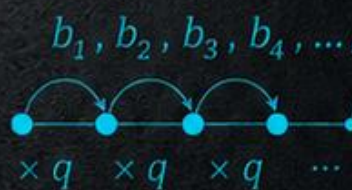


$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$



MATEMÁTICA



P.A. e P.G.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

P.G.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$





PROGRESSÕES

SUMÁRIO DO E-BOOK

01

AULA 01

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (I)

VIDEOAULA + MATERIAL DE APOIO



02

AULA 02

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (II)

VIDEOAULA + MATERIAL DE APOIO



03

AULA 03

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (I)

VIDEOAULA + MATERIAL DE APOIO



04

AULA 04

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (II)

VIDEOAULA + MATERIAL DE APOIO



05

AULA 05

PROGRESSÕES - REVISÃO GERAL

VIDEOAULA + MATERIAL DE APOIO



PROGRESSÃO ARITMÉTICA - AULA 01



ASSISTA À AULA



DEFINIÇÃO

Chama-se progressão aritmética uma sequência em que, a partir do segundo elemento, a diferença entre cada elemento e seu antecessor é constante. Essa constante é denominada razão da P.A. e é indicada por r .

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots = r$$

Veja que a sequência $(2, 5, 8, \dots)$ é uma P.A., pois $5 - 2 = 8 - 5$. Sua razão é igual a 3.

CLASSIFICAÇÃO

Uma P.A. pode ser classificada de acordo com valor da razão. Observe o quadro abaixo:

- $r > 0 \Leftrightarrow$ P.A. crescente Ex.: $(2, 5, 8, \dots)$ $r = 3$
- $r < 0 \Leftrightarrow$ P.A. decrescente Ex.: $(10, 7, 4, \dots)$ $r = -3$
- $r = 0 \Leftrightarrow$ P.A. constante Ex.: $(5, 5, 5, \dots)$ $r = 0$

TERMO GERAL

Considere a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$. Acompanhe o desenvolvimento:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

IMPORTANTE

Sejam a_n e a_k dois termos quaisquer de uma P.A. Utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot r$$

$$a_{15} = a_2 + 13r$$

$$a_{22} = a_{20} + 2r$$

$$a_7 = a_3 + 4r$$

PROPRIEDADES

Média Aritmética

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$, um termo qualquer excetuando os extremos é a média aritmética entre o termo anterior e o posterior, ou seja:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Exemplo: $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23) \rightarrow 11 = \frac{8+14}{2}$

Termos Equidistantes

Em uma P.A. limitada $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, a soma dos termos extremos é igual a soma dos termos equidistantes dos extremos, ou seja:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

Observação: Seja uma P.A. com n termos. Se dois termos a_p e a_q são equidistantes dos extremos tem-se:

$$p + q = n + 1$$

Com essa igualdade é possível saber se dois termos quaisquer são equidistantes dos extremos ou não. Por exemplo, numa sequência de 40 termos, a_{16} e a_{25} são equidistantes dos extremos, pois $16 + 25 = 40 + 1$.



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. A sequência $(x, 3 + x, 2x + 1, \dots)$ representa 3 termos consecutivos em P.A.; determine:

- a) o valor de x .
- b) a razão da P.A.
- c) o décimo terceiro termo da sequência.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Julgue os itens abaixo em V para os itens verdadeiros e F para os itens falsos.

- a) Na P.A. $(-1, 3, 7, \dots)$ o valor do vigésimo primeiro termo é 79.
- b) Numa progressão aritmética o primeiro termo vale 4 e a razão é 2. Podemos afirmar que a soma do décimo termo com o vigésimo termo dessa P.A. é 64.
- c) A quantidade de números inteiros entre 50 e 1000 que sejam múltiplos de 12 é 79.
- d) Numa progressão aritmética de razão 3, o sexto termo vale 54. O septuagésimo sexto termo (76º) dessa sequência é o número 264.
- e) A sequência $(11, a, 29, b, 47)$, é uma progressão aritmética, então a soma $a + b$ é igual a 58.
- f) Sendo $(3x - 2, x - 1, 2x + 3)$ uma PA, então podemos afirmar que x é um número positivo.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. Uma progressão aritmética (PA) é formada por 21 termos, sendo -5 o primeiro termo e 19 o último termo. A razão dessa PA é

a) $0,6$. b) $0,8$. c) $1,2$. d) $1,4$. e) $1,6$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

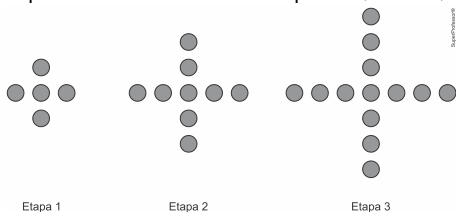
4. (UTFPR – PR) Uma startup de tecnologia, com potencial de crescimento, possuía 5 clientes em janeiro de 2023, em fevereiro de 2023 a startup conquistou 2 novos clientes, o mesmo ocorreu nos próximos 4 meses.

Quantos clientes a startup terá no final de junho de 2023?

a) 12. b) 13. c) 17. d) 21. e) 15.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (UFRGS – RS) Considere o padrão de construção que fez uso de discos, conforme as figuras representadas nas etapas 1, 2 e 3, abaixo.



Na etapa 200, serão usados n discos. Seguindo esse padrão de construção, n é igual a

a) 783. b) 792. c) 801. d) 810. e) 819.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



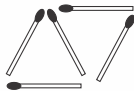
EXERCÍCIOS NÍVEL 2



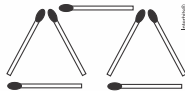
6. (UFRGS – RS) Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras abaixo.



Etapa 1



Etapa 2



Etapa 3

Na etapa n , serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, n é igual a

- a) 120 b) 121 c) 122 d) 123 e) 123

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UERJ – RJ) Progressão harmônica é uma sequência finita ou infinita de números diferentes de zero cujos inversos formam uma progressão aritmética (PA). Observe o exemplo:

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ é uma progressão harmônica porque $(1, 2, 3, 4, \dots)$ é uma PA.

Na progressão harmônica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right)$, o vigésimo primeiro termo equivale a:

- a) $\frac{1}{48}$ b) $\frac{1}{42}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{24}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UECE – CE) Se m é um número real tal que $(m-1)^3$, m^3 , $(m+1)^3$, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, identifique a afirmação correta.

- a) Existe um único valor numérico para m .
b) Não é possível identificar um valor numérico para m .
c) É possível determinar um número positivo e um outro número negativo para m .
d) Existem infinitos valores numéricos possíveis para m .

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (ENEM) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7 e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10 e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40 b) 60 c) 100 d) 115 e) 120

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (ENEM) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça.

Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R\$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é

a) R\$ 512.000,00. b) R\$ 520.000,00. c) R\$ 528.000,00. d) R\$ 552.000,00. e) R\$ 584.000,00.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

11. (ESPECEX) Os valores, em cm, do lado, da altura e, em cm², da área de um triângulo equilátero estão, nessa ordem, em PA. A medida, em cm, do lado desse triângulo é igual a:

- a) $\frac{12+4\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{12+2\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{+1\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{12-4\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{12-2\sqrt{3}}{3}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

12. (UFPR – PR) A sequência $(a_1, a_2, \dots, a_9)$ é uma progressão aritmética. Sabendo que $a_3 + a_6 + a_9 = 18$, faça o que se pede, apresentando o raciocínio.

- a) Determine o valor de a_6 .
b) Sabendo que $a_1 = 2$, determine a razão da progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_9)$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO

1 ALTERNATIVAS (OBJETIVAS)

1. a) 5 b) 3 c) 4 2. * 3. c 4. e 5. c
6. c 7. b 8. a 9. d 10. c 11. d 12. *

2 VERDADEIRO OU FALSO

2) a) V b) V c) V d) V e) V f) F

3 RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 12

12)

$$\begin{aligned} a_3 + a_6 + a_9 &= 18 \\ \text{a) Teremos: } a_6 - 3r + a_6 + a_6 + 3r &= 18 \\ 3 \cdot a_6 &= 18 \\ a_6 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Teremos: } a_6 &= a_1 + 5 \cdot r \\ 6 &= 2 + 5r \\ 5r &= 4 \\ r &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Logo, a razão da P.A. é $\frac{4}{5}$.

Resolução do Exercício 1

$$\begin{aligned} a) \quad a_2 - a_1 &= a_3 - a_2 \\ x + 3 - x &= 2x + 1 - (x + 3) \\ 3 &= x - 2 \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \text{Substituindo } x = 5, \text{ temos: } (5, 8, 11, \dots) \\ \text{Logo: } r &= a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad a_{13} &= a_1 + 12r \\ a_{13} &= 5 + 12 \cdot 3 \\ a_{13} &= 41 \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 2:

a) Verdadeiro

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_1 + 20r \\ a_{20} &= -1 + 20 \cdot 4 \\ a_{20} &= 79 \end{aligned}$$

b) Verdadeiro

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + 9r & a_{20} &= a_1 + 19r \\ a_{10} &= 4 + 9 \cdot 2 & a_{20} &= 4 + 19 \cdot 2 \\ a_{10} &= 22 & a_{20} &= 42 \\ \text{Logo: } a_{10} + a_{20} &= 64 \end{aligned}$$

c) Verdadeiro

Múltiplos de 12 entre 50 e 1000 (60, 72, ..., 996).

$$\begin{aligned} \text{Utilizando a fórmula do termo geral da P.A.,} \\ \text{temos:} \\ a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \\ 996 &= 60 + (n - 1) \cdot 12 \quad (\text{em que } n \text{ é o número de} \\ &\quad \text{múltiplos de 12 entre 50 e 1000}) \\ 936 &= (n - 1) \cdot 12 \\ n - 1 &= 78 \\ n &= 79 \end{aligned}$$

d) Verdadeiro

$$\begin{aligned} a_{76} &= a_6 + 70r \\ a_{76} &= 54 + 70 \cdot 3 = 264 \end{aligned}$$

e) Verdadeiro

Numa P.A. limitada, a soma dos termos extremos é igual a soma dos termos equidistantes dos extremos, logo:

$$\begin{aligned} (11, a, 29, b, 47), \\ 11 + 47 &= a + b \\ \therefore a + b &= 58 \end{aligned}$$

f) Falso

$$\begin{aligned} (3x - 2, x - 1, 2x + 3) \\ a_2 - a_1 &= a_3 - a_2 \\ x - 1 - (3x - 2) &= 2x + 3 - (x - 1) \Leftrightarrow \\ x - 1 - 3x + 2 &= 2x + 3 - x + 1 \Leftrightarrow -3x = 3 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 3: [C]

Utilizando a equação do termo geral de uma PA para escrever o último termo, tem-se

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 19 = -5 + (21 - 1) \cdot r \Rightarrow \\ r &= 1,2. \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 4: [E]

De acordo com as informações do problema temos uma P.A. de razão 2.

(5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ...)

Portanto, o número de clientes no final de junho de 2023 será o sexto termo da P.A., ou seja 15.

Resolução do Exercício 5: [C]

Observe que o número de discos aumenta, em Progressão Aritmética de razão 4, em cada etapa.

(5, 9, 13, 17, ...)

Portanto, na etapa 200 teremos:

$$\begin{aligned} a_{200} &= a_1 + 199 \cdot r \\ a_{200} &= 5 + 199 \cdot 4 \\ a_{200} &= 801 \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 6: [C]

O número de palitos em cada etapa cresce segundo a sequência (3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...), com $n \in \mathbb{N}^*$. A sequência é uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 2$.

Em consequência, temos
 $2n + 1 = 245 \Leftrightarrow n = 122$.

Resolução do Exercício 7: [B]

Os denominadores das frações estão em PA de

razão 2. Logo, o 21º denominador é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{21} = 2 + 20 \cdot 2$$

$$a_{21} = 42$$

Portanto, o 21º termo da progressão é $\frac{1}{42}$.

Resolução do Exercício 8: [A]

Para que a sequência de termos forme uma PA, devemos ter que:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$m^3 - (m-1)^3 = (m+1)^3 - m^3$$

$$2m^3 = (m-1)^3 + (m+1)^3$$

$$2m^3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1 + m^3 + 3m^2 + 3m + 1$$

$$0 = 6m$$

$$\wedge m = 0$$

Ou seja, existe um único valor numérico para m (m = 0).

Resolução do Exercício 9: [D]

Veja que os andares 1, 7, 13, 19, ..., a_{20} , com a_{20} sendo o último andar do edifício, foram aqueles que receberam reparos de João e Pedro. Portanto, como tal sequência é uma progressão aritmética de razão 6 e primeiro termo 1, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_{20} = 1 + 19 \cdot 6 = 115.$$

Resolução do Exercício 10: [C]

As distâncias dos postes até a praça constituem uma progressão aritmética de primeiro termo 80 e razão 20. Desse modo, o número, n, de postes é dado por

$$1380 = 80 + (n-1) \cdot 20 \Leftrightarrow n = \frac{1300}{20} + 1$$

$$\Leftrightarrow n = 66.$$

A resposta é $66 \cdot 8000 = \text{R\$ } 528.000,00$.

Resolução do Exercício 11: [D]

Seendo ℓ o lado do triângulo equilátero, temos que:

$$PA\left(\ell, \frac{\ell\sqrt{3}}{2}, \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} - \ell = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2\ell\sqrt{3} - 4\ell}{4} = \frac{\ell^2\sqrt{3} - 2\ell\sqrt{3}}{4}$$

$$2\sqrt{3} - 4 = \ell\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

$$\ell = \frac{4\sqrt{3} - 4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \ell = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3}$$

PROGRESSÃO ARITMÉTICA - AULA 02

ASSISTA À AULA



ARTIFÍCIOS

A fim de facilitar a resolução de alguns problemas em P.A. podemos utilizar os seguintes artifícios:

- Três termos em P.A de razão $r = k$.
 $x - k, x, x + k$
- Quatro termos em P.A de razão $r = 2k$.
 $x - 3k, x - k, x + k, x + 3k$
- Cinco termos em P.A. de razão $r = k$.
 $x - 2k, x - k, x, x + k, x + 2k$

CONSEQUÊNCIA IMPORTANTE

Se as medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética, podemos indicá-las por $3k, 4k$ e $5k$, onde k é a razão da P.A.

$3k$

$4k$

$5k$



INTERPOLAÇÃO

Interpolair, inserir ou intercalar m meios aritméticos entre a e b significa formar uma P.A. de extremos a e b com $m + 2$ elementos. Para determinarmos os meios aritméticos, devemos calcular a razão da P.A.

EXEMPLO

Quantos termos devem ser interpolados entre 3 e 23 de modo que a razão seja igual a 5.

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a_1 = 3 & a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \\ a_n = 23 & 23 = 3 + (n-1) \cdot 5 \\ r = 5 & 20 = 5n - 5 \rightarrow n = 5 \\ n - 2 = ? \end{cases}$$

SOMA DOS TERMOS

Considere a P.A. $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$. A soma de todos os termos dessa progressão, que indicaremos por S_n pode ser obtida assim:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (I) \text{ ou}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \quad (II)$$

Fazendo (I) + (II), vem:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como as n parcelas possuem o mesmo valor podemos escrever:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

Logo:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

EXEMPLO

Determine a soma dos 12 primeiros termos da P.A. $(4, 8, 12, \dots)$

$$\begin{cases} a_1 = 4 & a_n = a_1 + (n-1) \cdot r & S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \\ r = 4 & a_{12} = a_1 + (11) \cdot 4 & S_{12} = (a_1 + a_{12}) \cdot \frac{12}{2} \\ S_{12} = ? & a_{12} = 46 & S_{12} = (4 + 46) \cdot 6 \\ & & \therefore S_{12} = 300 \end{cases}$$

EXEMPLO

2) A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = n^2$. Calcule o 2º termo.

$$\text{Resolução: Sabemos que } S_1 = a_1 \text{ e } S_2 = a_1 + a_2$$

$$\text{Então: } S_n = n^2 \quad S_1 = 1^2 \quad \therefore S_1 = a_1 = 1$$

$$S_2 = 2^2 \quad \therefore S_2 = 4$$

$$\text{Como } S_2 = a_1 + a_2$$

$$\text{temos: } a_2 = S_2 - S_1$$

$$\therefore a_2 = 3$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Julgue os itens abaixo em verdadeiro ou falso.

- a) Interpolando-se 5 meios aritméticos entre 2 e 20 obtém-se uma P.A. cuja razão é 3.
- b) Numa progressão aritmética crescente de 3 termos a soma deles é 24 e o produto é 384. Dessa forma, o maior termo dessa sequência é 12.
- c) O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 48 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). Podemos afirmar que a hipotenusa desse triângulo mede 20 m.
- d) Uma progressão aritmética, cujos termos são representados por a_n , $n \geq 1$, é tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 35$. O termo a_3 dessa progressão aritmética é igual a 7.
- e) A soma dos 20 primeiros termos da P.A. $(2, 6, \dots)$ é 800.
- f) Denominando P a soma dos números pares de 1 a 100 e I a soma dos números ímpares de 1 a 100, $P - I$ é 48.
- g) Em uma progressão aritmética, a soma S_n de seus n primeiros termos é dada pela expressão $S_n = 5n^2 - 12n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. A razão dessa progressão é -7 .
- h) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada pela expressão $S_n = 93n - 4n^2$, então o seu terceiro termo é igual a 73.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. (PUC – RS) Devido à epidemia de gripe do último inverno, foram suspensos alguns concertos em lugares fechados. Uma alternativa foi realizar espetáculos em lugares abertos, como parques ou praças. Para uma apresentação, precisou-se compor uma platéia com oito filas, de tal forma que na primeira fila houvesse 10 cadeiras; na segunda, 14 cadeiras; na terceira, 18 cadeiras; e assim por diante. O total de cadeiras foi:

- a) 384 b) 192 c) 168 d) 92 e) 80

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (UERJ – RJ) Observe os quatro primeiros elementos de uma sequência de figuras formadas com quadradinhos. Essas figuras seguem um mesmo padrão, ou seja, cada uma tem dois quadradinhos a mais do que a anterior.

Figura 1



Figura 2



Figura 3

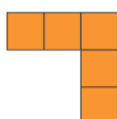
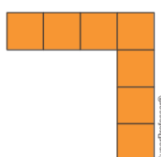


Figura 4



O número total de quadradinhos necessários para formar as 17 primeiras figuras dessa sequência é:

- a) 285. b) 289. c) 291. d) 297.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (PUC – RJ) Preciso ler um livro de muitas páginas. Meu planejamento de leitura é começar lendo 10 páginas no primeiro dia e a cada dia ler duas páginas a mais que no dia anterior. No terceiro dia, por exemplo, vou ler 14 páginas. Assim, quantas páginas no total vou ter lido nos primeiros 20 dias?

a) 168 b) 200 c) 384 d) 460 e) 580

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (ENEM) O trabalho em empresas de exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

☆ ☆☆ ☆☆☆ ☆☆☆☆ ☆☆☆☆☆ ...
1ª 2ª 3ª 4ª 5ª 150ª

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

Funcionário I: aproximadamente 200 estrelas.
Funcionário II: aproximadamente 6 000 estrelas.
Funcionário III: aproximadamente 12 000 estrelas.
Funcionário IV: aproximadamente 22 500 estrelas.
Funcionário V: aproximadamente 22 800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

a) I b) II c) III d) IV e) V

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2

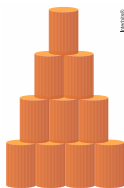


6. (UEPG – PR) Numa estrada existem dois telefones instalados no acostamento: um no km 3 e outro no km 248. Entre eles serão colocados mais 6 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância. Nessas condições, assinale o que for correto.

01. A distância entre cada telefone será de 35 km.
02. Haverá um telefone no km 108.
04. Se um motorista está no km 165, a menor distância que ele terá que percorrer para encontrar um telefone será de 13 km.
08. No km 73 não haverá telefone.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UPF – RS) Um supermercado pretende fazer a promoção de um determinado produto colocando uma pilha de latas desse produto de modo que cada linha tenha menos uma lata do que a anterior. No local onde será colocada a pilha de latas há disponibilidade de 2 m para a altura dessa pilha. A pilha termina com apenas uma lata, como mostra a figura, e cada lata tem 10 cm de altura. O número de latas que serão utilizadas para construir essa pilha é:



- a) 420 b) 200 c) 110 d) 20 e) 210

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (FUVEST – SP) Joana comprou um celular e dividiu o pagamento em 24 parcelas mensais que formam uma progressão aritmética crescente. As três primeiras parcelas foram de R\$120,00, R\$126,00 e R\$132,00. Sabendo que, ao final, constatou-se que Joana não pagou a 19ª parcela, o valor pago por ela foi:

a) R\$ 3.954,00 b) R\$ 4.026,00 c) R\$ 4.200,00 d) R\$ 4.308,00 e) R\$ 4.382,00

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

9. (UFRGS – RS) Em uma escola, as turmas de ensino médio totalizam 231 estudantes. Para uma atividade festiva na escola, todos esses estudantes foram dispostos em filas, obedecendo à seguinte disposição: 1 estudante na primeira fila, 2 estudantes na segunda fila, 3 estudantes na terceira fila, e assim sucessivamente. O número de filas que foram formadas com todos os estudantes é

a) 19 b) 21 c) 22 d) 23 e) 25

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (ACAFE – SC) O proprietário de um cinema está organizando as poltronas para um evento especial. Para atender a demanda desse evento, serão necessárias 540 poltronas. Em função da estrutura da apresentação do evento, foi solicitado que as poltronas fossem distribuídas da seguinte forma: 8 poltronas na primeira fila, 12 poltronas na segunda fila, 16 na terceira fila, e assim por diante. Com base nessas informações, é **correto** afirmar:

a) A soma das poltronas da primeira e oitava filas é diferente do número de poltronas da décima fila.
 b) Seguindo a distribuição solicitada, a décima fila terá mais de 44 poltronas.
 c) Serão necessárias 20 filas para organizar as 540 poltronas de acordo com a solicitação do evento.
 d) Seguindo a distribuição solicitada, a última fila será composta de 64 poltronas.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

11. Determine a soma dos números associados às proposições verdadeiras:

01. Os ângulos internos de um triângulo ABC estão em progressão aritmética. Sabe-se que o maior ângulo tem o triplo da medida do menor ângulo. É correto afirmar que o valor, em graus, da diferença da medida entre os dois menores ângulos desse triângulo é 30° .
02. As medidas, expressas em graus, dos ângulos internos de um triângulo retângulo constituem uma progressão aritmética. Se x é a medida de um dos ângulos agudos deste triângulo, então, $\text{tg}(x)$ pode ser igual a $\sqrt{3}$.
04. As medidas, em metro, dos comprimentos dos lados de um triângulo formam uma progressão aritmética cuja razão é igual a 1. Se a medida de um dos ângulos internos deste triângulo é 120° então, seu perímetro é um número inteiro.
08. Três números reais distintos a, b, c são tais que a, b, c e ab, bc, ca formam, nessas ordens, duas progressões aritméticas de mesma razão. O valor do produto abc é -1 .

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

12. (UDESC – SC) A soma de todos os números naturais múltiplos de 9 que são formados por quatro algarismos deixa como resto:

- a) 0 na divisão por 6
- b) 1 na divisão por 3
- c) 3 na divisão por 4
- d) 2 na divisão por 5
- e) 4 na divisão por 10

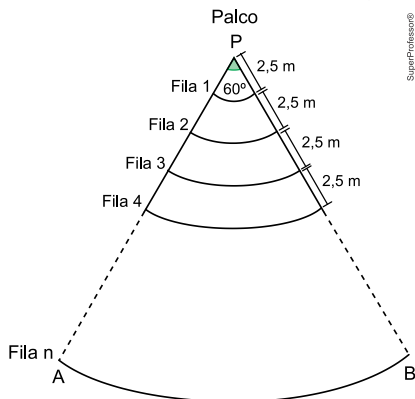
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

13. (UFRGS – RS) O valor de $\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + \dots + \log 2^{50}$ é

- a) $\log 2^{1247}$. b) $\log 2^{1274}$. c) $\log 2^{1472}$. d) $\log 2^{59}$. e) $\log 8^{59}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

14. (FAMERP) A figura representa as n filas de assentos de um teatro, com o palco em P. As filas estão igualmente espaçadas e são arcos de 60° de circunferência de centro P, sendo AB o arco da n -ésima fila. Sabe-se, ainda, que a fila 1 tem 6 assentos, a fila 2 tem 10 assentos, a fila 3 tem 14 assentos, e assim sucessivamente em progressão aritmética até a n -ésima fila.



Se a área do teatro, correspondente ao setor circular de centro P e arco AB, é de $600\pi\text{m}^2$, sua capacidade máxima, em número de assentos, é igual a

- a) 1 440.
b) 2 112.
c) 1 760.
d) 2 496.
e) 1 248.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO

1 ALTERNATIVAS (OBJETIVAS)

1. * 2. b 3. b 4. e 5. c 6. 07 7. e
8. d 9. b 10. d 11. 11 12. d 13. b 14. e

2 VERDADEIRO OU FALSO DA QUESTÃO 1

1) a) V b) V c) V d) V e) V
f) F (o correto seria 50) g) F (o correto seria 10) h) V

Resolução do Exercício 1:

a) Verdadeiro

$$\begin{cases} a_1 = 2 & a_7 = a_1 + 6r \\ a_7 = 20 & 20 = 2 + 6r \\ r = ? & 18 = 6r \rightarrow n = 3 \end{cases}$$

b) Verdadeiro

Considerando os termos como $(x - r)$, x , $(x + r)$ e utilizando as informações, temos:

$$\text{i) } (x - r) + x + (x + r) = 24 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{3} = 8$$

$$\text{ii) } (8 - r) \cdot (8) \cdot (8 + r) = 384 \Rightarrow 8 \cdot (64 - r^2) = 384 \Rightarrow 64 - r^2 = \frac{384}{8} \Rightarrow$$

$$64 - r^2 = 48 \Rightarrow r^2 = 64 - 48 \Rightarrow r = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{iii) } a_3 = x + r = (8 + 4) = 12$$

c) Verdadeiro

Sejam x , $x + r$ e $x + 2r$ as medidas, em metros, dos lados do triângulo, com $x, r > 0$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, encontramos $x = 3r$. Logo, os lados do triângulo medem $3r$, $4r$ e $5r$.

Sabendo que o perímetro do triângulo mede 48m vem

$$3r + 4r + 5r = 48 \Leftrightarrow r = 4.$$

Portanto, a hipotenusa do triângulo é igual a $5 \cdot 4 = 20$ m.

d) Considerando a propriedade da P.A., temos:

$$\frac{a_1 + a_5}{2} = a_3$$

Somando os cinco primeiros termos da P.A., obtemos:

$$\frac{(a_1 + a_5)}{2} \cdot 5 = 35 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_5)}{2} = 7 \Rightarrow a_3 = 7$$

e)

$$\begin{cases} a_1 = 2 & a_n = a_1 + (n - 1)r & S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2} \\ r = 4 & a_{20} = 2 + (20 - 1) \cdot 4 & S_{20} = (a_1 + a_{20}) \cdot \frac{20}{2} \\ S_{20} = ? & a_{20} = 78 & S_{20} = (2 + 78) \cdot 10 \\ & & \therefore S_{20} = 800 \end{cases}$$

f) Temos

$$P = \frac{2 + 100}{2} \cdot 50 = 51 \cdot 50 \text{ e } I = \frac{1 + 99}{2} \cdot 50 = 50 \cdot 50.$$

Portanto,

$$P - I = 51 \cdot 50 - 50 \cdot 50 = 50.$$

g) O primeiro termo da progressão aritmética é dado por $a_1 = S_1 = 5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -7$.

Desse modo, o segundo termo da progressão é tal que

$$\begin{aligned} a_2 &= S_2 - S_1 \\ &= 5 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - (-7) \\ &= 20 - 24 + 7 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, a razão da progressão aritmética é $r = a_2 - a_1 = 3 - (-7) = 10$.

h) Se a_1 é o primeiro termo da progressão aritmética, então

$$a_1 = S_1 = 93 \cdot 1 - 4 \cdot 1^2 = 93 - 4 = 89.$$

Logo, sendo a_2 o segundo termo dessa sequência, temos

$$\begin{aligned} a_2 &= S_2 - S_1 \\ &= 93 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 - 89 \\ &= 186 - 16 - 89 \\ &= 81. \end{aligned}$$

Portanto, a razão da progressão aritmética é $a_2 - a_1 = 81 - 89 = -8$ e o terceiro termo é $81 - 8 = 73$.

Resolução do Exercício 2: [B]

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_8 = 10 + 7 \cdot 4$$

$$a_8 = 38$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_8 = \frac{(10 + 38) \cdot 8}{2}$$

$$\therefore S_8 = 192$$

Resolução do Exercício 3: [B]

Os números de quadradinhos da sequência são termos de uma PA, com $a_1 = 1$ e $r = 2$. Sendo assim, temos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{17} = 1 + 16 \cdot 2$$

$$a_{17} = 33$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{17} = \frac{(1 + 33) \cdot 17}{2}$$

$$\therefore S_{17} = 289$$

Resolução do Exercício 4: [E]

O número de páginas lidas por dia cresce segundo uma progressão aritmética de primeiro termo 10 e razão igual a 2. Logo, segue que a resposta é dada por

$$S_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

$$\left(\frac{10 + 10 + 19 \cdot 2}{2} \right) \cdot 20 = (10 + 19) \cdot 20$$

$$= 580.$$

Resolução do Exercício 5: [C]

O número de estrelas em cada linha constitui uma progressão aritmética em que o termo geral é dado por $a_n = n$, sendo n ($n \geq 1$) o número da linha.

A soma dos 150 primeiros termos da progressão é dada por

$$S_{150} = \frac{(a_1 + a_{150})}{2} \cdot 150 = \frac{(1 + 150)}{2} \cdot 150 = 11.325.$$

Portanto, como 12.000 é o número mais próximo de 11.325, segue que o funcionário III apresentou o melhor palpite.

Resolução do Exercício 6: [07]

(3, ..., 248) P.A de 8 termos

$$248 = 3 + (8-1) \cdot r \Leftrightarrow 7r = 245 \Leftrightarrow r = 35 \text{ (será colocado um telefone a cada 35km)}$$



(01) Verdadeiro,

(02) Verdadeiro, observe a figura.

(04) Verdadeiro, pois $178 - 143 = 35$

(08) Falso, haverá telefone, observe a figura

Resolução do Exercício 7: [E]

O número de níveis da pilha é $\frac{200}{10} = 20$. Por conseguinte, como existem n latas no nível n , com n inteiro positivo e $n \leq 20$, segue que a resposta é dada por

$$\frac{1+20}{2} \cdot 20 = 210.$$

Resolução do Exercício 8: [D]

A razão da progressão aritmética é $126 - 120 = R\$ 6,00$.

Sendo S_{24} a soma dos valores das 24 parcelas e a_{19} o valor da 19ª parcela, tem-se que a resposta é

$$S_{24} - a_{19} = \left(120 + \frac{23 \cdot 6}{2} \right) \cdot 24 - (120 + 18 \cdot 6)$$

$$= 4536 - 228$$

$$= R\$ 4.308,00.$$

Resolução do Exercício 9: [B]

A sequência $(1, 2, 3, \dots, n)$ é uma progressão aritmética tal que $S = 231$ e n é o total de filas formadas com todos os estudantes.

Daí,

$$231 = \frac{(1+n) \cdot n}{2}$$

$$2 \cdot 231 = n + n^2$$

$$n^2 + n - 462 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-462)}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{2}$$

$$n = \frac{-1 \pm 43}{2}$$

Como $n > 0$,

$$n = \frac{-1 + 43}{2}$$

$$n = 21$$

Assim, foram formadas 21 filas com todos os estudantes.

Resolução do Exercício 10: [D]

Do enunciado,

PA $(8, 12, 16, \dots)$

$$\begin{cases} \frac{(8 + a_n) \cdot n}{2} = 540 \\ a_n = 8 + (n - 1) \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8 + a_n) \cdot n}{2} = 540 \\ a_n = 4 + 4n \end{cases}$$

Daí,

$$\frac{(8+4+4n) \cdot n}{2} = 540$$

$$\frac{4 \cdot (3+n) \cdot n}{2} = 540$$

$$2 \cdot (3+n) \cdot n = 540$$

$$n \cdot (n+3) = 270$$

$$n \cdot (n+3) = 15 \cdot 18$$

Como $n \in \mathbb{N}$,

$$n = 15$$

Logo,

$$a_{15} = 8 + (15-1) \cdot 4$$

$$a_{15} = 64$$

Então, a última fila será composta de 64 poltronas.

Resolução do Exercício 11: [11]

01. Correto

Os ângulos podem ser escritos em ordem crescente como $(x, y, 3x)$. E, por se tratar de uma PA, devemos ter que:

$$y - x = 3x - y$$

$$2y = 4x$$

$$y = 2x$$

Da soma dos ângulos internos de um triângulo, obtemos:

$$x + 2x + 3x = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

Portanto, a diferença da medida dentre os dois menores ângulos desse triângulo é de:

$$2 \cdot 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

02. Correto

Os ângulos do triângulo são $90^\circ - 2r$, $90^\circ - r$ e

90° . Logo, temos

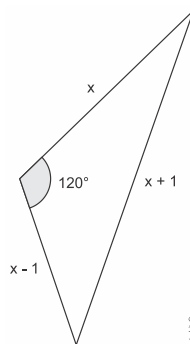
$$90^\circ - 2r + 90^\circ - r + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow r = 30^\circ.$$

Portanto, segue que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

04. Falso

Sabemos que o maior lado de um triângulo é oposto ao seu maior ângulo. Podemos, então aplicar o teorema dos cossenos no triângulo considerado no enunciado:



$$(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 - 2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 - 2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - x$$

$$2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (não convém) ou } x = \frac{5}{2}$$

Portanto, o perímetro P do triângulo será dado por:

$$P = x + x - 1 + x + 1 = 3x = 3 \cdot \frac{5}{2} = 7,5.$$

08. Correto

Da PA (a, b, c) , temos que:

$$\begin{cases} b = a + r \\ c = a + 2r \end{cases}$$

Substituindo estes valores na PA (ab, bc, ca) , ficamos com:

$$PA(a(a+r), (a+r)(a+2r), (a+2r)a) =$$

$$PA(a^2 + ar, a^2 + 3ar + 2r^2, a^2 + 2ar)$$

De onde obtemos:

$$a^2 + 2ar - (a^2 + ar) = 2r$$

$$ar = 2r \quad (r \neq 0)$$

$$a = 2$$

E:

$$a^2 + 3ar + 2r^2 - (a^2 + ar) = r$$

$$2ar + 2r^2 = r \quad (r \neq 0)$$

$$2 \cdot 2 + 2r = 1$$

$$r = -\frac{3}{2}$$

Sendo assim:

$$b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c = 2 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Logo:

$$abc = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = -1$$

Resolução do Exercício 12: [A]

Note que

$$1000 = 9 \cdot 111 + 1$$

$$1000 - 1 = 9 \cdot 111$$

$$999 = 9 \cdot 111$$

$$999 + 9 = 9 \cdot 111 + 9 \text{ (múltiplo de 9)}$$

Assim, 1.008 é o primeiro número natural de 4 algarismos que é múltiplo de 9.

Assim, os números naturais múltiplos de 9, com 4 algarismos, formam a seguinte progressão aritmética:

$$(1.008, 1.017, 1.026, 1.035, \dots, 9.999).$$

Sendo n o total de números da sequência acima, temos:

$$9999 = 1008 + (n - 1) \cdot 9$$

$$8991 = (n - 1) \cdot 9$$

$$999 = n - 1$$

$$n = 1000$$

Sendo S a soma dos números da sequência acima,

$$S = \frac{(1008 + 9999) \cdot 1000}{2}$$

$$S = 5.503.500$$

Note que $5 + 5 + 0 + 3 + 5 + 0 + 0 = 18$, que é múltiplo de 3, logo o número 5.503.500 é múltiplo de 3, logo o número 5.503.500 é divisível por 3.

Como 5.503.500 termina em 0 (zero), é divisível por 2.

Dessa forma, o número 5.503.500 é divisível por 6, ou seja, deixa resto 0 na divisão por 6.

Resolução do Exercício 13: [B]

Calculando:

$$\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + \dots + \log 2^{50}$$

$$= 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 2 + 4 \cdot \log 2 + \dots + 50 \cdot \log 2$$

$$= (2 + 3 + 4 + \dots + 50) \log 2$$

$$= \left[\frac{(2 + 50) \cdot 49}{2} \right] \log 2$$

$$= 1274 \cdot \log 2$$

$$= \log 2^{1274}$$

Resolução do Exercício 14: [E]

Da área dada, obtemos o raio R do setor circular correspondente à sala do teatro:

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} \pi R^2 = 600 \pi$$

$$R = 60 \text{ m}$$

Quantidade de filas na sala:

$$n = \frac{60}{2,5} = 24 \text{ filas}$$

Quantidade de assentos na última fila:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{24} = 6 + (24 - 1) \cdot 4$$

$$a_{24} = 98 \text{ assentos}$$

Logo, a número total de assentos na sala é de:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{24} = \frac{(6 + 98) \cdot 24}{2}$$

$$\therefore S_{24} = 1248 \text{ assentos}$$

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - AULA 03



ASSISTA À AULA



DEFINIÇÃO

Denomina-se progressão geométrica uma sequência de números não nulos em que, a partir do segundo elemento, o quociente entre cada elemento e seu antecessor é constante. Essa constante é denominada razão da P.G. e é indicada por q .

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = q$$

EXEMPLO

O valor de x para que $(1 + x)$, $(13 + x)$ e $(49 + x)$ sejam termos consecutivos de uma P.G. é:

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a_1 = 1 + x \\ a_2 = 13 + x \\ a_3 = 49 + x \end{cases}$$

Usando a definição de progressão geométrica, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{a_3}{a_2} \\ \frac{13+x}{1+x} &= \frac{49+x}{13+x} \\ (13+x)^2 &= (1+x)(49+x) \\ 169 + 26x + x^2 &= 49 + x + 49x + x^2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Portanto, a sequência acima é uma progressão geométrica se $x = 5$. Faça o teste e tire a prova real!

CLASSIFICAÇÃO

1º caso: $a_1 > 0$

Se $q > 0 \rightarrow$ P.G. crescente. Ex.: $(2, 6, 18, 54, \dots)$

Se $q = 1 \rightarrow$ P.G. constante. Ex.: $(5, 5, 5, 5, \dots)$

Se $0 < q < 1 \rightarrow$ P.G. decrescente. Ex.: $(256, 64, 16, \dots)$

2º caso: $a_1 < 0$

Se $q > 0 \rightarrow$ P.G. decrescente. Ex.: $(-2, -10, -50, \dots)$

Se $q = 1 \rightarrow$ P.G. constante. Ex.: $(-3, -3, -3, \dots)$

Se $0 < q < 1 \rightarrow$ P.G. crescente. Ex.: $(-40, -20, -10, \dots)$

OBSERVAÇÃO

São denominadas P.G. alternantes ou oscilantes aquelas em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso ocorre quando a razão for negativa.

$$+a_1 \rightarrow -a_2 \rightarrow +a_3 \rightarrow -a_4 \rightarrow +a_5$$

$q < 0$

TERMO GERAL

Considere a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$. Acompanhe o desenvolvimento:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

.

.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

IMPORTANTE

Podemos relacionar dois termos quaisquer de uma P.G. usando a relação:

$$a_m = a_k \cdot q^{m-k}$$

$$a_8 = a_3 \cdot q^5$$

$$a_{13} = a_3 \cdot q^{10}$$

$$a_{20} = a_{13} \cdot q^7$$

EXEMPLO

Quantos termos tem a P.G. (3, 9, ..., 243)?

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a_1 = 3 \\ q = \frac{9}{3} = 3 \\ a_n = 243 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$243 = 3 \cdot 3^{n-1}$$

$$3^5 = 3^n$$

$$n = 5$$

EXEMPLO

Numa P.G. o 4º termo vale 81 e o 2º vale 9. Ache a razão.

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a_4 = 81 \\ a_2 = 9 \end{cases}$$

$$a_4 = a_2 \cdot q^2$$

$$81 = 9 \cdot q^2$$

$$9 = q^2$$

$$q = \pm 3$$

PROPRIEDADES

Média Geométrica

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots)$ um termo qualquer excetuando os extremos é a média geométrica entre o termo anterior e o posterior, ou seja:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Termos Equidistantes

Em uma P.G. limitada $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, o produto dos termos extremos é igual ao produto dos termos equidistantes dos extremos, ou seja:

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$$

Veja por exemplo que na P.G. (2, 4, 8, 16, 32, 64)
 $2 \cdot 64 = 4 \cdot 32 = 8 \cdot 16$.

Se a P.G. possuir um número ímpar de termos daí o termo central ao quadrado é igual ao produto dos termos vizinhos a ele.

Veja por exemplo que na P.G. (2, 4, 8, 16, 32)
 $2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8^2$.

ARTIFÍCIOS EM P.G.

A fim de facilitar a resolução de alguns problemas em P.G. podemos utilizar os seguintes artifícios:

- Três termos em P.G. de razão $q = k$.

$$\frac{x}{k}, x, xk$$

- Quatro termos em P.G. de razão $q = k^2$.

$$\frac{x}{k^3}, \frac{x}{k}, xk, xk^3$$

- Cinco termos em P.G. de razão $q = k$.

$$\frac{x}{k^2}, \frac{x}{k}, x, xk, xk^2$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. A sequência $(1 + x)$, $(13 + x)$ e $(49 + x)$,... representa uma P.G. Com base no exposto, determine:

- a) O valor de x
- b) A razão da P.G.
- c) sétimo termo da P.G

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Considere a P.G $(5, 10, 20, \dots)$. Nessa P.G o valor do décimo primeiro termo é:

- a) 2560
- b) 5120
- c) 4820
- d) 3820
- e) 1024

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (PUC – PR) Uma determinada cultura de bactérias cresce em progressão geométrica (PG). Sabendo que $3x - 8$, $x + 16$ e $5x + 80$ são, nesta ordem, os três primeiros termos dessa PG, assinale a alternativa CORRETA.

- a) O quarto termo dessa PG é igual a 500.
- b) A razão da PG é igual a 6.
- c) O segundo termo dessa PG é 25.
- d) Não é possível determinar os termos da PG.
- e) A soma dos termos dessa PG é 150.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. Seja a P.G. (24, 36, 54, ...). Ao somar o 5º e o 6º termos dessa P.G. tem-se

- a) $81/2$ b) $405/2$ c) $1215/4$ d) $1435/4$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. Um estudante fez três provas de matemática, P_1 , P_2 e P_3 , cujas notas, nessa ordem, formavam uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$. Se a diferença entre a maior e a menor nota foi 5, então, a maior nota foi

- a) 7,5. b) 9,0. c) 10,0. d) 4,5. e) 6,0.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

6. (UDESC – SC) O primeiro termo de uma progressão geométrica é 10, o quarto termo é 80; logo, a razão dessa progressão é:

- a) 2 b) 10 c) 5 d) 4 e) 6

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (PUC – RJ) Sabendo que os números da sequência (5, m, n, 10) estão em progressão geométrica, quanto vale o produto $m \cdot n$?

- a) 10 b) 20 c) 50 d) 100 e) 225

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. A soma de três números em P.G. é 39 e o produto entre eles é 729. Sabendo que a P.G. é crescente, determine o maior dos termos:

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

9. (UFMS – MS) Observe a sequência de números a seguir:
(2, 5, 7, 25, 12, 125, ...)
A sequência mantém um padrão constante. Assim, a soma do 10º e do 11º termos é:
- a) 3.152. b) 3.125. c) 652. d) 647. e) 625.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UDESC – SC) O número de termos da P.G. $\left(a, b, \frac{10}{27}, c, \frac{2}{9}, \dots, \frac{2}{25}, d, e\right)$ é igual a:

a) 9 b) 10 c) 8 d) 11 e) 12

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

11. (UEPG – PR) Entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{20}$ são inseridos três meios geométricos. Se a P.G. formada é oscilante, assinale o que for correto.

01. A sua razão é um número negativo.
02. O termo médio é um número positivo.
04. $\frac{a_4}{a_2} = \frac{1}{4}$.
08. $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{5}$.
16. $a_4 < 0$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

12. (UNICENTRO) Uma pessoa comprou uma casa no valor de R\$ 211.000,00 e vai pagar em cinco parcelas. O valor de cada parcela é decrescente e corresponde aos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor da quinta parcela.

- a) R\$ 10.000,00 b) R\$ 16.000,00 c) R\$ 21.000,00 d) R\$ 24.000,00 e) R\$ 81.000,00

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3



13. (UFMS – MS) Seja (a, b, c) uma progressão geométrica de números reais. Suponha que $a+b+c=26$ e $a^2+b^2+c^2=364$. Nessas condições, qual o valor de b ?

- a) 4. b) 6. c) 8. d) 10. e) 12.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

14. (IME – RJ) Dez números reais formam uma progressão geométrica (PG) com razão $q > 1$. Removem-se ao acaso cinco desses números. A probabilidade de que os cinco números restantes estejam em PG é

- a) $\frac{1}{252}$ b) $\frac{1}{126}$ c) $\frac{3}{126}$ d) $\frac{2}{63}$ e) $\frac{3}{63}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

15. (UFF – RJ) A população de marlim-azul foi reduzida a 20% da existente há cinqüenta anos (em 1953). Considerando que foi constante a razão anual (razão entre a população de um ano e a do ano anterior) com que essa população decresceu durante esse período, conclui-se que a população de marlim-azul, ao final dos primeiros vinte e cinco anos (em 1978), ficou reduzida a aproximadamente:

- a) 10% da população existente em 1953
b) 20% da população existente em 1953
c) 30% da população existente em 1953
d) 45% da população existente em 1953
e) 65% da população existente em 1953

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO

- | | | | | | |
|---------|-------|---------|-------|-------|-------|
| 1. a) 5 | b) 3 | c) 4374 | 2. b | | |
| 3. a | 4. c | 5. b | 6. a | 7. c | 8. 27 |
| 9. a | 10. d | 11. 31 | 12. b | 13. b | 14. d |

Resolução do Exercício 1:

$$a) \begin{cases} a_1 = 1+x & \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \\ a_2 = 13+x & \frac{13+x}{1+x} = \frac{49+x}{13+x} \\ a_3 = 49+x & (13+x)^2 = (1+x) \cdot (49+x) \end{cases}$$

$$169 + 26x + x^2 = 49 + x + 49x + x^2$$

$$x = 5$$

b) Substituindo x por 5, temos:

$$(6, 18, 54, \dots). \text{ Logo: } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{18}{6} = 3$$

c)

$$a_7 = a_1 \cdot q^6$$

$$a_7 = 6 \cdot 3^6$$

$$a_7 = 4374$$

Resolução do Exercício 2: [B]

$$a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$$

$$a_{11} = 5 \cdot 2^{10}$$

$$a_{11} = 5120$$

Resolução do Exercício 3: [A]

Como todos os termos são positivos, temos

$x > \frac{8}{3}$. Logo, vem

$$(x+16)^2 = (3x-8)(5x+80) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 32x + 256 = 15x^2 + 200x - 640$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$\Rightarrow x = 4.$$

Assim, a progressão geométrica é $(4, 20, 100, \dots, 4 \cdot 5^{n-1}, \dots)$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

O quarto termo da progressão geométrica é $100 \cdot 5 = 500$.

A razão da progressão geométrica é 5.

O segundo termo da progressão é 20.

A progressão geométrica é crescente e, portanto, divergente.

Resolução do Exercício 4: [C]

Razão da P.G.:

$$q = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$a_5 + a_6 = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$a_5 + a_6 = \frac{486}{4} + \frac{729}{4}$$

$$\therefore a_5 + a_6 = \frac{1215}{4}$$

Resolução do Exercício 5: [B]

As notas das provas podem ser escritas como

$$\left\{x, \frac{3x}{2}, \frac{9x}{4}\right\}. \text{ Logo:}$$

$$\frac{9x}{4} - x = 5$$

$$\frac{5x}{4} = 5$$

$$x = 4$$

Portanto, a maior nota foi:

$$\frac{9}{4} \cdot 4 = 9$$

Resolução do Exercício 6: [A]

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$80 = 10 \cdot q^3$$

$$q = 2$$

Resolução do Exercício 7: [C]

O produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

$$m \cdot n = 5 \cdot 10 \Leftrightarrow m \cdot n = 50$$

Resolução do Exercício 8: [27]

Considerando os dados do problema, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 729 & \text{(I)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 39 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), vem:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 729 \Rightarrow x^3 = 729 \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

Substituindo $x = 9$ na equação (II), temos:

$$\frac{9}{q} + 9 + 9q = 39$$

$$9q^2 + 9q + 9 = 39q \Rightarrow$$

$$9q^2 - 30q + 9 = 0$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3} (\text{não serve})$$

Logo, o maior termo da P.G. (xq) é igual a 27.

Resolução do Exercício 9: [A]

A sequência dada pode ser separada em duas da seguinte forma:

$$S_1 = (2, 7, 12, \dots) \text{ e } S_2 = (5, 25, 125, \dots)$$

Em que S_1 é uma PA de razão 5 e S_2 é uma PG de razão 5. Sendo assim, o 10º termo é o 5º termo da PG e o 11º termo é o 6º termo da PA. Logo:

$$a_{10} = 5 \cdot 5^{5-1} = 3125$$

$$a_{11} = 2 + (6-1) \cdot 5 = 27$$

Portanto, a soma do 10º e do 11º termos vale 3152.

Resolução do Exercício 10: [D]

$$PG \left(a, b, \frac{10}{27}, c, \frac{2}{9}, \dots, \frac{2}{25}, d, e \right)$$

Seja q a razão da PG.

Daí,

$$\frac{10}{27} \cdot q^2 = \frac{2}{9} \quad (\text{i})$$

$$a \cdot q^2 = \frac{10}{27} \quad (\text{ii})$$

$$\frac{2}{25} \cdot q^2 = e \quad (\text{iii})$$

Da equação (i),

$$q^2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{27}{10}$$

$$q^2 = \frac{3}{5}$$

Substituindo $q^2 = \frac{3}{5}$ na equação (ii),

$$a \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{27}$$

$$a = \frac{10}{27} \cdot \frac{5}{3}$$

$$a = \frac{50}{81}$$

Substituindo $q^2 = \frac{3}{5}$ na equação (iii),

$$\frac{2}{25} \cdot \frac{3}{5} = e$$

$$e = \frac{6}{125}$$

Sendo n o número de termos da PG, temos:

$$\frac{6}{125} = \frac{50}{81} \cdot q^{n-1}$$

$$q^{n-1} = \frac{243}{3125}$$

$$q^{n-1} = \left(\frac{3}{5} \right)^5$$

$$\left(q^{n-1} \right)^2 = \left(\left(\frac{3}{5} \right)^5 \right)^2$$

$$\left(q^2 \right)^{n-1} = \left(\frac{3}{5} \right)^{10}$$

$$\left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} = \left(\frac{3}{5} \right)^{10}$$

$$n-1=10$$

$$n=11$$

Resolução do Exercício 11: [31]

Cálculos auxiliares

$$\left(\frac{4}{5}, a_2, a_3, a_4, \frac{1}{20} \right) \leftrightarrow \text{PG oscilante}$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^{n-1} \leftrightarrow \frac{1}{20} = \frac{4}{5} \cdot q^4 \leftrightarrow q = -\frac{1}{2} \text{ (oscilante)}$$

Portanto:

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{10}, \frac{4}{20}, -\frac{4}{40}, \frac{4}{80} \right) \leftrightarrow \text{PG oscilante}$$

Item (01) – Verdadeiro

$$\text{Calculado acima: } q = -\frac{1}{2}$$

Item (02) – Verdadeiro

$$a_3 = \frac{4}{20}$$

Item (04) – Verdadeiro

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 q^3}{a_1 q} = q^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Item (08) – Verdadeiro

$$a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{4}{5} \right) + \left(-\frac{4}{10} \right) + \left(\frac{4}{20} \right) = \frac{3}{5}$$

Item (16) – Verdadeiro

$$a_4 = -\frac{4}{40} < 0.$$

Resolução do Exercício 12: [B]

Considerando uma P.G. de 5 termos e razão $q = 2/3$, temos:

$$\frac{x}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \frac{x}{\frac{2}{3}} + x + x \cdot \frac{2}{3} + x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 211.000$$

$$\frac{9x}{4} + \frac{3x}{2} + x + \frac{2x}{3} + \frac{4x}{9} = 211.000$$

$$\frac{81x + 54x + 36x + 24x + 16x}{36} = \frac{36 \cdot 211.000}{36}$$

$$\frac{211x}{36} = \frac{36 \cdot 211.000}{36} \Rightarrow x = 36.000$$

Logo a última prestação será:

$$\frac{4}{9} \cdot (R\$36.000) = R\$16.000,00$$

Resolução do Exercício 13: [B]

Elevando a primeira relação ao quadrado, temos:

$$(a+b+c)^2 = 26^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 676$$

$$364 + 2(ab+ac+bc) = 676$$

$$ab+ac+bc = 156$$

Como $ac = b^2$, chegamos a:

$$ab + b^2 + bc = 156$$

$$b(a+b+c) = 156$$

$$b \cdot 26 = 156$$

$$\therefore b = 6$$

Resolução do Exercício 14: [D]

Para que os termos restantes formem uma PG, eles podem estar numa razão q ou q^2 , resultando em 8 possibilidades como ilustrado abaixo:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, $(a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$, $(a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$,
 $(a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$, $(a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$, $(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9)$, $(a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10})$

Número de maneiras de escolher 5 números:

$$C_{10,5} = 252$$

Portanto, a probabilidade pedida vale:

$$P = \frac{8}{252} = \frac{2}{63}$$

Resolução do Exercício 15: [D]

A população foi, num período de 25 anos, multiplicada por k , e depois foi novamente multiplicada por k nos 25 anos seguintes.

Logo, foi multiplicada, em 50 anos, por $k^2 = 0,2$

Então k é aproximadamente 0,446.

Mais ou menos 45%.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA - AULA 04



ASSISTA À AULA



SOMA DOS TERMOS DA P.G DIVERGENTE

Sendo $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ uma P.G de razão $q \neq 1$.

A soma dos "n" primeiros termos dessa P.G. é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

EXEMPLO

Determine a soma dos 6 primeiros termos da P.G. (1, 3, 9,...)

Resolução: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} = 364$$

Demonstração da fórmula acima:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros por q , temos $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots\right)$

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q = \underbrace{a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n}_{S_n - a_1} + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q = S_n - a_1 + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n(q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

SOMA DOS TERMOS DA P.G CONVERGENTE

Dada uma P.G. de razão q de modo que $-1 < q < 1$. A soma dos infinitos termos dessa P.G. é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \quad -1 < q < 1$$

Justificativa: Sempre que a razão da P.G. estiver compreendida entre -1 e 1 ($-1 < q < 1$), a expressão q^n se aproxima de zero à medida que o número de termos da sequência tende ao infinito.

Para $-1 < q < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = 0$

$$S_\infty = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

EXEMPLO

Calcular a soma dos termos da P.G.

$$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A razão da P.G está entre 0 e 1 e não se faz menção onde a P.G termina.

Resolução: $S = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \Rightarrow S = \frac{4}{3}$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Calcular as somas abaixo:

a) $S = 1 + 0,5 + 0,25 + 0,125 + \dots$

b) $S = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \dots$

c) $S = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \dots$

d) $S = 10 + 4 + \frac{8}{5} + \dots$

e) $S = 3 + 6 + 12 + \dots + 768$

f) $S = 4 + 8 + 16 + \dots + 2.048$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Determine o valor de x nas equações abaixo:

a) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \dots = 18$

b) $x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \dots = 16$

c) $\frac{3x}{4} + \frac{9x}{20} + \frac{27x}{100} + \dots = 200$

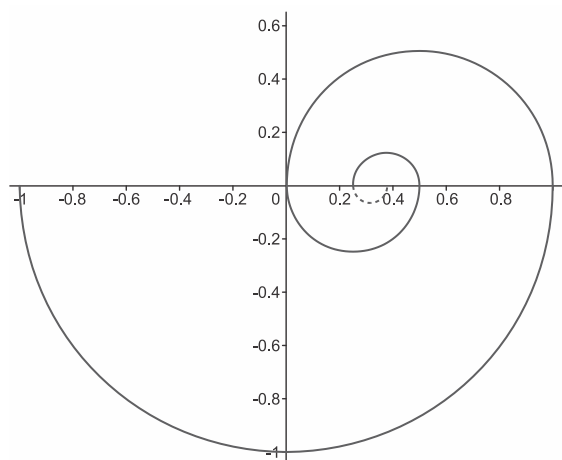
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (UNICAMP – SP) Seja x um número real tal que os primeiros três termos de uma progressão geométrica infinita são $1, 2x, -3x + 1$, nesta ordem. Sabendo que todos os termos da progressão são positivos, a soma de todos eles é igual a

a) $3/2$ b) 2 c) $5/2$ d) 3

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (FAC PEQUENO PRÍNCIPE) Um aluno curioso resolveu criar uma espiral usando semicírculos em um processo infinito da seguinte forma: ele começa com uma semicircunferência centrada na origem de raio 1 no hemisfério sul do plano cartesiano, depois conecta o ponto $(1, 0)$ com uma semicircunferência de raio $1/2$ no hemisfério norte do plano, em seguida, conecta no ponto $(0, 0)$ uma semicircunferência de raio $1/4$ no hemisfério sul do plano e assim por diante, fazendo o raio de cada semicircunferência construída ser metade do raio da semicircunferência da etapa anterior no processo. As primeiras etapas do processo podem ser vistas na figura abaixo.



É **CORRETO** afirmar que o comprimento total dessa espiral infinita é

Dado: $C_{\text{circunferência}} = 2\pi R$

- a) π
b) 2π
c) 4π
d) $7\pi/4$
e) $15\pi/8$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (UDESC – SC) O objetivo de um concurso era criar o ser vivo matemático mais curioso. O vencedor, batizado por seus criadores de *Punctorum Grande*, possuía as seguintes características: no seu nascimento ele era composto apenas por um ponto, e após 40 minutos duas hastes saíam deste ponto com um novo ponto. Após mais 40 minutos, outras duas hastes, com um novo ponto em cada, saíam de cada um dos pontos existentes e assim sucessivamente a cada 40 minutos.

O número de pontos que esse ser vivo tinha após cinco horas e vinte minutos do seu nascimento, era:

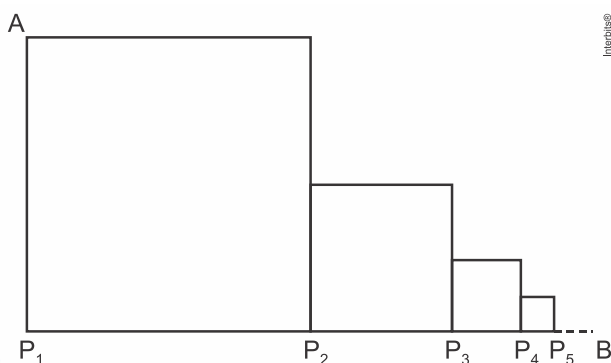
- a) 6561 b) 255 c) 2187 d) 4347 e) 64

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

6. (UFRGS – RS) A figura a seguir é formada por quadrados de lados $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, e assim sucessivamente.

A construção é tal que os pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, B$ são colineares, e as bases dos quadrados têm medidas $\overline{P_1P_2} = 1$, $\overline{P_2P_3} = \frac{1}{2}$, $\overline{P_3P_4} = \frac{1}{4}$ e assim por diante. O ponto A é vértice do quadrado de lado $\overline{P_1P_2}$, como representado na figura abaixo.



A medida do segmento $\overline{AB}$ é

- a) 1.
b) $\sqrt{2}$.
c) $\sqrt{3}$.
d) 2.
e) $\sqrt{5}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (FATEC) Uma pessoa, com 95 kg de massa, preocupada com sua saúde, resolveu procurar um médico especialista que lhe receitou uma dieta para emagrecimento saudável. No primeiro trimestre, ela conseguiu reduzir 14 kg. A partir daí, a cada trimestre ela percebe que só consegue reduzir metade da massa reduzida no trimestre anterior. Suponha que essa dieta seja a única maneira para ela reduzir sua massa e que seja mantida indefinidamente.

Assim sendo, mantendo os parâmetros de redução de massa apresentados, sua massa se aproximará cada vez mais de

- a) 55 kg. b) 60 kg. c) 62 kg. d) 67 kg. e) 70 kg.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UEL – PR) Para um campeonato de xadrez, inscreveram-se 16.384 pessoas. A cada rodada, os participantes disputavam um contra um e os perdedores eram eliminados da competição. A organização do evento optou por identificar os participantes com crachás que continham seu nome e o número da atual rodada. A cada rodada, os participantes recebiam novos crachás. Ao final de todas as rodadas, o vencedor também recebeu um novo crachá. Com base nessas informações, responda aos itens a seguir.

- a) Quantos crachás foram confeccionados para a realização desse campeonato?
b) Quantas rodadas são necessárias até se chegar ao vencedor?

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

9. (UFPR – PR) Considere a seguinte sequência de funções polinomiais do segundo grau:

$$p_1(x) = 2x^2 + \frac{x}{3} - 3, \quad p_2(x) = 2x^2 + \frac{x}{9} - 9, \quad p_3(x) = 2x^2 + \frac{x}{27} - 27, \dots, \quad p_n(x) = 2x^2 + \frac{x}{3^n} - 3^n, \dots$$

Denotando por s_1 a soma das raízes de $p_1(x)$, s_2 a soma das raízes de $p_2(x)$ e assim por diante, pode-se concluir que a soma infinita $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots$ é igual a:

- a) $-1/2$. b) $-1/4$. c) $-1/8$. d) $1/4$. e) $1/2$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UDESC – SC) Seja $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ uma sequência de números reais em que $a_1 = 1$ e os demais termos são definidos do seguinte modo:

$$a_{n+1} = \sqrt{2} a_n, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Sabendo que a soma de todos os números de a_1 até a_k (inclusive) é igual a $127(\sqrt{2} + 1)$, tem-se que o número $(a_k)^3$ é igual a:

- a) $2^{19}\sqrt{2}$ b) $2^6\sqrt{2}$ c) $2^{16}\sqrt{2}$ d) $2^{10}\sqrt{2}$ e) 2^{10}

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

Gabarito

1. * 2. * 3. b 4. b 5. a 6. e 7. d
8. * 9. b 10. a

1) a) 2 b) $32/3$ c) 10 d) $50/3$ e) 1533 f) 4092

2) a) $x = 12$ b) $x = 12$ c) $x = \frac{320}{3}$

3) a) 32767 b) 14

8) a) 32 767 b) 14

Resolução do Exercício 1:

a)

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1 - q} \\ &= \frac{8}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1 - q} \\ &= \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = 10. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} S &= \frac{10}{1 - \frac{2}{5}} \\ S &= \frac{10}{\frac{3}{5}} = \\ S &= 10 \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ 768 &= 3 \cdot 2^{n-1} \\ 256 &= 2^{n-1} \\ 2^8 &= 2^{n-1} \\ n &= 9 \\ S_9 &= \frac{3(2^9 - 1)}{2 - 1} = 3.511 = 1533 \end{aligned}$$

f)

Da PG (4, 8, 16, ..., 2048), temos:

$$q = \frac{8}{4} = 2, \text{ onde } q \text{ é a razão da PG.}$$

$$2048 = 4 \cdot 2^{n-1}, \text{ onde } n \text{ é o número de termos da PG.}$$

$$\frac{2048}{4} = 2^{n-1}$$

$$512 = 2^{n-1}$$

$$2^9 = 2^{n-1}$$

$$n = 10$$

Então,

$$S = \frac{4 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$S = 4092$$

Resolução do Exercício 2:

a) Utilizando a fórmula da PG infinita, obtemos:

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = 18$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot 18$$

$$\therefore x = 12$$

b) A equação é uma progressão geométrica de razão $q = 1/4$. Sabe-se, pelo enunciado, que a soma de todos os termos dessa PG é 16, e que ela é infinita. Assim, pode-se escrever:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \Leftrightarrow 16 = \frac{x}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4x}{3} \Leftrightarrow 16 = \frac{4x}{3} \Leftrightarrow x = 12$$

c)

$$\frac{\frac{3x}{4}}{1 - \frac{3}{5}} = 200 \Leftrightarrow \frac{\frac{3x}{4}}{\frac{2}{5}} = 200 \Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{2}{5} \cdot 200$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{4} = 80 \Leftrightarrow \therefore x = \frac{320}{3}$$

Resolução do Exercício 3: [B]

Se todos os termos da progressão são positivos, então $2x > 0$ e $-3x + 1 > 0$ implicam em

$$0 < x < \frac{1}{3}. \text{ Logo, vem}$$

$$(2x)^2 = 1 \cdot (-3x + 1) \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Portanto, temos

$$(1, 2x, -3x + 1, \dots) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right),$$

com $n \in \mathbb{N}^*$.

Como o primeiro termo é 1 e a razão é $\frac{1}{2}$,

encontramos

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Resolução do Exercício 4: [B]

Os comprimentos das semicircunferências constituem a progressão geométrica

$$\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \dots\right).$$

Logo, como a razão dessa progressão é $\frac{1}{2}$,

segue que a resposta é

$$\frac{\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi.$$

Resolução do Exercício 5: [A]

$$5h20min = 320min$$

$$\frac{320}{40} = 8 \text{ períodos de 40 minutos cada.}$$

Temos então, que a soma de todos os pontos formados, obedecendo às condições do problema, é:

$$S = 1 + 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458$$

Considerando que, a partir da segunda parcela, existe uma P.G., temos:

$$S = 1 + \frac{2 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = 6561$$

Resolução do Exercício 6: [E]

As medidas dos lados dos quadrados constituem a progressão geométrica

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right). \text{ Logo, temos}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_1B} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Tomando o triângulo AP_1B , pelo Teorema de Pitágoras, vem

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AP_1}^2 + \overline{P_1B}^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 = 1^2 + 2^2 \\ &\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 7: [D]

Como a razão das massas perdidas a cada trimestre é de $\frac{1}{2}$, a massa total que a pessoa poderá perder é dada por:

$$M = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{14}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$M = 28 \text{ kg}$$

Logo, a massa da pessoa se aproximará de:
95 kg - 28 kg = 67 kg

Resolução do Exercício 8:

a) De acordo com o enunciado, a quantidade de crachás confeccionados em cada rodada é dada pela sequência (mostrada abaixo) de termos de uma PG de razão $\frac{1}{2}$: (16384, 8192, 4096, ..., 1).

E o número n de termos dessa PG vale:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ 1 &= 16384 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{14} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Sendo assim, a quantidade total S de crachás é de:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \\ S &= \frac{16384 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{15} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{14} \cdot \left(\frac{1 - 2^{15}}{2^{15}}\right)}{-\frac{1}{2}} \\ S &= \frac{1 - 32768}{-\frac{1}{2}} = \frac{32767}{\frac{1}{2}} \\ \therefore S &= 32767 \end{aligned}$$

b) O número R de rodadas é dado por:

$$\begin{aligned} R &= n - 1 \\ \therefore R &= 14 \end{aligned}$$

Resolução do Exercício 9: [B]

Pelas Relações de Girard, tem-se que

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{2 \cdot 3}, \\s_2 &= \frac{-\frac{1}{9}}{2} = -\frac{1}{2 \cdot 3^2}, \\&\vdots \\s_n &= \frac{-\frac{1}{3^n}}{2} = -\frac{1}{2 \cdot 3^n} \\&\vdots\end{aligned}$$

Portanto, vem

$$\begin{aligned}s &= -\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \dots - \frac{1}{2 \cdot 3^n} - \dots \\&= -\frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots\right) \\&= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\&= -\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} \\&= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Resolução do Exercício 10: [A]

A sequência descrita é uma PG de razão $q = \sqrt{2}$. Para que a soma dos termos seja $127(\sqrt{2} + 1)$, o número de termos dessa PG deve ser de:

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \\127(\sqrt{2} + 1) &= \frac{1 \cdot (\sqrt{2}^n - 1)}{\sqrt{2} - 1} \\127(2 - 1) &= \sqrt{2}^n - 1 \\128 &= \sqrt{2}^n \\2^7 &= 2^{\frac{n}{2}} \\n &= 14\end{aligned}$$

E o 14º termo é igual a:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 q^{n-1} \\a_{14} &= 1 \cdot \sqrt{2}^{14-1} \\a_{14} &= \sqrt{2}^{13}\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}(a_{14})^3 &= \left(\sqrt{2}^{13}\right)^3 = \sqrt{2}^{39} = \sqrt{2}^{38} \cdot \sqrt{2} \\&\therefore (a_{14})^3 = 2^{19} \sqrt{2}\end{aligned}$$



P.A

Progressões

Resumo de P.A e P.G

P.G

Progressão Aritmética

- ▶ **Razão da P.A**

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$
- ▶ **Termo Geral**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_8 = a_1 + 7r$$

$$a_{12} = a_1 + 11r$$

$$a_{15} = a_1 + 14r$$
- ▶ **Soma dos Termos**

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$
- ▶ **3 termos em P.A**

$$x - r, x, x + r$$

Progressão Geométrica

- ▶ **Razão da P.G**

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$
- ▶ **Termo Geral**

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_8 = a_1 \cdot q^7$$

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11}$$

$$a_{15} = a_1 \cdot q^{14}$$
- ▶ **Soma da PG divergente**

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}; |q| > 1$$
- ▶ **Soma da PG convergente**

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}; |q| < 1$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. Observe os itens abaixo:

- I. Considerando uma Progressão Aritmética (PA) com o primeiro termo igual a 3 e cuja razão é igual a 7, o décimo oitavo termo dessa progressão aritmética é igual a 122.
- II. Em uma Progressão Aritmética (PA), o décimo termo vale -5 e o décimo quinto termo vale 10. É correto afirmar que o sétimo termo dessa PA é -14 .
- III. Considere a progressão aritmética cujos primeiros termos são $a_1 = 11$, $a_2 = 21$, $a_3 = 31$. É correto afirmar que a diferença $a_9 - a_7$ é um número primo.
- IV. Os dois primeiros termos de uma progressão aritmética são $a_1 = \frac{7}{3}$ e $a_2 = \frac{25}{12}$. A soma dos 20 primeiros termos dessa progressão aritmética é igual a $-\frac{5}{6}$.

Está(ão) falso(s):

- a) Itens I e III b) Somente item III c) Itens II e IV d) Itens III e IV e) Somente item IV

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



2. Observe os itens abaixo:

- I. Considere a P.G (3, 6, 12, ...). Nessa P.G o valor do décimo segundo termo é 6144.
- II. O terceiro termo de uma progressão geométrica é 10, o oitavo termo é 320; logo, a razão dessa progressão é um número ímpar.
- III. O valor da soma $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$ é 2.
- IV. A soma dos 7 primeiros termos da P.G 2, 6, 18,...) é 2186.

Está(ão) falso(s):

- a) Itens I e III b) Somente item III c) Itens II e IV d) Itens III e IV e) Somente item II

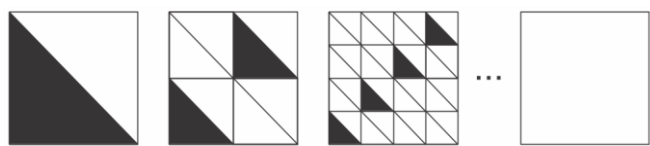
ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (UFSC - Adaptada) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) correta(s) e transfira o resultado para o cartão-resposta.

- 01. Se os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética e o perímetro do triângulo é 15 cm, então a hipotenusa mede 6,25 cm.
- 02. Se em uma progressão aritmética o décimo termo é 3 e a soma dos 20 primeiros termos é 180, então o primeiro termo é 105.
- 04. Existem 150 números inteiros entre 100 e 1.000 divisíveis por 6.
- 08. Se em uma progressão aritmética a soma do 4º termo com o 37º termo é 81, então a soma dos 40 primeiros termos dessa progressão é 1.620.
- 16. Se a sequência $(x, y, 10)$ é uma progressão aritmética e a sequência $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x+10})$ é uma progressão geométrica, então x é o dobro de y .

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (ESA) As figuras abaixo foram desenhadas segundo uma progressão geométrica. Seguindo este padrão, qual é a fração que representa a região não sombreada da FIGURA 8?



- a) $\frac{1}{512}$ b) $\frac{1}{256}$ c) $\frac{1}{128}$ d) $\frac{127}{128}$ e) $\frac{255}{256}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (UFRGS – RS) O valor da expressão $a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} + \dots$ para $a = 15$ é

- a) 20. b) 16. c) 15. d) 10. e) 8.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

6. (UEPG - PR) Definindo a função

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x}{10}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{1}{2^x}$, e considerando os números $A = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)$,

$B = 50 + g(1) + g(2) + \dots + g(n) + \dots$, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, assinale o que for correto.

01. $A + B > 600$.
02. $A > B$.
04. $A - B < 400$.
08. $A < 10 B$.
16. A é múltiplo de B .

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



7. (PUC – SP) Sabendo-se que x , y , 14 e x , y , 32 são termos consecutivos de uma P.A. crescente e de uma P.G., respectivamente, o valor de $x + y$ é:

- a) 8 b) 5 c) 10 d) 9 e) 6

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UFRGS – RS) O valor da expressão $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \dots$ é

- a) $\frac{1}{2}$. b) 1. c) $\sqrt{2}$. d) $2\sqrt{2}$. e) $3\sqrt{2}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

9. (UEM – PR) Assinale o que for correto.

- 01. Uma P.A. em que $a_7 = 3a_1$ e $a_4 = 6$ tem razão igual a 1.
- 02. Se x , y e z são, nessa ordem, três termos consecutivos de uma P.G., então $y^2 = xz$.
- 04. A sequência definida recursivamente como $a_1 = 10$ e $a_{n+1} = \frac{3a_n+8}{6}$ é uma P.A. de razão $4/3$.
- 08. Há um inteiro k tal que o k -ésimo termo da P.A. $(2, 7, 12, \dots)$ e o k -ésimo termo da P.A. $(552, 532, 512, \dots)$ são iguais.
- 16. A sequência definida por $a_n = 3^{2-n}$ é uma P.G. de razão negativa.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UEM – PR) Assinale o que for correto.

- 01. Existe um quadrado em que as medidas de um de seus lados, da sua diagonal e da sua área são 3 termos consecutivos de uma PG.
- 02. Não existe um cubo em que as medidas de uma de suas arestas, da área de uma de suas faces e do seu volume, são 3 termos consecutivos de uma PA.
- 04. Se o volume de água em um reservatório dobra de hora em hora e se esse reservatório está cheio à meia-noite, então ao meio-dia a água ocupará a metade do volume total desse reservatório.
- 08. Entre 25 e 575 há 65 números cujo algarismo das unidades é igual a 4.
- 16. A soma S_n dos n primeiros termos de uma PA é uma função quadrática na variável n .

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



11. (UFSC – SC) Assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

01. Em uma esfera E_1 de raio R_1 inscreve-se um cubo C_1 . Neste cubo inscreve-se uma esfera E_2 ; nesta esfera inscreve-se um cubo C_2 e assim sucessivamente. Os raios das esferas assim construídas formam uma progressão geométrica infinita cujo primeiro termo é R_1 . A soma dos termos desta progressão geométrica é $s = \frac{R_1}{2}(\sqrt{3} + 3)$.
02. Considere uma progressão aritmética de k termos positivos, cujo primeiro termo a é igual à razão. O produto dos k termos desta progressão é o número $P = a^k \cdot k!$
04. Considere uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$. Com os termos desta progressão construímos a matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$. A matriz A construída desta forma é inversível.
08. Dada uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ com k termos estritamente maiores do que zero, a sequência $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_k)$ dada por $b_n = \log a_n$ para todo n , $1 \leq n \leq k$, é uma progressão aritmética.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



12. (ACAFE) Se $2 + 2 \sin \theta + 2(\sin \theta)^2 + 2(\sin \theta)^3 + 2(\sin \theta)^4 + \dots = 10$, com $0 < \theta < \pi/2$, então, $|\cos(2\theta)|$ é igual a:

a) $17/25$

b) $3/5$

c) $9/5$

d) $7/25$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

13. (UNESP) Uma empresa de apostas lucra 7% de todo o dinheiro apostado pelos jogadores e repassa 93% do dinheiro apostado de volta aos jogadores. Admita que, inicialmente, o volume de dinheiro apostado pelos jogadores seja igual a R reais, e que todos eles reapostem, consecutivamente, x vezes todo o dinheiro que receberam de volta da empresa a cada nova aposta. Considerando que a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q é dada por $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, e G(x) é o ganho, em reais, acumulado dessa empresa de apostas após x vezes em que os jogadores fizeram suas apostas, a fórmula que calcula G(x) é:

a) $G(x) = R \cdot (1 - 0,07^x)$

b) $G(x) = R \cdot (1 - 0,93^x)$

c) $G(x) = R \cdot \frac{1-0,93^x}{0,07}$

d) $G(x) = R \cdot \frac{1-0,07^x}{0,93}$

e) $G(x) = R \cdot 0,93 \cdot (1 - 0,07^x)$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



14. (UDESC – SC) Sendo ABC um triângulo equilátero, analise as sentenças.

- I. Se as medidas da área, da altura e do lado de ABC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então a medida do seu perímetro é igual a $12 - 4\sqrt{3}$ u.c.
- II. Se as medidas da área, da altura e do lado de ABC formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, então a medida do seu perímetro é igual a $3\sqrt{3}$ u.c.
- III. Se as medidas da área, da altura e do lado de ABC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então a razão dessa progressão é $\frac{18 - 10\sqrt{3}}{3}$.

Assinale a alternativa **correta**.

- a) Apenas a sentença III é verdadeira.
- b) Apenas as sentenças I e III são verdadeiras.
- c) Apenas as sentenças I e II são verdadeiras.
- d) Apenas a sentença I é verdadeira.
- e) Todas as sentenças são verdadeiras.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

15. (UPF – RS) O limite da expressão

$$\sqrt[3]{n\sqrt[3]{n\sqrt[3]{n\sqrt[3]{n\sqrt[3]{n\dots}}}}} = n$$

Onde n é positivo, quando o número de radicais aumenta indefinidamente é igual a:

- a) $\frac{1}{n}$ b) n c) $\frac{n}{2}$ d) $\sqrt{n}$ e) $3n$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

16. (UFJF – MG) Pedro começou a listar sequencialmente todos os números inteiros positivos, dispo-
 ndo-os em linhas, conforme indicado na figura abaixo:

[illegible]

A primeira linha é formada pelos quatro primeiros números inteiros positivos e, a partir da segunda linha, listam-se sempre dois números inteiros a mais do que haviam sido listados na linha anterior.

O número inteiro que ocupará a décima posição na 101ª linha será

- a) 10410 b) 10310 c) 213 d) 212 e) 111

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

17. (PUC – PR) Determine o valor de E sendo $E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$.

a) 5

b) 5,5

c) 6

d) 6,5

e) 7

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

X GABARITO

1. b 2. e 3. 13 4. e 5. a 6. 10 7. c
8. c 9. 11 10. 17 11. 29 12. d 13. b 14. e
15. d 16. b 17. c

Resolução do Exercício 1: [B]

I. Verdadeiro

O décimo oitavo termo dessa PA é dado por:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot r \\a_{18} &= a_1 + (18 - 1) \cdot r \\a_{18} &= 3 + 17 \cdot 7 \\ \therefore a_{18} &= 122\end{aligned}$$

II. Verdadeiro

Utilizando a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética (PA), $a_n = a_k + (n - k) \cdot r$, vamos encontrar a razão (r):

$$\begin{aligned}\text{Dados: } a_{15} &= 10 \text{ e } a_{10} = -5, \text{ temos:} \\10 &= -5 + (15 - 10) \cdot r \\15 &= 5r \\r &= 3\end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar o sétimo termo (a_7), utilizando a_{10} como referência:

$$\begin{aligned}a_7 &= a_{10} + (7 - 10) \cdot r \\a_7 &= -5 + (-3) \cdot 3 \\a_7 &= -5 - 9 = -14\end{aligned}$$

III. Falso

$$\text{Razão da PA: } r = 21 - 11 = 10$$

Logo:

$$\begin{aligned}a_9 - a_7 &= a_1 + 8r - (a_1 + 6r) = 2r = 2 \cdot 10 \\ \therefore a_9 - a_7 &= 20\end{aligned}$$

IV. Verdadeiro

Razão da PA:

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + r \\ \frac{25}{12} &= \frac{7}{3} + r \\ r &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Vigésimo termo da PA:

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n - 1)r \\a_{20} &= a_1 + 19r \\a_{20} &= \frac{7}{3} + 19 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\a_{20} &= -\frac{29}{12}\end{aligned}$$

Soma dos 20 primeiros termos da PA:

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \\S_{20} &= \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \\S_{20} &= \frac{\left(\frac{7}{3} - \frac{29}{12}\right) \cdot 20}{2} \\S_{20} &= -\frac{1}{12} \cdot 10 \\ \therefore S_{20} &= -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Resolução do Exercício 2: [E]

I. Correto

$$\begin{aligned}a_{12} &= a_1 \cdot q^{11} \\a_{12} &= 3 \cdot 2^{11} \\a_{12} &= 6144\end{aligned}$$

II. Falso

$$\begin{aligned}a_8 &= a_3 \cdot q^5 \\320 &= 10 \cdot q^5 \\q^5 &= 32 \rightarrow q = 2\end{aligned}$$

III. Correto

$$E = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

IV. Correto

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_7 = \frac{2(3^7 - 1)}{3 - 1} = 2186$$

Resolução do Exercício 3: [13]

[01] Verdadeira. Sejam $x - r$, x e $x + r$, respectivamente, as medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo. Do perímetro, obtemos:

$$3r + 4r + 5r = 15 \rightarrow r = 1,25$$

Portanto, a hipotenusa mede $5 \cdot 1,25 \text{ cm} = 6,25 \text{ cm}$.

[02] Falsa. Do décimo termo, obtemos:

$$\begin{aligned}a_{10} &= a_1 + (10 - 1) \cdot r \\3 &= a_1 + 9r \\r &= \frac{3 - a_1}{9}\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na soma, chegamos a:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

$$180 = (a_1 + a_1 + 19r) \cdot 10$$

$$18 = 2a_1 + 19r$$

$$18 = 2a_1 + \frac{19(3 - a_1)}{9}$$

$$162 = 18a_1 + 57 - 19a_1$$

$$\therefore a_1 = -105$$

[04] Verdadeira. Os múltiplos de 6 no intervalo dado são termos da PA (102, 108, ..., 996). Sendo assim, a quantidade de termos dessa PA é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$996 = 102 + (n - 1) \cdot 6$$

$$149 = n - 1$$

$$\therefore n = 150$$

[08] Verdadeira. Da soma dos dois termos, obtemos:

$$a_4 + a_{37} = 81$$

$$a_1 + 3r + a_1 + 36r = 81$$

$$2a_1 + 39r = 81$$

A soma dos 40 primeiros termos é dada por:

$$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} = (a_1 + a_1 + 39r) \cdot 20$$

$$S_{40} = 20 \cdot (2a_1 + 39r)$$

Portanto:

$$S_{40} = 20 \cdot 81 = 1620$$

[16] Falsa. O termo central da PA equivale à média aritmética dos termos extremos:

$$y = \frac{x + 10}{2}$$

O termo central da PG equivale à média geométrica dos termos extremos:

$$\frac{1}{y} = \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x + 10}}$$

$$y^2 = x(x + 10)$$

Logo:

$$\left(\frac{x + 10}{2}\right)^2 = x(x + 10)$$

$$\frac{(x + 10)^2}{4} = x(x + 10)$$

$$x + 10 = 4x$$

$$x = \frac{10}{3}$$

$$y = \frac{\frac{10}{3} + 10}{2} = \frac{20}{3}$$

Ou seja, y é o dobro de x.

Resolução do Exercício 4: [E]

As frações equivalentes às áreas sombreadas são termos de uma PG de razão $\frac{1}{2}$, pois:

$$A_1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A_3 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

:

$$A_n = \frac{1}{2^n}$$

Dessa forma, a fração que representa a região sombreada da figura 8 vale:

$$A_8 = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

E a fração que representa a região não sombreada vale:

$$A'_8 = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

Resolução do Exercício 5: [A]

Aplicando a fórmula da PG infinita, chegamos a:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{15}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{15}{\frac{3}{4}} = 20$$

Resolução do Exercício 6: [10]

Valores de A e B:

$$A = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{100}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 505$$

$$B = 50 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 50 + \frac{1/2}{1 - 1/2} = 50 + 1 = 51$$

[01] Falsa. $A + B = 556 < 600$.

[02] Verdadeira. $A > B$.

[04] Falsa. $A - B = 454 > 400$.

[08] Verdadeira. $A < 10B$, pois $505 < 510$.

[16] Falsa. A não é múltiplo de B, pois $\frac{A}{B} \notin \mathbb{Z}$.

Resolução do Exercício 7: [C]

Tem-se que $2y = x + 14$ e $y^2 = 32x$, com $x < y$.

Logo, vem

$$2y = \frac{y^2}{32} + 14 \Leftrightarrow y^2 - 64y + 448 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 8 \text{ ou } y = 56.$$

Se $y = 8$, então $x = 2$.

Se $y = 56$, então $x = 98$. Não convém, pois $x < y$.

A resposta é $x + y = 2 + 8 = 10$.

Resolução do Exercício 8: [C]

O valor da soma da PG infinita de primeiro termo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e razão $\frac{1}{2}$ é dada por:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Resolução do Exercício 9: [11]

[01] Verdadeira. A razão da PA deve ser igual a:

$$\begin{cases} a_7 = 3a_1 \\ a_4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6r = 3a_1 \\ a_1 + 3r = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3r \\ a_1 = 6 - 3r \end{cases} \Rightarrow 3r = 6 - 3r \Rightarrow r = 1$$

[02] Verdadeira. Se x, y e z são termos de uma PG, devemos ter que:

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} \Rightarrow y^2 = xz$$

[04] Falsa. Segundo termo da sequência:

$$a_2 = \frac{3a_1 + 8}{6} = \frac{3 \cdot 10 + 8}{6} = \frac{19}{3}$$

Caso a sequência seja uma PA, a sua razão deve valer:

$$r = \frac{19}{3} - 10 = -\frac{11}{3}$$

[08] Verdadeira. Igualando os k-ésimos termos das PAs, obtemos:

$$2 + (k-1) \cdot 5 = 552 + (k-1) \cdot (-20)$$

$$2 + 5k - 5 = 552 - 20k + 20$$

$$25k = 575$$

$$k = 23$$

Portanto, o 23º termo das PAs são iguais.

[16] Falsa. Primeiro termo da sequência:

$$a_1 = 3^{2-1} = 3$$

Segundo termo da sequência:

$$a_2 = 3^{2-2} = 1$$

Razão da PG:

$$q = \frac{1}{3}$$

Resolução do Exercício 10: [17]

[01] Verdadeira. Sendo L o lado do quadrado, a sua diagonal d e a sua área A valem:

$$d = L\sqrt{2} \text{ e } A = L^2$$

Para que esses valores sejam termos consecutivos de uma PG, devemos ter:

$$(L\sqrt{2})^2 = L \cdot L^2 \Rightarrow 2L^2 = L^3 \Rightarrow L^2(L-2) = 0 \Rightarrow L = 2$$

Logo, o quadrado existe e o seu lado é igual a 2.

[02] Falsa. Sendo L a aresta do cubo, a área A de uma de suas faces e o seu volume V valem:

$$A = L^2 \text{ e } V = L^3$$

Para que esses valores sejam termos consecutivos de uma PA, devemos ter:

$$2L^2 = L + L^3 \Rightarrow L(L^2 - 2L + 1) = 0 \Rightarrow$$

Logo, o

$$L(L-1)^2 = 0 \Rightarrow L = 1$$

cubo existe e o seu lado é igual a 1.

[04] Falsa. Após o reservatório estar cheio, não é possível que o volume de água nele aumente.

[08] Falsa. Os algarismos são dados por (34, 44, 54, ..., 574). Essa sequência pode ser representada por uma PA de razão 10, e o seu número de termos é igual a:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$574 = 34 + (n-1) \cdot 10$$

$$54 = n-1$$

$$n = 55$$

[16] Verdadeira. A soma dos primeiros n termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} =$$

$$\frac{2a_1n + n^2r - nr}{2}$$

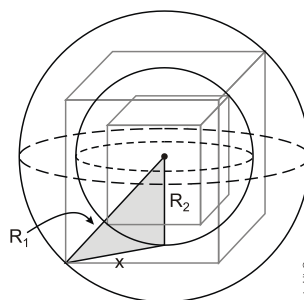
Que é uma função quadrática na variável n.

Resolução do Exercício 11: [29]

01) Verdadeira. Na figura, temos $x = R_2 \cdot \sqrt{2}$. Então,

$$(R_2 \cdot \sqrt{2})^2 + (R_2)^2 = (R_1)^2$$

$$R_2 = \frac{R_1}{\sqrt{3}}$$



Temos, então, a P.G.

$\left(R_1, \frac{R_1}{\sqrt{3}}, \frac{R_1}{3}, \frac{R_1}{3\sqrt{3}}, \dots\right)$ cuja soma será dada por:

$$S = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = R_1 \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

02) Verdadeira. $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot ka = a^k k!$

04) Falsa. Se a razão da P.A. for igual a zero, o determinante será nulo e a matriz não será invertível.

08) Verdadeira

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = q \Leftrightarrow \log \frac{a_k}{a_{k-1}} = \log q \Leftrightarrow \log a_k - \log a_{k-1} = \log q \Leftrightarrow$$

$$b_k - b_{k-1} = \log q.$$

Portanto, a sequência $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_k)$ é uma P.A.

Resolução do Exercício 12: [D]

A expressão dada trata-se de PG infinita de razão igual a $\sin \theta$. Assim, pode-se escrever:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 10 = \frac{2}{1-\sin \theta} \Rightarrow 10 - 10\sin \theta = 2 \Rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$|\cos(2\theta)| = |(\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2| = \left|\frac{9}{25} - \frac{16}{25}\right| = \left|-\frac{7}{25}\right| = \frac{7}{25}$$

Resolução do Exercício 13: [B]

A equação do ganho da empresa é dada por $G(x) = 0,07R + 0,07 \cdot 0,93R + 0,07 \cdot 0,93^2R + \dots + 0,07 \cdot 0,93^xR$

$$G(x) = 0,07R \cdot (1 + 0,93 + 0,93^2 + \dots + 0,93^x)$$

$$G(x) = 0,07R \cdot \left[\frac{1 \cdot (1 - 0,93^{x+1})}{1 - 0,93} \right]$$

$$\therefore G(x) = R \cdot (1 - 0,93^{x+1})$$

Resolução do Exercício 14: [E]

Lado do triângulo equilátero: a

$$\text{Altura do triângulo equilátero: } \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Área do triângulo equilátero: } \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Resolução do Exercício 16: [B]

O número de elementos em cada linha forma uma PA de razão 2, enquanto o último elemento de cada linha é igual a soma de elementos dessa PA. Calculando:

1ª linha $\rightarrow$ 4 elementos; último elemento = 4

2ª linha $\rightarrow$ 4 + 2 = 6 elementos; último elemento = 4 + 6 = 10

3ª linha $\rightarrow$ 6 + 2 = 8 elementos; último elemento = 10 + 8 = 18

4ª linha $\rightarrow$ 8 + 2 = 10 elementos; último elemento = 18 + 10 = 28

nª linha $\rightarrow$ 4 + 2.(n-1) = x elementos; último elemento = $\frac{(4+x) \cdot n}{2}$

100ª linha $\rightarrow$ 4 + 2.(100-1) = 202 elementos; último elemento = $\frac{(4+202) \cdot 100}{2} = 10.300$

101ª linha $\rightarrow$ primeiro elemento $\rightarrow$ 10.301
10º elemento $\rightarrow$ 10.310

[I] Verdadeira. Considerando a sequência:

$$\left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}, a \right) \text{ uma P.A., temos:}$$

$$\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + a}{2} \Rightarrow a^2 \cdot \sqrt{3} - 4a\sqrt{3} + 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, o perímetro do triângulo será dado por $P = 12 - 4\sqrt{3}$.

[II] Verdadeira.

$$\left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}, a \right) \text{ uma P.G., temos:}$$

$$\left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a \Rightarrow a^2 \cdot 3 = a^3 \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

Portanto, o perímetro do triângulo será dado por $P = 3\sqrt{3}$

[III] Verdadeira. Aproveitando o lado obtido no item [I], temos:

r : razão da P.A.

$$r = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot (2 - \sqrt{3})}{2} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{(2 - \sqrt{3})}{2} = \frac{18 - 10\sqrt{3}}{3}$$

Resolução do Exercício 15: [D]

Tem-se que

$$\sqrt[3]{n \sqrt[3]{n \sqrt[3]{n \sqrt[3]{n \sqrt[3]{n \dots}}}}} = n^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^k} + \dots}$$

Logo, tomando o limite, encontramos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^k} + \dots} = n^{\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}} = \sqrt{n}.$$

Resolução do Exercício 17: [C]

Calculando:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}.$$

$$E = \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \frac{11}{32} + \dots$$

$$E = \frac{1}{1} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{16} + 11 \cdot \frac{1}{32} + \dots$$

Reorganizando:

$$PG_1 \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

$$2 \cdot PG_2 \Rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

$$2 \cdot PG_3 \Rightarrow \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

$$2 \cdot PG_4 \Rightarrow \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Assim:

$$E = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{32}}{1 - \frac{1}{2}} + \dots$$

$$E = 2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots = 5 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 + 1 = 6$$