $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ vem:

$$P(A/B)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{12}$$

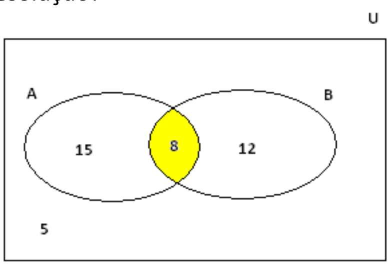
Exercício Resolvido

Numa pesquisa sobre a preferência de dois jornais A e B com 40 pessoas, constatou-se que:

- 15 pessoas gostam apenas do jornal A
- 12 pessoas gostam apenas do jornal B
- 8 pessoas gostam dos jornais A e B.

Qual a probabilidade de uma pessoa que gosta do jornal A também gostar do jornal B?

Resolução:



Aplicando $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ vem: $P(A/B) = \dfrac{\frac{8}{40}}{\frac{23}{40}} = \dfrac{8}{23}$

2. Distribuição Binomial

Se um experimento aleatório é realizado **n** vezes sucessivas, sempre nas mesmas condições, então a probabilidade de que um evento **A** desse experimento ocorra exatamente **k** vezes é dada pela expressão:

$$\boxed{P_n^{k,n-k}.[P(A)]^k.[P(\overline{A})]^{n-k}}$$

ou

$$\boxed{C_n^k.[P(A)]^k.[P(\overline{A})]^{n-k}}$$

ou ainda:

$$\boxed{\binom{n}{k}.[P(A)]^k.[P(\overline{A})]^{n-k}}$$

onde $P_n^{k,n-k} = C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$

Vamos considerar o seguinte problema:

A probabilidade de um atirador atingir um alvo em um único tiro é $\frac{1}{5}$. Com apenas 5 tiros, qual a probabilidade de se acertar o alvo exatamente 2 vezes?

Resolução: Inicialmente observe os seguintes eventos:

$$\begin{cases} A : \text{Acertar o alvo} \rightarrow P(A) = \dfrac{1}{5} \\ \overline{A} : \text{Não acertar o alvo} \rightarrow P(\overline{A}) = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Observe que A e $\overline{A}$ são eventos complementares.
Nos 5 experimentos, o problema exige que ocorra o evento A exatamente 2 vezes. É natural perceber que o evento $\overline{A}$ deve ocorrer 3 vezes.
Em contra partida, não é definido no problema a ordem em que devem acontecer os eventos A e $\overline{A}$.
Veja abaixo algumas das possibilidades em que podem ocorrer:

A	$\overline{A}$	$\overline{A}$	A	$\overline{A}$

$\overline{A}$	A	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$

A	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{A}$

Observe que qualquer que seja a disposição dos eventos, é fácil perceber que a probabilidade dessa ocorrência é a mesma, ou seja: $[P(A)]^2.[P(\overline{A})]^3$

Daí, resta obter apenas a quantidade de maneiras diferentes em que essas situações podem ser dispostas. Para isso basta permutarmos $A, A, \overline{A}, \overline{A}, \overline{A}$.
Então, a probabilidade procurada é dada por:

$P_5^{2,3}.[P(A)]^2.[P(\overline{A})]^3$

$\dfrac{5!}{2!3!}.\left[\dfrac{1}{5}\right]^2.\left[\dfrac{4}{5}\right]^3$

$10.\dfrac{1}{25}.\dfrac{64}{125}$

Efetuando os cálculos, vem: $\dfrac{128}{625}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) (UFPR – PR) André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

a) 25%.
b) 27,5%.
c) 30%.
d) 33,3%.
e) 50%.

02) (ENEM) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{5}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{5}{7}$
e) $\frac{5}{14}$

Nível 2

03) (UPE – PE) Dentre os esportes oferecidos aos estudantes de uma escola com 3.000 alunos, temos o futebol como preferência, sendo praticado por 600 estudantes. 300 estudantes dessa mesma escola praticam natação, e 100 praticam ambos os esportes. Selecionando-se um estudante praticante de futebol para uma entrevista, qual a probabilidade de ele também praticar natação?

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{4}{3}$
d) $\frac{1}{6}$
e) $\frac{5}{6}$

04) (ACAFE – SC) Uma prova consta de 7 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada uma, e apenas uma correta. Se um aluno escolher como correta uma alternativa ao acaso em cada questão, a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente:

a) 87%.
b) 85%.
c) 90%.
d) 47%.

05) (ACAFE – SC) Um casal que pretende ter 5 filhos descobre, ao fazer certos exames, que determinada característica genética tem a probabilidade de um terço de ser transmitida a cada de seus futuros filhos. Nessas condições, a probabilidade de, exatamente, três dos cinco filhos possuírem essa característica é:

a) exatamente 17%.
b) maior que 15%.
c) menor que 14%.
d) exatamente 18%.

Nível 3

06) (ENEM) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é $0,20$.
A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

a) $0,02048$.
b) $0,08192$.
c) $0,24000$.
d) $0,40960$.
e) $0,49152$.

07) (ESPECEX) A probabilidade de um casal ter um filho de olhos azuis é igual a $\frac{1}{3}$. Se o casal pretende ter 4 filhos, a probabilidade de que no máximo dois tenham olhos azuis é

a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{7}{9}$
c) $\frac{8}{9}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{1}{2}$

08) (ENEM) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens.
Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é

a) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
c) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
d) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
e) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

09) (EFOMM) Um atirador, em um único tiro, tem probabilidade de 80% de acertar um específico tipo de alvo. Num exercício ele dá seis tiros seguidos nesse mesmo tipo de alvo.

Considerando-se que os tiros são independentes, em cálculo aproximado, qual é a probabilidade de o atirador errar o alvo exatamente duas vezes?
a) $4,12\%$
b) $18,67\%$
c) $24,58\%$
d) $27,29\%$
e) $40,25\%$

10) (ENEM) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação e de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \times (0,2\%)^4$.
b) $4 \times (0,2\%)^2$.
c) $6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$.
d) $4 \times (0,2\%)$.
e) $6 \times (0,2\%) \times (99,8\%)$.

GABARITO – AULA 04

1) e	**2)** d	**3)** d	**4)** a	**5)** b	**6)** b	**7)** c
8) e	**9)** c	**10)** c				