AULA 01

GEOMETRIA DE POSIÇÃO

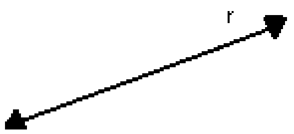
1. Conceitos Primitivos

A geometria está baseada em conceitos primitivos que são conceitos aceitos sem definição. Ponto, reta e plano são exemplos de conceitos primitivos. Temos uma noção do que são mas não podemos definir.

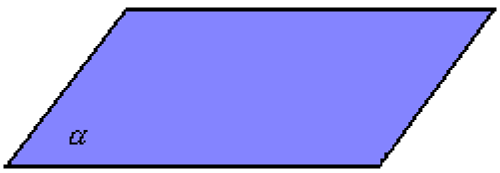
Convencionalmente, usa-se as seguintes notações:

1.1.Ponto: letra maiúscula do nosso alfabeto.
Característica: adimensional (não possui dimensão).

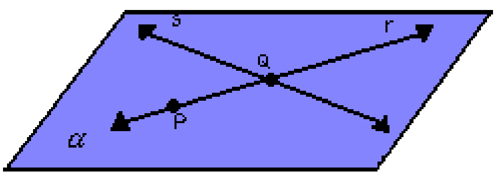
1.2. Reta: letra minúscula do nosso alfabeto.
Característica: unidimensional (comprimento infinito).



1.3. Plano: letra minúscula do alfabeto grego.
Característica: bidimensional (comprimento e largura infinitos).



1.4. Espaço: é o conjunto de todos os pontos retas e planos.



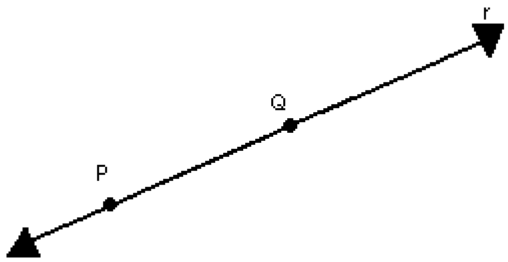
:2. Proposições

Algumas das ideias que iremos apresentar a seguir são aceitas como verdadeiras sem a necessidade de demonstração ou seja sem a necessidade de provar-se a sua veracidade. Tais proposições são chamadas de postulados.

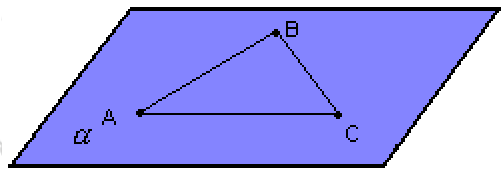
Postulado Fundamental: Existem no espaço, um infinito número de pontos, retas e planos.

Postulado da reta e do plano

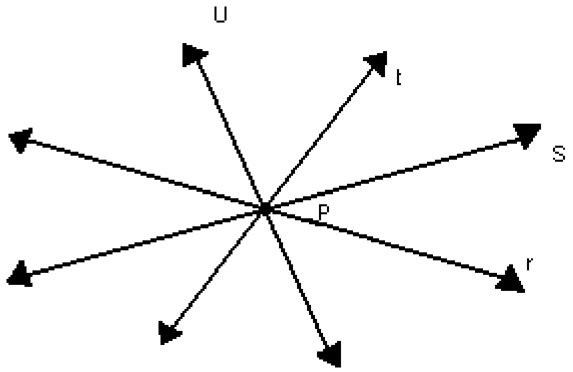
- Por dois pontos distintos passa uma única reta.



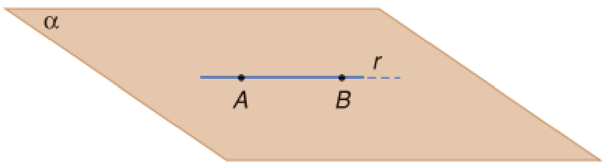
- Por três pontos distintos não-colineares passa um único plano.



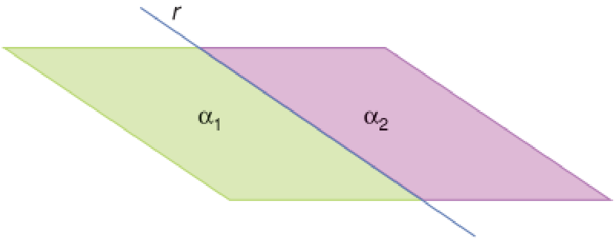
- Em uma reta e fora dela existem infinitos pontos.
- Por um ponto podem ser traçadas infinitas retas.



- Em um plano e fora dele existem infinitos pontos.
- Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, a reta está contida no plano.

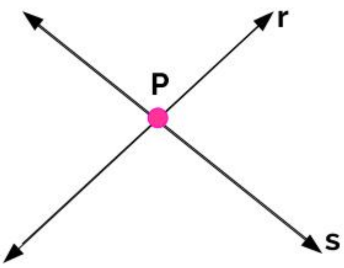


- Toda reta pertencente a um plano divide-o em duas regiões chamadas *semiplanos.*



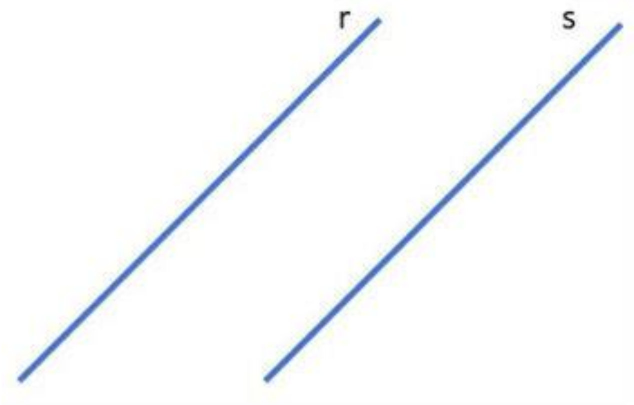
2. Posições relativas entre duas retas

2.1. Retas concorrentes: quando tem apenas um ponto em comum.



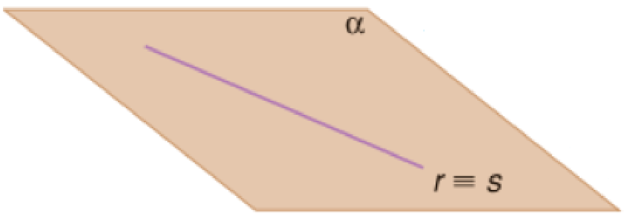
$r \cap s = \{P\}$

2.2. Retas paralelas distintas: quando são coplanares e não tem ponto em comum entre elas.

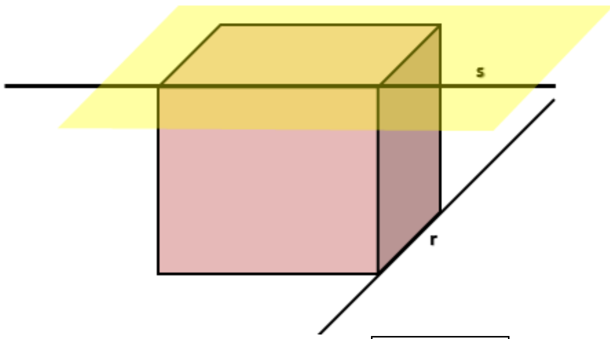


$r \cap s = \varnothing$

2.3. Retas paralelas coincidentes: quando tem todos os pontos em comum.



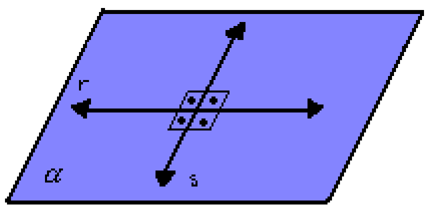
2.4. Retas reversas: quando não existe plano que as contenha.



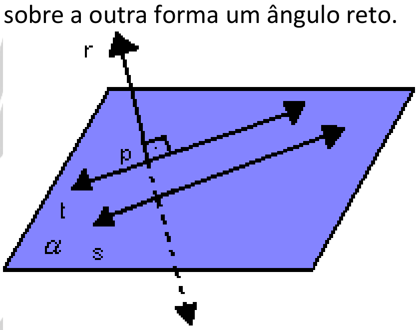
$r \cap s = \varnothing$

Casos particulares>

Retas perpendiculares: são retas concorrentes cujo ângulo entre elas é 90°.



Retas ortogonais: retas cuja projeção de uma sobre a outra forma um ângulo reto.

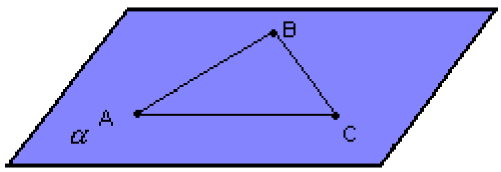


- r é perpendicular a t
- r é reversa a s, porém sua projeção sobre s forma 90°, portanto é dita também ortogonal a s.

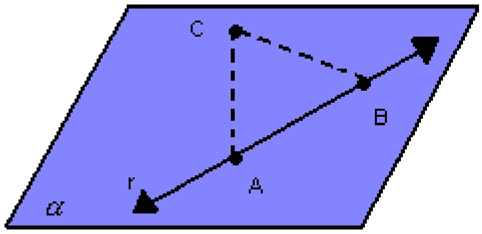
3. Determinação de planos

Determinam um plano:

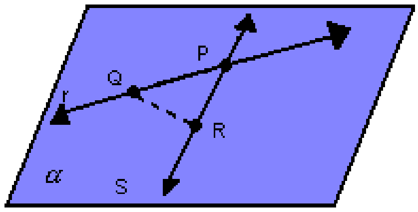
3.1. Três pontos não colineares.



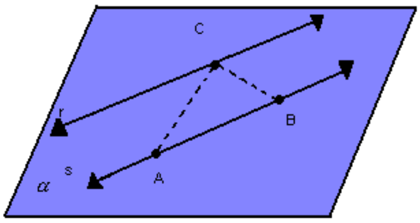
3. 2. Uma reta e um ponto não pertencente a ela



3.3. Duas retas concorrentes



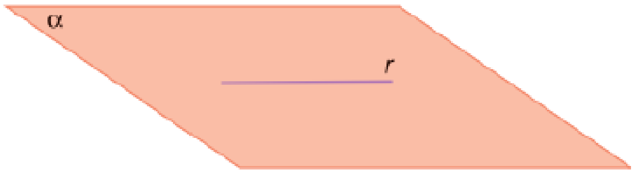
3.4. Duas retas paralelas distintas



4. Posições relativas entre reta e plano

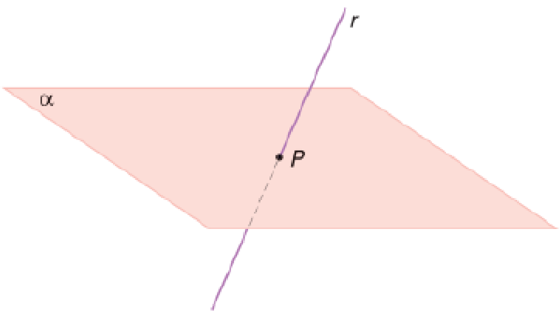
4.1. Reta contida no plano:

Se uma reta possui dois pontos distintos pertencentes a um plano, então ela está contida nesse plano



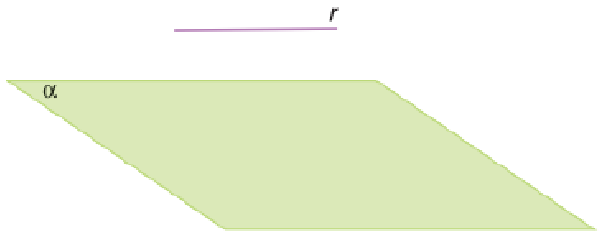
4.2. Reta concorrente ao plano:

Se uma reta possui um único ponto de intersecção com o plano então é dita concorrente ao plano.



4.3. Reta paralela ao plano:

Se uma reta não está contida num plano e não possui ponto em comum com o mesmo, então a reta é paralela a esse plano.



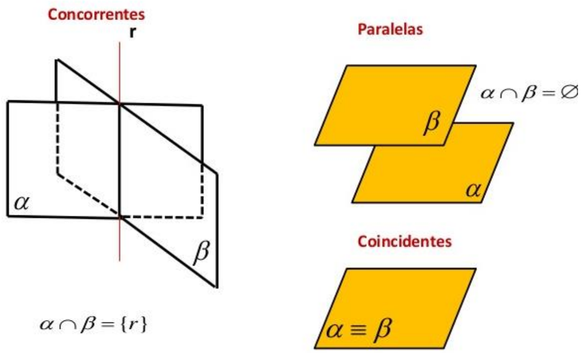
5. Posições relativas entre dois planos

Dois planos α e β no espaço podem ser:

5.1. Secantes ou concorrentes

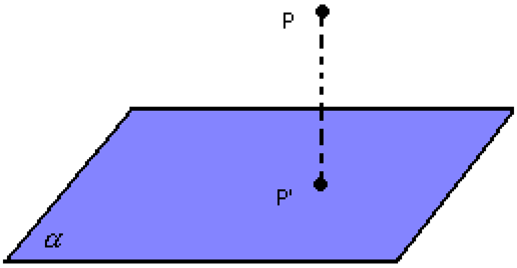
5.2. Paralelos distintos

5.3. Paralelos coincidentes

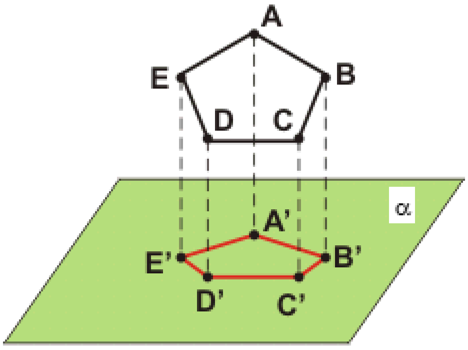


6. Projeções sobre um plano

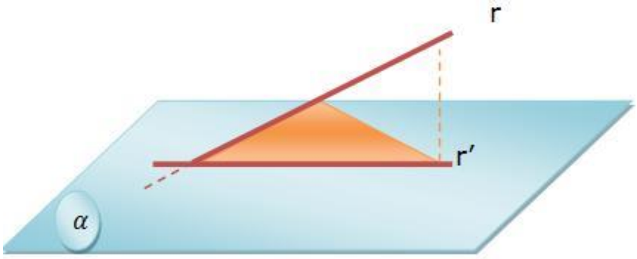
Considere um plano α (plano de projeção) e um ponto **P** qualquer. Seja **P´** o pé da perpendicular a α conduzida por **P**. O ponto **P´** é denominado *projeção ortogonal* de **P** sobre α, ou por convenção, projeção de **P** sobre α.



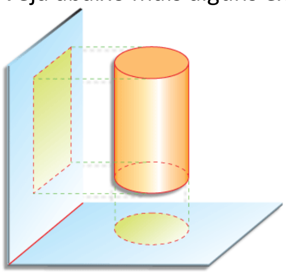
- Na figura abaixo $A'B'C'D'E'$ é a projeção do pentágono $ABCDE$ sobre o plano α.

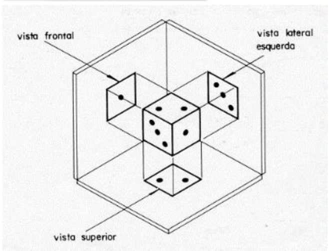


- A reta **r´** é a projeção da reta **r** sobre α.



Veja abaixo mais alguns exemplos de projeções:

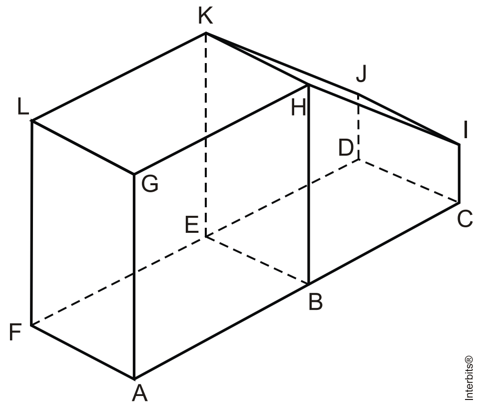




EXERCÍCIOS

Nível 1

01) (ESPCEX) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.



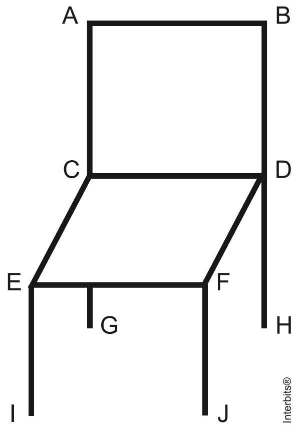
Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$, as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$, e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,

a) concorrentes; reversas; reversas.
b) reversas; reversas; paralelas.
c) concorrentes, reversas; paralelas.
d) reversas; concorrentes; reversas.
e) concorrentes; concorrentes; reversas.

02) É correto afirmar que:

a) Se duas retas no espaço não têm ponto comum, então elas são paralelas distintas.
b) Se a projeção ortogonal da reta r sobre o plano α é a reta s, então a reta r é paralela ao plano α.
c) Se uma reta no espaço é paralela a dois planos simultaneamente, então esses planos são paralelos
d) Duas retas no espaço não têm ponto em comum. Então, somente podem ser retas reversas.
e) É possível ter retas paralelas contidas em planos que não sejam paralelos.

03) (CEFET – MG) A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto.



A partir dos pontos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas

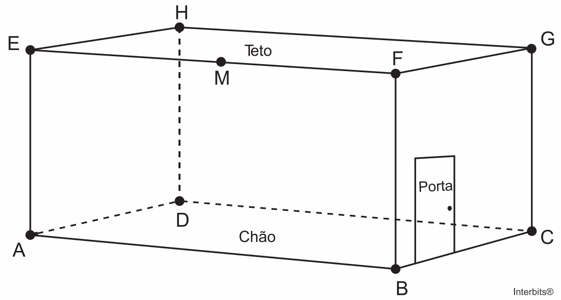
a) CD e EF são paralelos.
b) BD e FJ são concorrentes.
c) AC e CD são coincidentes.
d) AB e EI são perpendiculares.

04) (UEL – PR) Considere uma reta **s**, contida em um plano α, e uma reta **r** perpendicular a **s**. Então, necessariamente:

a) r é perpendicular a α.
b) r e s são coplanares.
c) r é p a α.
d) r está contida em α.
e) Todas as retas paralelas a r interceptam s.

Nível 2

05) (ENEM) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.

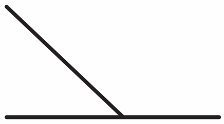


A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

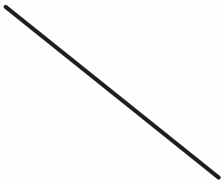
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a)

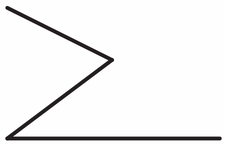
b)



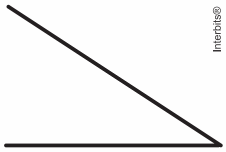
c)



d)



e)



06) (ENEM)Um grupo de escoteiros mirins, numa atividade no parque da cidade onde moram, montou uma barraca conforme a foto da Figura 1. A Figura 2 mostra o esquema da estrutura dessa barraca, em forma de um prisma reto, em que foram usadas hastes metálicas.

Figura 1

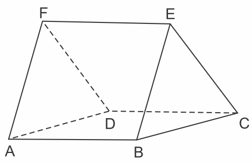
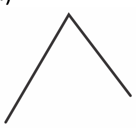
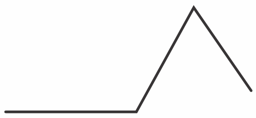
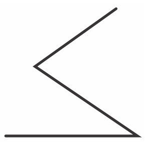
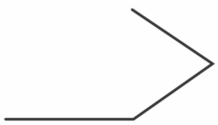
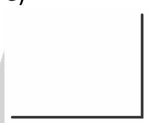


Figura 2

Após a armação das hastes, um dos escoteiros observou um inseto deslocar-se sobre elas, partindo do vértice A em direção ao vértice B, deste em direção ao vértice E e, finalmente, fez o trajeto do vértice E ao C. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor

distância entre os pontos.
A projeção do deslocamento do inseto no plano que contém a base $ABCD$ é dada por

a)

b)

c)

d)

e)


07) (UFSC – SC) Determine a soma da(s) alternativa(s) VERDADEIRA(S).

01) Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.
02) Se duas retas r e s, no espaço, são ambas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas.
04) Duas retas concorrentes determinam um único plano.
08) Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então A e B são planos paralelos.
16) Se duas retas r e s são paralelas a um plano A, então r e s são paralelas.

08) (UEM – PR) Considere uma reta r e um plano π, no espaço tridimensional. Assinale o que for **correto**.

01) Se existe uma reta no plano π, paralela à reta r, então a reta r é paralela ao plano π ou está contida nele.
02) Se a reta r é perpendicular a uma reta de π, então a reta r é perpendicular a π.
04) Se um plano π' é paralelo ao plano π, então o plano π' tem interseção com r.
08) Se um plano π' é perpendicular ao plano π e se a reta r também é perpendicular a π, então a reta r está contida em π'.
16) Se dois pontos de r estão contidos em π, então r está contida em π.

Nível 3

09) (UEM – PR) Considerando conhecimentos sobre Geometria Espacial, assinale o que for **correto**.

01) Se r e s são duas retas no espaço, com $r \cap s = \varnothing$, então a única possibilidade para r e s é que sejam paralelas.
02) Dados três pontos colineares A, B e C, no espaço, então não existe nenhum plano que contenha esses três pontos.
04) Se π, ρ e σ são planos distintos no espaço, então $\pi \cap \rho \cap \sigma$ pode determinar uma única reta, ou um único ponto, ou pode ser vazia.
08) Se r e s são duas retas reversas no espaço, então existe um plano que contém a reta s e é paralelo à reta r.
16) Seja α um plano e $P \notin \alpha$. Para calcular a distância do plano α ao ponto P basta escolher um ponto $Q \in \alpha$ qualquer e calcular a distância entre P e Q.

10) (UEM – PR) No espaço tridimensional, considere um plano π e as retas r, s e t, distintas duas a duas, de modo que r e s são perpendiculares ao plano π e a reta t não possua qualquer ponto em comum com o plano π e seja concorrente com as retas s e r. Sobre a situação descrita, assinale o que for **correto**.

01. As retas r e s são paralelas.
02. As retas s e t são reversas.
04. A reta t é paralela ao plano π.
08. A reta s é perpendicular a qualquer reta do plano π concorrente a ela.
16. Se A e B são pontos distintos de r, e P e Q são pontos distintos de s, então os triângulos APQ e BPQ possuem a mesma área.

GABARITO – AULA 01

1) e **2)** e **3)** a **4)** b **5)** b **6)** e **7)** 04 **8)** 17
9) 12 **10)** 29

AULA 02

POLIEDROS

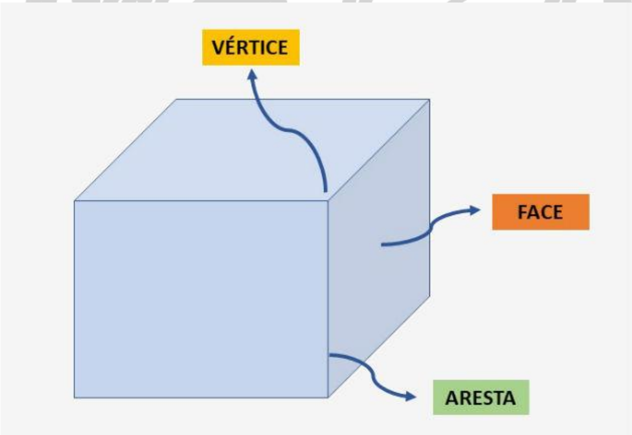
Poliedros Convexos

Poliedros convexo é todo sólido limitado por polígonos planos em que dois desses polígonos nunca estão num mesmo plano, cada lado de um polígono é comum a dois e só dois polígonos e o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço.

1. Elementos de um poliedro

Num poliedro, podemos destacar:

- as *Faces:* são os polígonos que limitam o poliedro;
- as *Arestas:* são os lados dos polígonos;
- os *Vértices:* são os lados dos polígonos.



2. Nomenclatura

A nomenclatura de um poliedro convexo é dada conforme o número de faces que ele possui. Abaixo seguem alguns exemplos:

- Tetraedro – poliedro convexo com 4 faces
- Pentaedro – poliedro convexo com 5 faces
- Hexaedro – poliedro convexo com 6 faces
- Icosaedro – poliedro convexo com 20 faces

3. Relação de Euler

Para todo poliedro convexo vale a relação:

$$\boxed{V + F = A + 2}$$

onde **V** é o número de vértices do poliedro, **F** é o número de faces e **A** é o número de arestas.

4. Soma dos ângulos das faces

Num poliedro convexo, demonstra-se que a soma dos ângulos de todas as faces é:

$$\boxed{S = 360°(V - 2)}$$

5.Poliedros de Platão e regulares

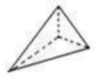
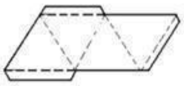
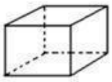
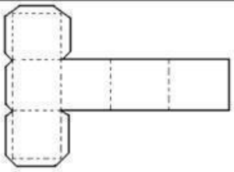
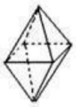
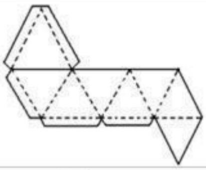
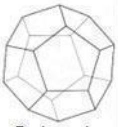
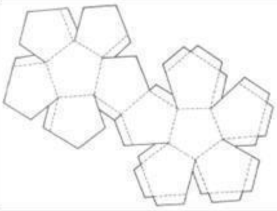
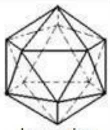
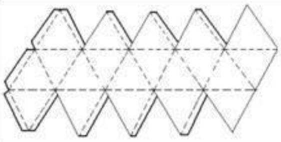
É dito um poliedro de Platão àquele poliedro convexo que satisfaz as seguintes condições:

- Todas as faces tem o mesmo número de arestas;
- De cada vértice parte o mesmo número de arestas;
- Vale a relação de Euler.

Abaixo temos os 5 poliedros de Platão:

Nome	nº de faces	nº de vértices	nº de arestas
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

Todo poliedro de Platão cujas faces são polígonos regulares e congruentes é denominado **poliedro regular.** Uma constatação que chamou a atenção de muitos filósofos do passado, é que existem somente 5 poliedros regulares, não mais do que isso! São eles:

Poliedro	Planificação	Elementos
 Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) (UNIRIO) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:
a) 35
b) 34
c) 33
d) 32
e) 31

02) (UFRGS – RS) Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. O número de arestas e de vértices do poliedro é, respectivamente,
a) 34 e 10
b) 19 e 10
c) 34 e 20
d) 12 e 10
e) 19 e 12

03) (UEMA) A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas formam os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente,
Pode ser utilizado o Teorema de Descartes-Euler, $V + F = A + 2$

a) 80 e 60
b) 80 e 50
c) 70 e 40
d) 90 e 60
e) 90 e 50

04) Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares,1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem exatamente:

a) 14 vértices.
b) 10 vértices.
c) 11 vértices.
d) 12 vértices.
e) 13 vértices.

05) (UECE – CE) Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos. O número de vértices deste polígono

a) 90.
b) 72.
c) 60.
d) 56.

Nível 2

06) (UEPG – PR) Dado que um poliedro convexo tem 2 faces pentagonais, 4 faces quadrangulares e n faces triangulares, assinale o que for correto.

01. Se o número de vértices do poliedro é 11, então n = 4.
02. Se o número de faces do poliedro é 16, então n = 10.
04. O menor valor possível para n é 1.
08. Se a soma dos ângulos de todas as faces do poliedro é 3600°, então n = 6.
16. Se o número de arestas do poliedro é 25, então n = 8.

07) (ENEM) O hábito cristalino é um termo utilizado por mineralogistas para descrever a aparência típica de um cristal em termos de tamanho e forma. A granada é um mineral cujo hábito cristalino é um poliedro com 30 arestas e 20 vértices. Um mineralogista construiu um modelo ilustrativo de um cristal de granada pela junção dos polígonos correspondentes às faces.

Supondo que o poliedro ilustrativo de um cristal de granada é convexo, então a quantidade de faces utilizadas na montagem do modelo ilustrativo desse cristal é igual a

a) $10.$
b) $12.$
c) $25.$
d) $42.$
e) $50.$

Nível 3

08) (ENEM) Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e $S,$ ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

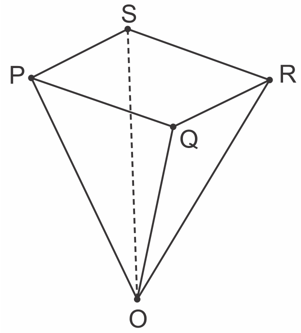


Figura 1

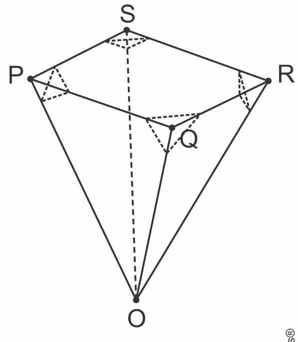


Figura 2

Interbits®

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) $9, 20$ e $13.$
b) $3, 24$ e $13.$
c) $7, 15$ e $12.$
d) $10, 16$ e $5.$
e) $11, 16$ e $5.$

09) (UEPG – PR) Dois poliedros regulares são construídos utilizando folhas de cartolina. Um desses poliedros tem faces pentagonais e o outro tem faces triangulares. Se a soma de todas as faces desses poliedros é $20,$ assinale o que for correto.

01) A soma dos ângulos de todas as faces do poliedro que tem faces pentagonais é $6.480°.$
02) O poliedro com faces triangulares tem 8 vértices a menos que o outro.
04) Os dois poliedros têm o mesmo número de arestas.
08) A soma de todas as arestas desses poliedros é maior que $40.$

10) (ITA – SP) Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão $-5.$ Determine o número de vértices do poliedro.

GABARITO – AULA 02

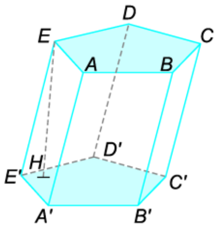
1) d **2)** b **3)** d **4)** b **5)** c **6)** 27 **7)** b **8)** a
9) 09 **10)** 6

AULA 03

PRISMAS

1. Definição

Prismas são poliedros que possuem duas faces paralelas e congruentes denominadas bases e as demais faces em forma de paralelogramos.



2. Elementos

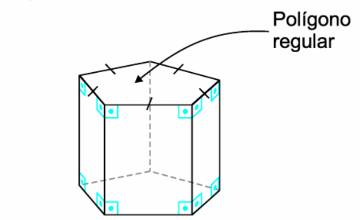
BASES: são os polígonos A´B´C´D´E´ e ABCDE
FACES LATERAIS: São os paralelogramos ABA´B´; BCB´C; CDC´D´; ……
ARESTAS LATERAIS: são os segmentos AA´; BB´; CC´; DD´ e EE´
ALTURA: A distância EH entre as duas bases é denominada altura do Prisma
ARESTAS DAS BASES: são os segmentos A´B´; B´C´; C´D´ ; D´E´ e E´A´

3. Nomenclatura

O nome do prisma dá-se através da figura da base.

- Prisma Triangular: As bases são triangulares.
- Prima Quadrangular: As bases são quadriláteros.
- Prisma Hexagonal: As bases são hexágonos

Observação: Se o polígono da base for
regular, o prisma também será chamados de Regular.

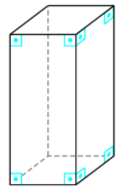


Prisma pentagonal regular

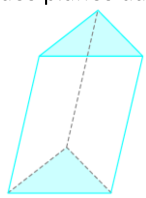
4. Classificação

De acordo com sua inclinação um prisma pode ser:

- Reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos da base.



- Oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos da base.



No prisma reto tem-se que as arestas laterais são iguais a altura.

5. Fórmulas

5.1. Áreas de um prisma

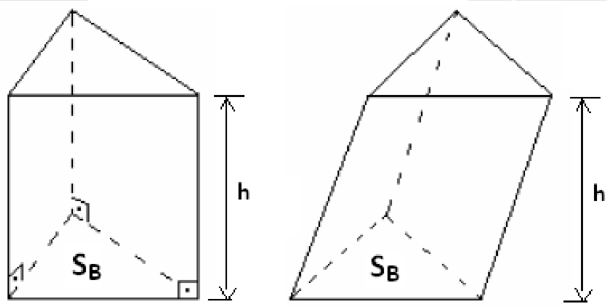
Área da Base (S_B): corresponde a área do polígono da base.
Área Lateral (S_L): corresponde a soma das áreas das faces laterais.
Área Total (S_T): corresponde a soma das áreas das bases com a área lateral.

$$\boxed{S_T = 2.S_B + S_L}$$

6. Volume de um prisma

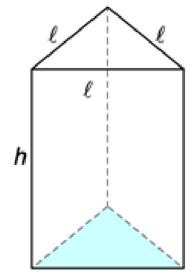
O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura, ou seja:

$$\boxed{V = S_B.h}$$



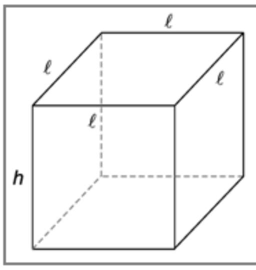
Segue abaixo um resumo sobre as áreas e volume dos principais prismas regulares

a) Prisma triangular regular



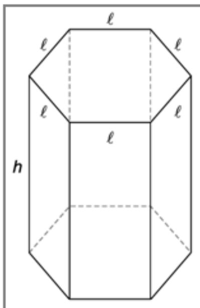
- SB = $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
- SL = 3. ℓ .h
- ST = 2SB + SL
- V = SB.h

b) Prisma quadrangular regular



- SB = ℓ^2
- SL = 4. ℓ .h
- ST = 2SB + SL
- V = SB.h

c) Prisma hexagonal regular



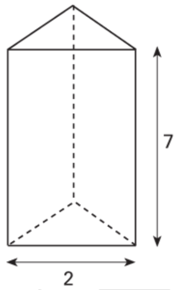
- SB = $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$
- SL = 6. ℓ .h
- ST = 2SB + SL
- V = SB.h

.

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) Dado um Prisma triangular regular com aresta lateral igual a 7cm e aresta da base igual a 2cm. Determine:



a) a área total do prisma
b) o volume do prisma

02) (UFSC – SC) A afirmação seguinte está CORRETA?
Uma conhecida marca de chocolate utiliza como embalagem um prisma regular de base triangular cuja aresta da base mede 3,5 cm. Se sua altura tem o dobro do perímetro da base, então sua área lateral é igual a 220,5 cm^2.

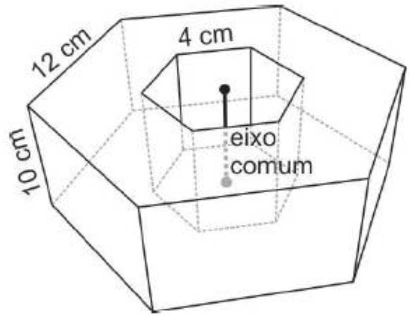
03) Um prisma de 5dm de altura tem por base um quadrado de 3dm de lado. O volume do prisma é:

04) Considere um prisma hexagonal regular que mede 4 cm de aresta da base e 10 cm de altura. Com relação a este prisma, assinale no cartão-resposta a soma das proposições corretas.

01. A medida da área da base é $24\sqrt{3}\ cm^2$.
02. A medida da área de uma face lateral é $40\ cm^2$.
04. A medida da área lateral é $240\ cm^2$.
08. A medida da área total é $48(5+\sqrt{3})\ cm^2$
16. A medida do volume é $240\sqrt{3}\ cm^3$.

Nível 2

05) (UEL – PR) Uma metalúrgica produz uma peça cujas medidas são especificadas na figura a seguir. A peça é um prisma reto com uma cavidade central e com base compreendida entre dois hexágonos regulares, conforme a figura. Considerando que os eixos da peça e da cavidade coincidem, qual o volume da peça?



a) $640\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

b) $1280\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

c) $2560\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

d) $320\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

e) $1920\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

06) (UFSC – SC) Um prisma triangular regular tem uma área total de ($96 + 2\sqrt{3}$) cm². Sabe-se que a aresta da base mede 2cm. A medida, em centímetros, da altura do prisma é:

07) (PUC – PR) O volume do prisma reto de $\sqrt{3}$ m de altura, cuja base é um hexágono de $\sqrt{2}$ m de lado, é:

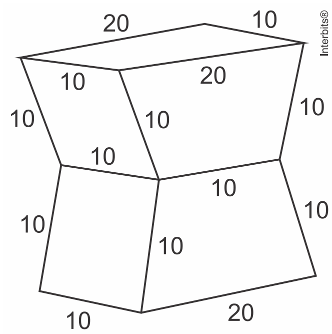
a) $\sqrt{3}$ m³
b) $3\sqrt{3}$ m³
c) 9 m³
d) 3 m³
e) $8\sqrt{3}$ m³

08) (PUC-SP) Se a área da base de um prisma diminui 10% e a altura aumenta 20%, o seu volume:

a) aumenta 8%
b) aumenta 15%
c) aumenta 108%
d) diminui 8%
e) não se altera

Nível 3

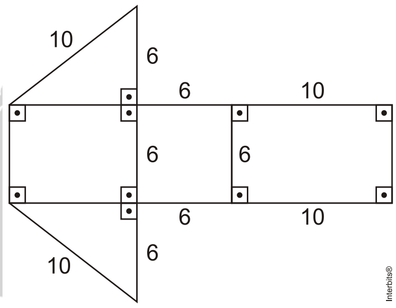
09) (UFRGS – RS) O primeiro prêmio de um torneio recebe um troféu sólido confeccionado em metal, com as medidas abaixo.



Considerando que as bases do troféu são congruentes e paralelas, o volume de metal utilizado na sua confecção é

a) $100\sqrt{3}$.
b) $150\sqrt{3}$.
c) $1.000\sqrt{3}$.
d) $1.500\sqrt{3}$.
e) $3.000\sqrt{3}$.

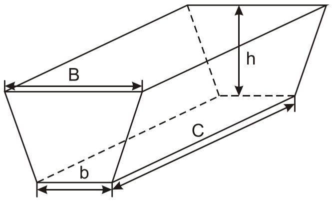
10) (UFRGS – RS) Na figura abaixo, encontra-se representada a planificação de um sólido de base quadrada cujas medidas estão indicadas.



O volume desse sólido é

a) 144.
b) 180.
c) 216.
d) 288.
e) 360.

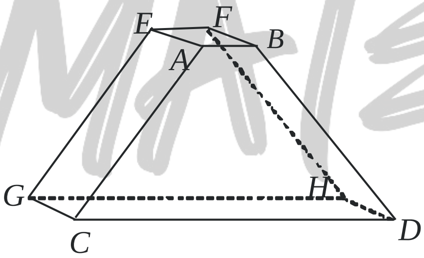
11) (ENEM) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2m de altura, 6m de largura de topo e 20m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa $2m^3$ desse tipo de silo. Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110.
b) 125.
c) 130.
d) 220.
e) 260.

12) (UFSC – SC) Na figura a seguir, o segmento de reta AE é paralelo ao segmento BF e o segmento de reta CG é paralelo ao segmento DH; o trapézio ABDC tem os lados medindo 2cm, 10cm, 5cm e 5cm, assim como o trapézio EFHG; esses trapézios estão situados em planos paralelos que distam 4cm um do outro. Calcule o volume (em cm^3) do sólido limitado pelas faces ABFE, CDHG, ACGE, BDHF e pelos dois trapézios.



GABARITO –AULA 03

1) ST = 2($\sqrt{3}$ + 21) cm^2 V = 7 $\sqrt{3}$ cm^3

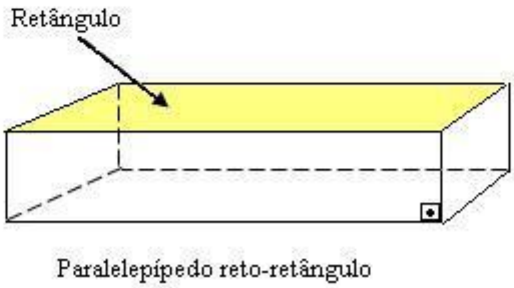
2) sim	**3)** $45dm^3$	**4)** 31		**5)** e	**6)** 16
7) c	**8)** a	**9)** d	**10)** a	**11)** a	**12)** 72

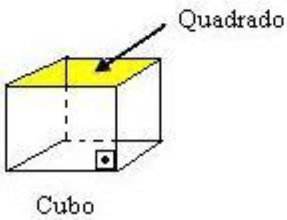
AULA 04

PRISMAS ESPECIAIS – PARALELEPÍPEDO E CUBO

Paralelepípedos são prismas cujas bases são paralelogramos.

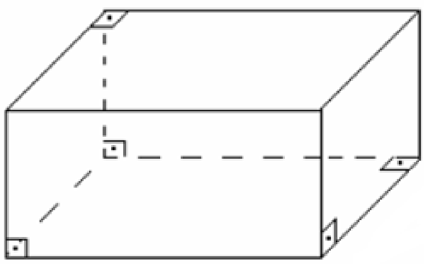
- Paralelepípedo retângulo é aquele cujas faces são retângulos.
- Cubo é aquele paralelepípedo cujas faces são quadrados.





1. Paralelepípedos reto retângulo

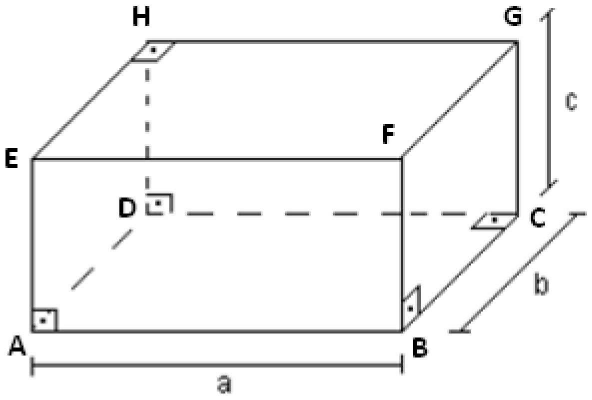
Todo paralelogramo reto cujas faces são retangulares é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo.**



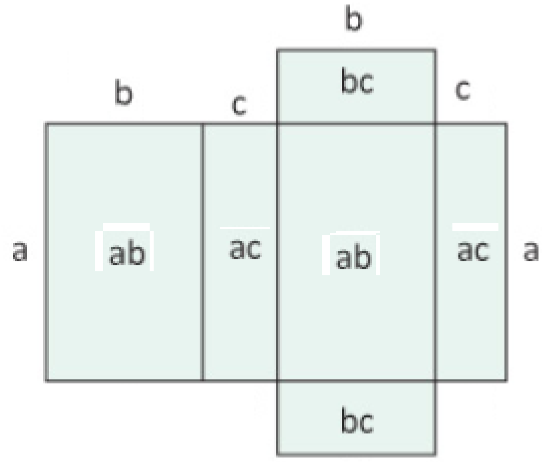
1.1. Área total de um paralelepípedo

A área total de um paralelepípedo reto-retângulo é calculada somando-se as áreas de todas as faces.

Considere o paralelepípedo abaixo de dimensões **a, b** e **c.**



Planificando o paralelepípedo, temos:



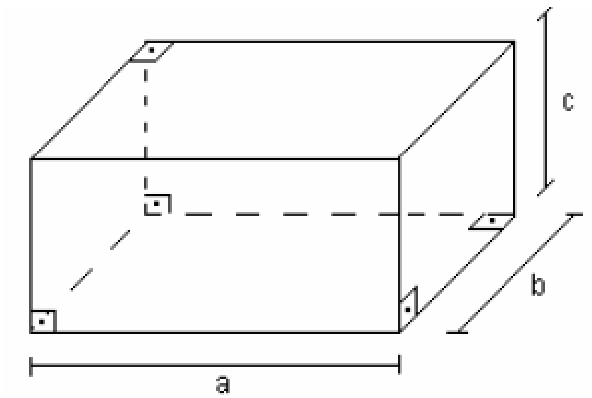
A área total é dada por:

$$A_{ABCD} = A_{EFGH} = a.b$$
$$A_{ABEF} = A_{CDGH} = a.c$$
$$A_{BCGF} = A_{ADHE} = b.c$$

Então, a área total (S_T) do paralelepípedo é dada por:

$$\boxed{S_T = 2(a.b + a.c + b.c)}$$

1.2. Volume de um paralelepípedo



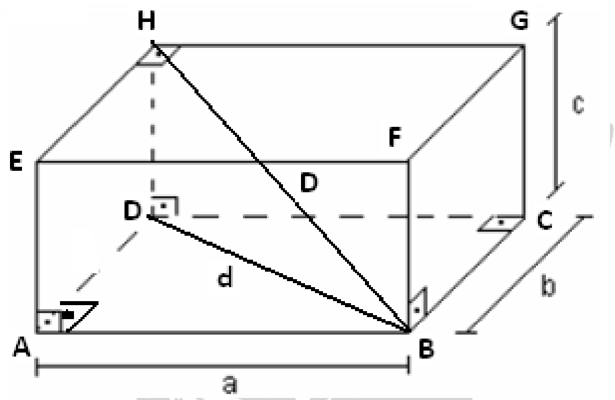
Sendo V o volume do paralelepípedo reto-retângulo com dimensões **a, b** e **c**, temos:

$$\boxed{V = \underbrace{S_B}_{a.b}.h}$$

ou

$$\boxed{V = a.b.c}$$

1.3. Diagonais do paralelepípedo



No triângulo retângulo ABD, temos:

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 \rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

No triângulo retângulo BDH, temos:

$$\boxed{D^2 = d^2 + c^2 \rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

1.4. Relação Auxiliar

Considere um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões **a, b** e **c**, área total $(\mathbf{S_T})$ e diagonal **D**.

Desenvolvendo o produto notável $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$, temos:

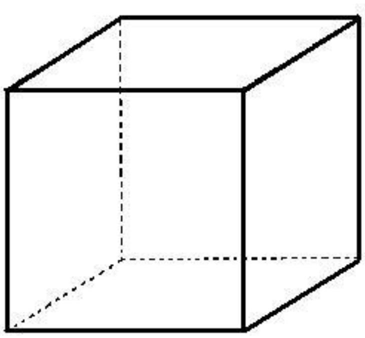
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{D^2} + \underbrace{2(a.b + a.c + b.c)}_{S_T}$$

ou seja:

$$\boxed{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = D^2 + S_T}$$

2. Cubo (Hexaedro Regular)

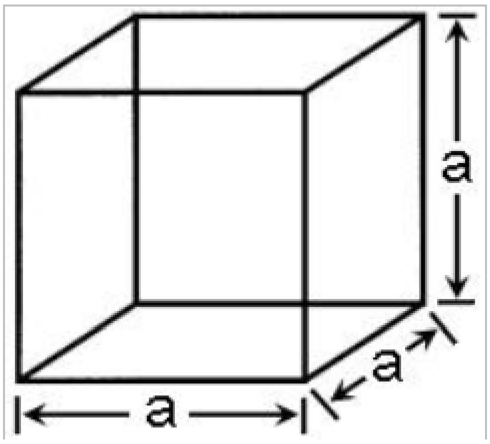
Se num paralelepípedo reto-retângulo todas as faces forem quadradas, temos um cubo ou hexaedro regular.



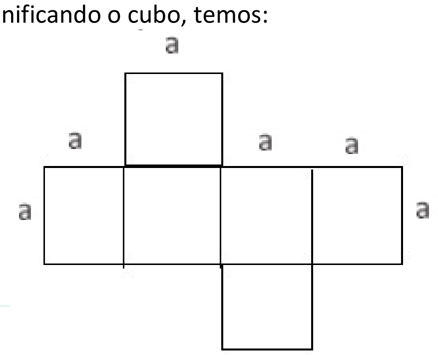
2.1. Área total de um cubo

A área total de um cubo é calculada somando-se as áreas de todas as faces.

Considere o cubo abaixo de dimensões **a.**



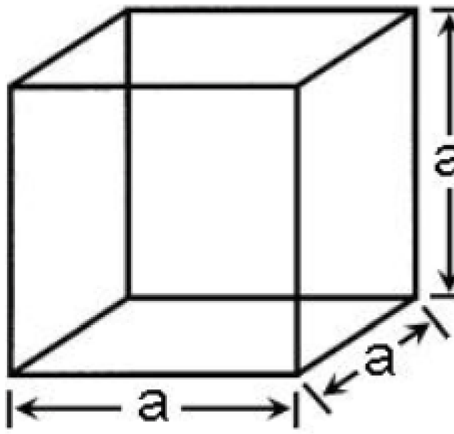
Planificando o cubo, temos:



A área total é dada por:

$$\boxed{S_T = 6a^2}$$

2.2. Volume de um cubo



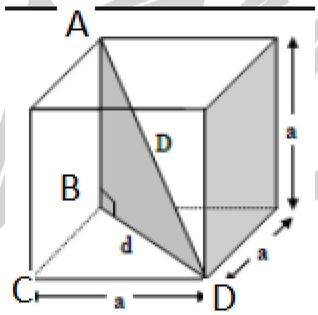
Sendo V o volume do cubo, temos:

$$\boxed{V = \underbrace{S_B}_{a.b}.h}$$

ou

$$\boxed{V = a^3}$$

2.3. Diagonais do cubo



No triângulo retângulo BCD, temos:

$$\boxed{d^2 = a^2 + a^2 \rightarrow d = a\sqrt{2}}$$

No triângulo retângulo ABD, temos:

$$\boxed{D^2 = d^2 + a^2 \rightarrow D = \sqrt{2a^2 + a^2} \rightarrow D = a\sqrt{3}}$$

EXERCÍCIOS

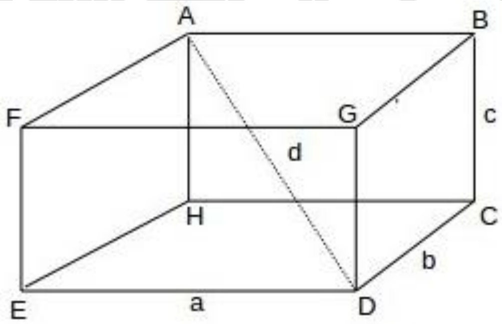
Nível 1

01) (UFSC – SC) Usando um pedaço retangular de papelão, de dimensões 12cm e 16cm, desejo construir uma caixa sem tampa, cortando, em seus cantos, quadrados iguais de 2cm de lado e dobrando, convenientemente, a parte restante. A terça parte do volume da caixa, em cm^3, é:

02) (ENEM) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que tem o formato de cubo e igual a

a) 5 cm.
b) 6 cm.
c) 12 cm.
d) 24 cm.
e) 25 cm.

03) Considere um paralelepípedo retangular com lados 6cm, 2cm e 3cm. A distância máxima entre dois vértices deste paralelepípedo é:



a) 7 cm.
b) 8 cm.
c) 9 cm.
d) 10 cm.
e) 11 cm.

04) A medida, em metros, da maior diagonal de um cubo cuja medida da aresta é 5 m é

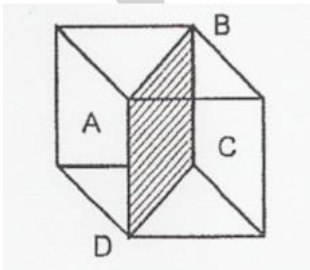
a) $5\sqrt{2}$.
b) $7\sqrt{2}$.
c) $5\sqrt{3}$.
d) $7\sqrt{3}$.

05) (UEPB – PB) Um reservatório em forma de cubo, cuja diagonal mede $2\sqrt{3}\text{ m}$, tem capacidade igual a:

a) 4.000 litros
b) 6.000 litros
c) 8.000 litros
d) 2.000 litros
e) 1.000 litros

Nível 2

06) (UFSC – SC) Na figura abaixo, que representa um cubo, o perímetro do quadrilátero ABCD mede $8(1 + \sqrt{2})$ cm. Calcule o volume do cubo em cm^3.



07) (UFSC - SC) Num paralelepípedo retângulo, as medidas das arestas estão em progressão aritmética de razão 3. A medida, em CENTÍMETROS, da menor aresta desse paralelepípedo, sabendo que a área total mede 132 cm^2, é:

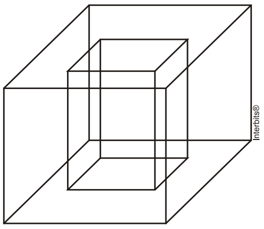
08) (UFSC – SC) Um tanque, em forma de paralelepípedo, tem por base um retângulo de lados 0,50m e 1,20m. Uma pedra, ao afundar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,01m. Então, o volume da pedra, em decímetros cúbicos, é:

(1m – 10dm)

09) (UEPG – PR) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais aos números 1, 2 e 3 e sua área total é igual a $198cm^2$. Sobre esse paralelepípedo, assinale o que for correto.

01. Seu volume vale $162cm^3$.
02. As suas dimensões formam uma progressão aritmética.
04. A soma das medidas de todas as suas arestas é 72cm.
08. Sua diagonal é maior que 11cm.

10) (ENEM) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



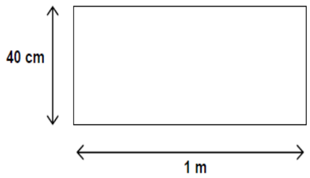
O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de
a) 12 cm^3.
b) 64 cm^3.
c) 96 cm^3.
d) 1 216 cm^3.
e) 1 728 cm^3.

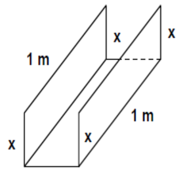
11) (ENEM) A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo "espaços vazios" que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.
Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a, diminui para um valor que é
a) 20% menor que V, uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.
b) 36% menor que V, porque a área da base diminui de a^2 para $[(1 – 0,2)a]^2$.
c) 48,8% menor que V, porque o volume diminui de a^3 para $(0,8a)^3$.
d) 51,2% menor que V, porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.
e) 60% menor que V, porque cada lado diminui 20%.

12) (ACAFE – SC) Numa piscina, em forma de paralelepípedo retângulo, de 50m de comprimento e 25m de largura, o nível da água está na marca de 2m. Retirando-se 500m^3 de água, o seu nível baixará:
a) 20cm
b) 40cm
c) 80cm
d) 50cm
e) 60cm

Nível 3

13) (UFPR – PR) Uma calha será construída a partir de folhas metálicas em formato retangular, cada uma medindo 1 m por 40 cm. Fazendo-se duas dobras de largura x, paralelas ao lado maior de uma dessas folhas, obtém-se três faces de um bloco retangular, como mostra a figura da direita.





a) Obtenha uma expressão para o volume desse bloco retangular em termos de x.
b) Para qual valor de x o volume desse bloco retangular será máximo?

14) (UFRGS – RS) Uma caixa com a forma de um paralelepípedo retangular tem as dimensões dadas por
$x,\ x+4$ e $x-1.$
Se o volume desse paralelepípedo é $12,$ então as medidas das dimensões da caixa são

a) $1, 1$ e $12.$
b) $1, 2$ e $6.$
c) $1, 3$ e $4.$
d) $2, 2$ e $3.$
e) $2, 3$ e $4.$

GABARITO – AULA 04

1) 64	**2)** b	**3)** a	**4)** c	**5)** c	**6)** 64
7) 02	**8)** 06	**9)** 15	**10)** d	**11)** c	**12)** b
13) *	**14)** b				

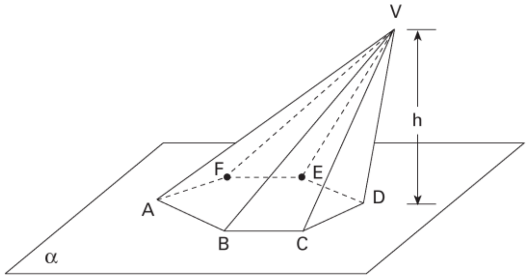
13) a) $V(x) = - 2x^2 + 0,4x$ b) 10cm

AULA 05

PIRÂMIDES REGULARES

1. Definição

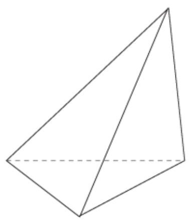
Pirâmides são poliedros cuja base é uma região poligonal ABCDEF e as faces são regiões triangulares. Uma pirâmide se diz regular quando for reta (projeção ortogonal do vértice coincide com o centro da base) e a figura da base for regular



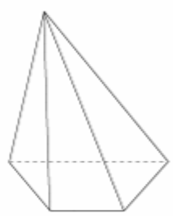
2. Nomenclatura

Dá-se o nome da pirâmide através do polígono da base. Observe alguns exemplos.

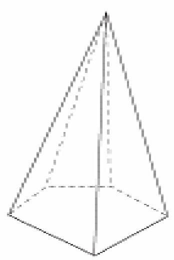
- Pirâmide Triangular $\rightarrow$ a base é um triângulo



- Pirâmide quadrangular $\rightarrow$ a base é um quadrado



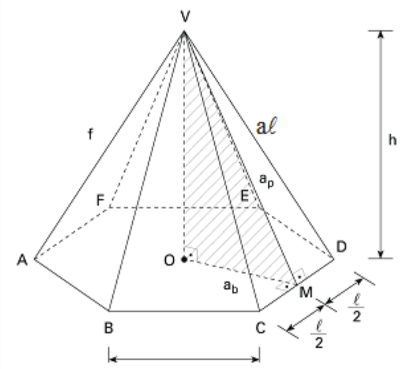
- Pirâmide Pentagonal $\rightarrow$ a base é um pentágono



3. Pirâmides Regulares

Se a base de uma pirâmide reta for um polígono regular, a pirâmide é **regular**.

Elementos e Formulário



- Aresta da base - ℓ
- Aresta lateral - aℓ
- Altura – h
- Apótema da base – ab
- Apótema da pirâmide – ap
- Raio da circunferência circunscrita – R

Para uma pirâmide de regular com **n** lados da base vale as seguintes relações:

➢ **Área da Base** (S_B)

É a área do polígono que está na base.

Quando a pirâmide for:

- Quadrangular regular $\Leftarrow$ $S_B = \ell^2$
- Triangular regular $\Leftarrow$ $S_B = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
- Hexagonal regular $\Leftarrow$ $S_B = \dfrac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

➢ **Área Lateral** (S_L)

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais.

$$\boxed{S_L = n.\frac{\ell.ap}{2}}$$

Quando a pirâmide for:

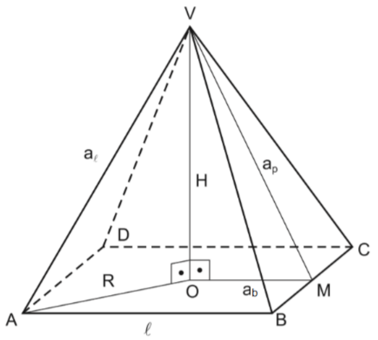
- Quadrangular regular $\Leftarrow$ $S_\ell = \dfrac{4\ell a_p}{2}$
- Triangular regular $\Leftarrow$ $S_\ell = \dfrac{3\ell a_p}{2}$
- Hexagonal regular $\Leftarrow$ $S_\ell = \dfrac{6\ell a_p}{2}$

- **Área Total** (S_T)

A área total de uma pirâmide é a soma da área da base com a área lateral.

$$\boxed{S_T = S_B + S_L}$$

Relações Auxiliares



- Do triângulo VOM, temos: $\boxed{{a_p}^2 = {a_b}^2 + h^2}$
- Do triângulo VOA, temos: $\boxed{{a_\ell}^2 = h^2 + R^2}$
- Do triângulo VMC, temos: $\boxed{{a_\ell}^2 = {a_p}^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

- **Volume**

A fórmula do volume de uma pirâmide qualquer é dada por "um terço da área da base vezes a altura", isto é,

$$\boxed{V = \frac{S_B.h}{3}}$$

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) (UFSC – SC) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem aresta da base 8cm e apótema da pirâmide 5cm. Determine, em cm^3, o volume dessa pirâmide.

02) (UFSC – SC) A aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular mede 4cm e sua altura mede $2\sqrt{3}$cm. Determine a área total, em cm^2, dessa pirâmide.

03) (UEPG-PR) Calcule a área total de um tetraedro regular de aresta igual a 4 cm.

a) $\mathbf{4}\sqrt{3}$ cm^2
b) $8\sqrt{3}$ cm^2
c) $12\sqrt{3}$ cm^2
d) $16\sqrt{3}$ cm^2
e) $24\sqrt{3}$ cm^2

04) (UEPG – PR) Uma pirâmide quadrangular regular tem 36 cm^2 de área da base. Sabendo que a altura da pirâmide tem $3\sqrt{3}$ cm, assinale o que for correto.

01. A área lateral da pirâmide é o dobro da área da base.
02. A área total da pirâmide é o triplo da área da base.
04. A área de uma face lateral da pirâmide é a sexta parte de sua área total.
08. A razão das áreas total e lateral dessa pirâmide é um número fracionário.
16. O volume dessa pirâmide é $108\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

05) (UTFPR – PR) Uma barraca de camping foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume desta barraca medem, respectivamente:

a) $6\sqrt{3}\text{ m}^2$ e $6\sqrt{3}\text{ m}^3$.
b) $3\sqrt{3}\text{ m}^2$ e $3\sqrt{3}\text{ m}^3$.
c) $5\sqrt{3}\text{ m}^2$ e $2\sqrt{3}\text{ m}^3$.
d) $2\sqrt{3}\text{ m}^2$ e $5\sqrt{3}\text{ m}^3$.
e) $4\sqrt{3}\text{ m}^2$ e $8\sqrt{3}\text{ m}^3$.

Nível 2

06) (IFSC – SC) Antônio acredita que possuir uma pirâmide como amuleto atrai energias positivas no dia da prova do vestibular. Por esse motivo, comprou uma pirâmide regular reta com altura de 6 cm e cuja base é um quadrado de lado 4 cm. A pirâmide é maciça e feita de um material cuja densidade é de $3\ g/cm^3$. Em relação aos dados acima, assinale no cartão-resposta a soma da(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. O volume da pirâmide é igual a 96 cm^3
02. A área total da pirâmide é igual a $16(1+\sqrt{10})$ cm^2
04. A pirâmide tem 96 gramas.
08. A área lateral da pirâmide é igual a $4\sqrt{10}$ cm^2
16. O apótema da pirâmide mede $2\sqrt{10}$ cm

07) (UEL – PR) As maiores pirâmides egípcias são conhecidas pelo nome de "Pirâmides de Gizé" e estão situadas nas margens do Nilo. A maior e mais antiga é a de Quéops que tem a forma aproximada de uma pirâmide de base quadrada com 230 metros de lado e cujas faces laterais se aproximam de triângulos equiláteros. Em matemática, "pirâmide" é um sólido geométrico. O volume de um sólido com as dimensões da pirâmide de Quéops é:

a) $\dfrac{230^3}{\sqrt{3}}\,m^3$

b) $\dfrac{230^3\sqrt{2}}{6}\,m^3$

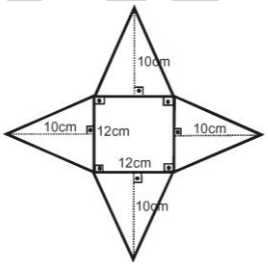
c) $\dfrac{230^3\sqrt{3}}{4}\,m^3$

d) $\dfrac{230^3}{\sqrt{2}}\,m^3$

e) $\dfrac{230^3\sqrt{2}}{2}\,m^3$

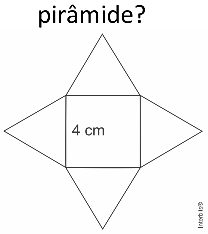
08) (UFSC – SC) Em uma pirâmide quadrangular regular a aresta lateral mede 5cm e a altura mede 4cm. O volume, em cm^3, é:

09) (ACAFE – SC) A figura abaixo mostra a planificação de um sólido. O volume desse sólido é de:



a) $1152cm^3$
b) $1440cm^3$
c) $384cm^3$
d) $1200cm^3$
e) $240cm^3$

10) (UFPR – PR) Temos, abaixo, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



a) $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}\ cm^3$.

b) $16\sqrt{3}\ cm^3$.

c) $32\ cm^3$.

d) $\dfrac{32}{3}\sqrt{2}\ cm^3$.

e) $\dfrac{64}{3}\ cm^3$.

Nível 3

11) (ACAFE – SC) Qual o volume de um octaedro regular cuja soma das medidas das arestas é 144 cm?

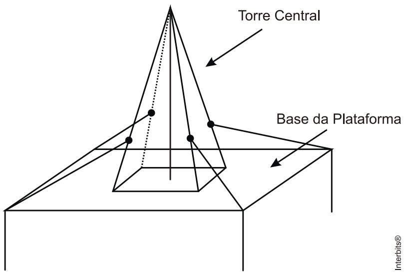
a) $576(2)^{0,5}cm^3$
b) $642\ cm^3$
c) $324(3)^{0,5}cm^3$
d) $400\ cm^3$

12) (ENEM) A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.

Disponível em: www.mauroweigel.blogspot.com.
Acesso em: 23 nov. 2011.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é
a) 97,0.
b) 136,8.
c) 173,7.
d) 189,3.
e) 240,0.

13) (ENEM) Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central.
Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.



Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

a) $\sqrt{288}$
b) $\sqrt{313}$
c) $\sqrt{328}$
d) $\sqrt{400}$
e) $\sqrt{505}$

14) (UDESC – SC) Em uma escola foi proposta uma gincana. De acordo com as regras da gincana, o vencedor de uma das provas seria aquele que chegasse mais próximo do número de sólidos existentes dentro de um pote. Neste pote, com formato de prisma triangular regular, medindo $50\,\text{cm}$ de altura e lado do triângulo da base com $40\,\text{cm}$, foi colocada a mesma quantidade de cubos, pirâmides regulares de base triangular e pirâmides regulares de base quadrangular. Informou-se aos participantes que a altura das pirâmides triangulares é de $3\,\text{cm}$ e que a altura das pirâmides quadrangulares é igual à altura dos cubos. Sabe-se, também, que as arestas dos cubos medem $2\sqrt{3}\,\text{cm}$; as arestas da base das pirâmides triangulares medem $4\,\text{cm}$ e as arestas da base das pirâmides quadrangulares equivalem à metade das arestas dos cubos. Com base nessas informações, João, um dos participantes da gincana, considerou que uma boa estimativa seria fazer os cálculos como se os sólidos preenchessem o máximo possível do pote, deixando a menor quantidade possível de espaços. Nesse caso, João respondeu que o número de sólidos dentro do pote é de:

a) 2001
b) 1248
c) 1998
d) 1251
e) 2015

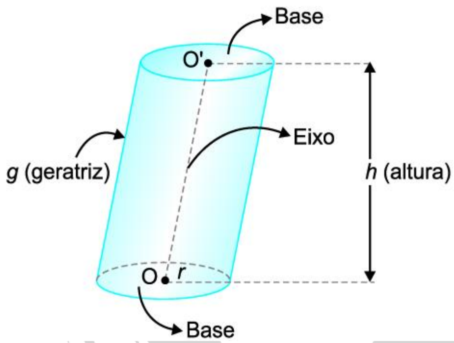
GABARITO – AULA 05						
1) 64	**2)** 48	**3)** d	**4)** 15	**5)** a	**6)** 22	**7)** b
8) 24	**9)** c	**10)** d	**11)** a	**12)** b	**13)** d	**14)**c

AULA 06

CILINDROS

Cilindro de revolução é o sólido obtido quando giramos em torno de uma reta, uma região retangular. Também é chamado de cilindro circular.

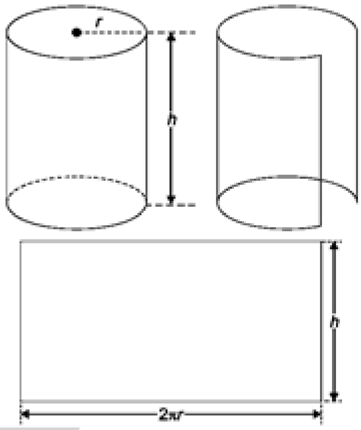
Elementos



Se as geratrizes forem perpendiculares ao plano da base dizemos que o cilindro é reto, caso contrário, é dito cilindro oblíquo. No caso do cilindro reto, temos que g = h

Fórmulas

Considere um cilindro reto.



- **Área da Base**
  $\boxed{S_B = \pi r^2}$

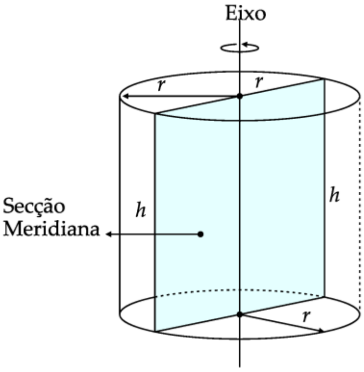
- **Área Lateral**
  $\boxed{S_L = 2\pi rh}$

- **Área Total**
  $\boxed{S_T = 2S_B + S_L}$

- **Volume**
  $\boxed{V = \pi r^2 h}$

Secção Meridiana:

A secção feita no cilindro reto por um plano que contém o seu eixo denomina-se secção meridiana do cilindro.
A secção meridiana é um retângulo de área: **2r.h**.

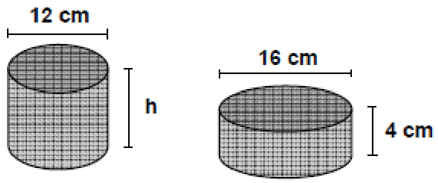


Quando a secção é um quadrado temos um cilindro equilátero (g = h = 2r).

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) (UFPR – PR) As duas latas na figura ao lado possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados. Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual o valor aproximado da altura h?



a) 5 cm.
b) 6 cm.
c) 6,25 cm.
d) 7,11 cm.
e) 8,43 cm.

02) Assinale V para as Verdadeiras e F para as Falsas
a) ( ) Um cilindro reto tem $63\pi cm^3$ de volume. Sabendo que o raio da base mede 3cm, o valor, em centímetros, da sua altura é 7.
b) ( ) Uma caixa d'água de forma cilindrica tem 1,5 m de diâmetro e capacidade de 7065 litros. A altura da caixa é aproximadamente 4m
c) ( ) Um cilindro reto, cuja base é um círculo de raio r = 3m, tem 108π m^3 de volume. Então, a área total (em m^2) desse cilindro é 76π

03) (UNESP – SP) A base metálica de um dos tanques de armazenamento de látex de uma fábrica de preservativos cedeu, provocando um acidente ambiental. Nesse acidente, vazaram 12 mil litros de látex. Considerando a aproximação $\pi = 3$, e que 1000 litros correspondem a $1m^3$, se utilizássemos vasilhames na forma de um cilindro circular reto com 0,4 m de raio e 1 m de altura, a quantidade de látex derramado daria pra encher exatamente quantos vasilhames?

a) 12
b) 20
c) 22
d) 25
e) 30

04) A área lateral de um cilindro equilátero é de $36\pi m^2$. O valor, em m^3, de $\dfrac{1}{\pi}$ do volume desse cilindro é:

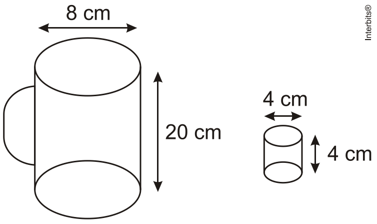
05) (PUC – RJ) O volume do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado 3 cm em torno de um dos seus lados é, em cm^3 :
a) 3π
b) 6π
c) 9π
d) 18π
e) 27π

Nível 2

06) (ACAFE – SC) Uma empresa que constrói tanques para tratamento de efluentes industriais deseja fabricar um tanque sem tampa no formato de cilindro circular reto equilátero que tenha capacidade para 432π m^3. O material para o fundo do tanque custa R$ 5,00 o m^2 e para a lateral R$ 2,00. Determine quanto custará o material para produção deste tanque.

a) R$ 468 π
b) R$ 4321 π
c) R$ 424 π
d) R$ 1468 π

07) (ENEM) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo

08) (IFSC – SC) A respeito de um cilindro circunscrito a um cubo cuja diagonal mede $3\sqrt{3}$ cm, analise as proposições e assinale no cartão-resposta a soma da(s) CORRETA(S).

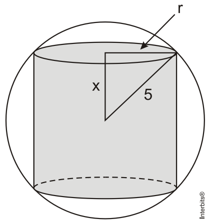
01. A aresta do cubo mede 3 cm.
02. Este cilindro é equilátero.
04. A área total do cubo mede 18 cm².
08. O raio do cilindro mede $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.
16. O volume do cilindro é $\frac{27}{4}\pi$ cm³.
32. A altura do cilindro mede 3 cm.

Nível 3

09) (UDESC – SC) Algumas caixas de pizza para entrega têm o formato de um prisma regular de base hexagonal. Considere uma caixa destas com altura de 4 cm e, com base, um polígono de perímetro 72 cm. Se a pizza tem o formato de um cilindro circular, então o volume máximo de pizza que pode vir nesta caixa é:

a) $216\sqrt{3}\,cm^3$
b) $576\pi\,cm^3$
c) $864\sqrt{3}\,cm^3$
d) $108\pi\,cm^3$
e) $432\pi\,cm^3$

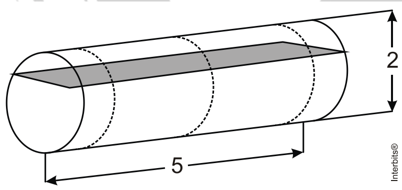
10) (UFPR – PR) Um cilindro de raio r está inscrito em uma esfera de raio 5, como indica a figura abaixo.



Obtenha o maior valor de x, de modo que o volume desse cilindro seja igual a 72π.

a) $\sqrt{13}-2$.
b) 3.
c) $3\sqrt{2}$.
d) $2\sqrt{5}$.
e) 4.

11) (UFRGS – RS) Um cilindro tem o eixo horizontal como representado na figura abaixo. Nessa posição, sua altura é de 2 m e seu comprimento, de 5 m.



A região sombreada representa a seção do cilindro por um plano horizontal distante 1,5 m do solo. A área dessa superfície é

a) $\sqrt{3}$.
b) $2\sqrt{2}$.
c) $2\sqrt{3}$.
d) $5\sqrt{2}$.
e) $5\sqrt{3}$.

12) (UDESC – SC) A planificação da superfície lateral de um cilindro circular reto de altura *h* e raio *r* gera a região retangular *ABCD*, conforme é ilustrado na Figura 1. Suponha que esta região seja utilizada para construir um novo cilindro, cuja altura é a medida do segmento *AB* , sem haver sobreposição.

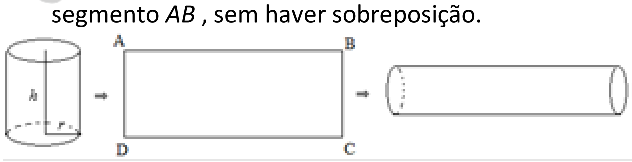


Figura 1: Planificação e construção de um cilindro

O volume do novo cilindro é:

a) $\frac{rh^2}{2}$ b) $\frac{r^2h}{2}$ c) $\frac{rh^2\pi}{2}$ d) $\frac{r^2h\pi}{2}$ e) $\pi r^2 h$

GABARITO – AULA 06

1) d	**2)** a) V	b) V	c) F	**3)** d	**4)** 54	**5)** e
6) a	**7)** a	**8)** 33	**9)** e	**10)** e	**11)** e	**12)** a

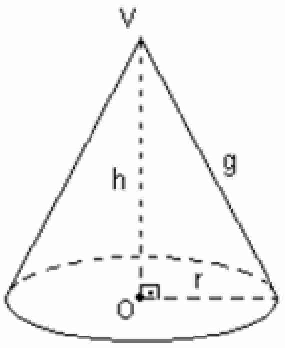
AULA 07

CONES

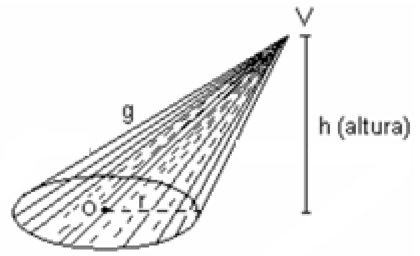
Cone de revolução é o sólido obtido quando giramos um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Este cateto é a altura do cone o outro é o raio do cone, e a hipotenusa é a geratriz do cone.

Um cone pode ser classificado em reto ou oblíquo.

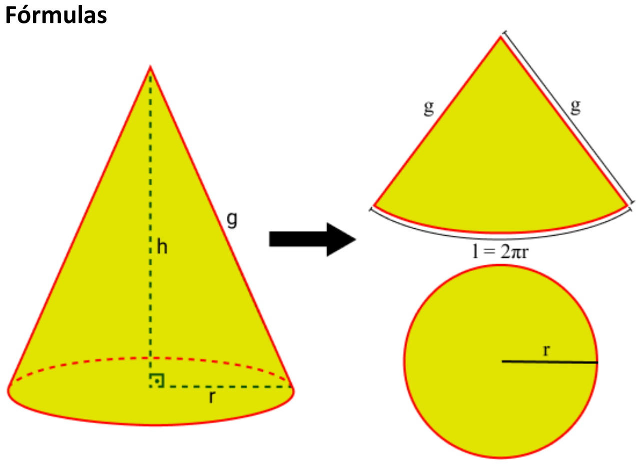
- ***Cone reto:*** É aquele em que o eixo VO é perpendicular à base, ou seja, a projeção ortogonal do ponto V coincide com o ponto O (centro da base).



- ***Cone oblíquo***: É aquele que não é reto, ou seja, a projeção ortogonal do ponto V não coincide com o centro da base.



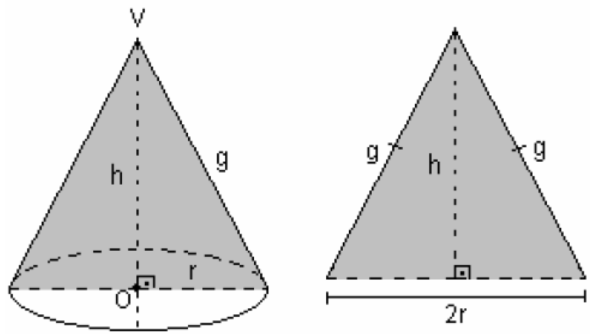
Fórmulas



Fórmulas

- $\boxed{S_B = \pi r^2}$
- $\boxed{S_L = \pi r . g}$ Relação Auxiliar: $\boxed{g^2 = r^2 + h^2}$
- $\boxed{S_T = S_B + S_L}$
- $\boxed{V = \dfrac{\pi r^2 . h}{3}}$

Cone Equilátero g = 2r



EXERCÍCIOS

Nível 1

01) (UFSC – SC)O volume de um cone reto é $1024\,\pi\,\text{cm}^3$. Se a altura, o raio da base e a geratriz desse cone formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então calcule a medida da geratriz, em centímetros, e assinale o valor obtido no cartão-resposta.

02) (UEM – PR) Num cone equilátero, circunscrevemos um cilindro com área da base 4π cm^2. Sobre isto, é correto afirmar que:

01. a altura do cilindro é o dobro da altura do cone.
02. a área da base do cone é $\frac{4}{3}\pi$ cm^2
04. a área lateral do cilindro é de $8\sqrt{3}\,\pi$ cm^2
08. a área lateral do cone é 8π cm^2
16. o volume do cilindro é $8\sqrt{3}\,\pi$ cm^3
32. a razão entre o volume do cilindro e o volume do cone é 3.

03) Determine a altura de um cone de diâmetro 8cm e área lateral $20\pi cm^2$.

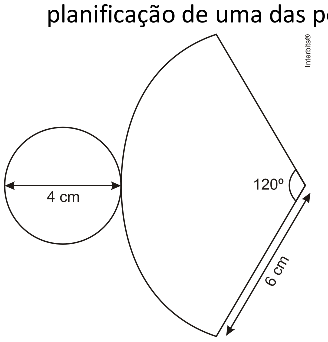
04) (UFPEL – RS) Imagine uma formiga, bem inteligente, perambulando mundo afora, em busca de mais açúcar. Em meio as suas andanças, a formiga se depara com a seguinte situação: está na circunferência que delimita a base de um cone reto equilátero, de $6\sqrt{3}$ cm de altura, que está sobre uma mesa. Usando seus detectores de açúcar, sabe que no vértice do cone tem um delicioso torrão. Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que o caminho mais curto que a formiga deve seguir para chegar ao torrão de açúcar mede

a) 6 cm.
b) 12 cm.
c) 18 cm.
d) $6\sqrt{3}$ cm.
e) $18\sqrt{3}$ cm.

Nível 2

05) (UFSC – SC) Derrete-se um bloco de ferro, de forma cúbica, de 9cm de aresta, para modelar outro bloco, de forma cônica, de $\frac{15}{\pi}$ cm de altura e 12 cm de raio da base. O volume, em cm^3, de ferro que sobrou após a modelagem, é:

06) (PUC – RS) Um desafio matemático construído pelos alunos do Curso de Matemática tem as peças no formato de um cone. A figura abaixo representa a planificação de uma das peças construídas.



A área dessa peça é de ______ cm^2.

a) 10π
b) 16π
c) 20π
d) 28π
e) 40π

07) Assinale V para as Verdadeiras e F para as Falsas

a) ( ) O volume de um cone circular reto é de 27π dm^3 e a altura é de 9 dm. O raio da base é 3dm.
b) ( ) Num cone reto, a altura é 3m e o diâmetro da base é 8m. Então, a área total (em m^2) vale 36π.
c) ( ) Um triângulo retângulo isósceles, de hipotenusa $3\sqrt{2}$ cm, gira em torno de um dos catetos. O volume do sólido de revolução gerado é $6\pi\ cm^3$.
d) ( ) Um cone equilátero tem área lateral igual a $18\pi\ dm^2$. O valor, em dm^3, o valor do seu volume é $9\pi\sqrt{3}$

08) (UNESP – SP) Prato da culinária japonesa, o *temaki* é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.

Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm^3, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

a) 46.
b) 58.
c) 54.
d) 50.
e) 62.

09) O volume de um cone reto é $12\pi cm^3$. Se o raio da base, a altura e a geratriz desse cone formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então calcule a medida da geratriz, em centímetros.

Nível 3

10) (UEL – PR) Considere uma lata, com o formato de um cilindro reto de altura *h cm* e raio *r cm* (Figura 1), completamente cheia de doce de leite. Parte do doce dessa lata foi transferido para dois recipientes (Figura 2), iguais entre si e em forma de cone, que têm a mesma altura da lata e o raio da base igual à metade do raio da base da lata. Considere também que os dois recipientes ficaram completamente cheios de doce de leite.

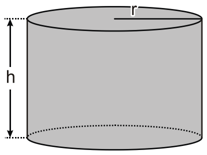


Figura 1

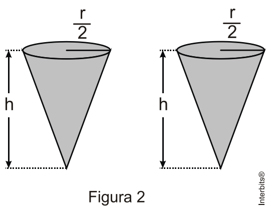


Figura 2

Desprezando a espessura do material de que são feitos os recipientes e a lata, determine quantos outros recipientes, também em forma de cone, mas com a altura igual à metade da altura da lata e de mesmo raio da lata (Figura 3), podem ser totalmente preenchidos com o doce de leite que restou na lata.

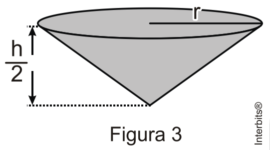


Figura 3

Observação: Na lata e nos recipientes completamente cheios de doce de leite, o doce não excede a altura de cada um deles e, na transferência do doce de leite da lata para os recipientes, não há perda de doce.

11) (ESPCEX) Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio $1\text{cm}.$ O volume desse cone (em cm^3) é igual a

a) $\frac{1}{3}\pi.$

b) $\frac{2}{3}\pi.$

c) $\frac{4}{3}\pi.$

d) $\frac{8}{3}\pi.$

e) $3\pi.$

12) (UFMG) Os lados de um triângulo isósceles medem 5cm, 6cm e 5cm. O volume do sólido que se obtém girando-o em torno de sua base, em cm^3, é:

a) 16π
b) 24π
c) 32π
d) 48π
e) 75π

GABARITO – AULA 07

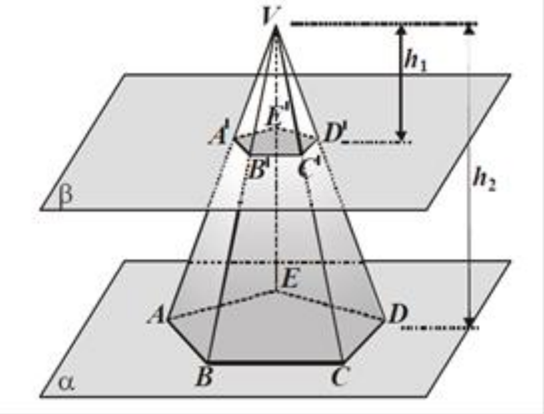
1) 20	**2)** 60	**3)** 3cm	**4)** b	**5)** 09	**6)** b
7) a) V	b) V	c) F	**8)** d	**9)** 05	**10)** 5
11) d	**12)** c				

AULA 08

TRONCOS

1. Tronco de Pirâmide

O plano β corta a pirâmide em dois sólidos. A parte de cima é uma pirâmide VA´B´C´D´E´ e a parte entre os planos α e β é um troco de pirâmide.



Se os planos α e β forem paralelos, podemos estabelecer as seguintes razões:

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2}=\frac{VA'}{VA}=\frac{VB'}{VA}=....\frac{VE'}{VE}}$$

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=....\frac{E'A'}{EA}}$$

$$\boxed{\frac{S_b}{S_B}=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{A'B'}{AB}\right)^3=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3}$$

Volume do tronco

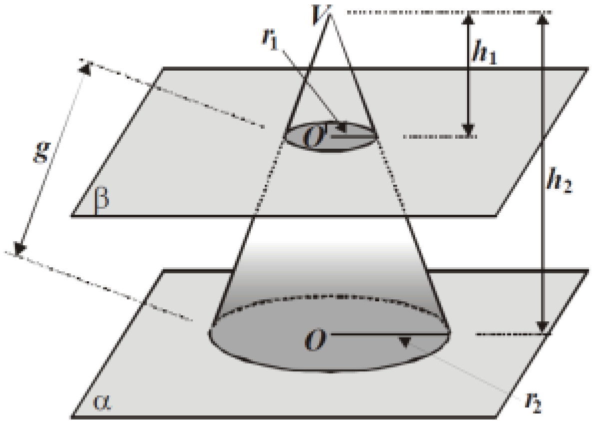
O volume do tronco de pirâmide pode ser calculado pela expressão:

$$\boxed{V=\frac{h}{3}\left[SB+\sqrt{SB.Sb}+Sb\right]}$$

(h) é a altura do tronco

2. Tronco de Cone

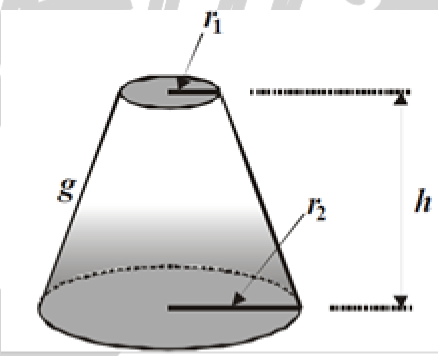
O plano β paralelo ao plano α, corta o cone em dois sólidos. A parte de cima é um cone de raio r_1 e a parte entre os dois planos é um troco de cone.



Se os planos α e β forem paralelos, podemos estabelecer as seguintes razões:

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{r_1}{r_2} \qquad \boxed{\frac{S_b}{S_B}=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2} \qquad \boxed{\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3}$$

Volume do tronco



$$\boxed{V=\frac{h\pi}{3}\left[{r_1}^2+r_1.r_2+{r_2}^2\right]}$$

EXERCÍCIOS

Nível 1

01) (UFSC – SC) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m^2 de área. A 4 m do vértice traça-se um plano paralelo à base e a secção assim feita tem 64 m^2 de área. Qual a altura da pirâmide?

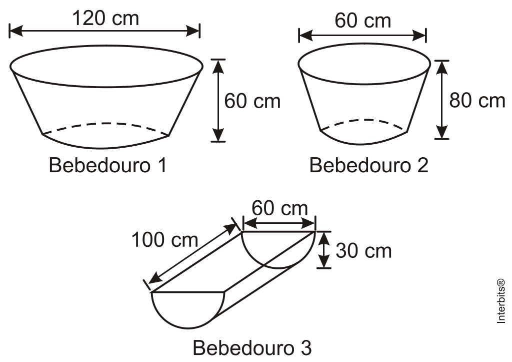
02) A base de uma pirâmide tem 225 cm^2 de área. Uma secção paralela à base, feita a 3cm do vértice, tem 36cm^2 de área. A altura da pirâmide é:

a) 4,5 cm
b) 7,5 cm
c) 1,5 cm
d) 9,5cm
e) 3,5cm

03) (UFRGS – RS) Um cone reto com raio da base medindo $10\ \text{cm}$ e altura de $12\ \text{cm}$ será seccionado por um plano paralelo à base, de forma que os sólidos resultantes da secção tenham o mesmo volume.
A altura do cone resultante da secção deve, em cm, ser

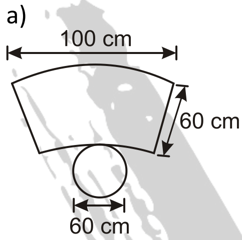
a) $6.$
b) $8.$
c) $6\sqrt{2}.$
d) $6\sqrt[3]{2}.$
e) $6\sqrt[3]{4}.$

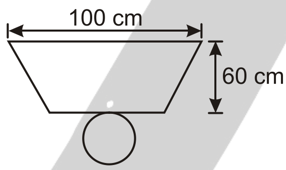
04) (ENEM) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

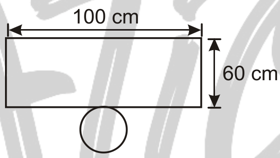


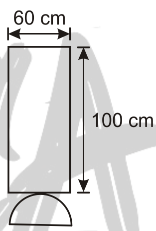
A escolha do bebedouro. In: *Biotemas*. V.22, no. 4, 2009 (adaptado).

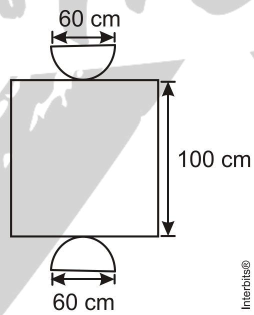
Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

a)


b)


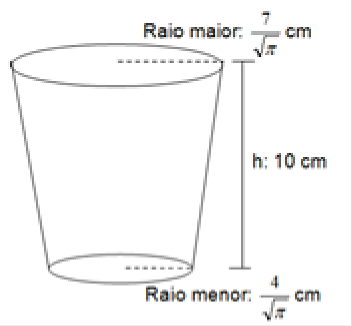
c)


d)


e)


Nível 2

05) (IFSC – SC) Um copo tem o formato de um tronco de cone reto e suas dimensões internas estão descritas na figura abaixo:



Sobre o volume do copo, assinale no cartão-resposta o número correspondente à proposição correta ou à soma das proposições corretas.

01. O copo tem capacidade máxima de 310 ml.
02. A área da base maior do tronco de cone é exatamente igual ao triplo da área da base menor.
04. O volume máximo de água que cabe no copo é igual a 310 cm³.
08. Se forem colocados 300 ml de água no copo, ele transbordará.
16. Se for colocado água no copo até uma altura de 5 cm, o copo estará preenchido com metade da sua capacidade.
32. Se for colocado água no copo até uma altura de 5 cm, o copo estará preenchido com menos da metade da sua capacidade.

06) (UDESC – SC) Uma caixa de um perfume tem o formato de um tronco de pirâmide quadrangular regular fechado. Para embrulhá-la, Pedro tirou as seguintes medidas: aresta lateral 5 cm e arestas das bases 8 cm e 2 cm. A quantidade total de papel para embrulhar esta caixa, supondo que não haja desperdício e nem sobreposição de material, foi:

a) 88 cm²
b) 168 cm²
c) 80 cm²
d) 68 cm²
e) 148 cm²

07) (UDESC – SC) Se a geratriz, a altura e o raio menor de um tronco de cone reto são, respectivamente, $\sqrt{13}$ cm, 3 cm e 3 cm, então o volume do cone original é:

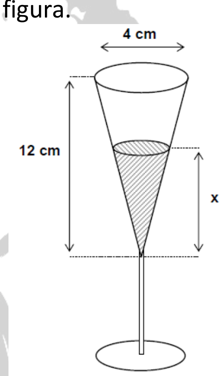
a) 98π cm³
b) 49π cm³
c) $13{,}5\pi$ cm³
d) $62{,}5\pi$ cm³
e) 76π cm³

Nível 3

08) (UDESC – SC) Considere um tronco de pirâmide regular, cujas bases são quadrados com lados medindo 4 cm e 1 cm. Se o volume deste tronco é 35 cm³, então a altura da pirâmide que deu origem ao tronco é:

a) 5 cm
b) 5/3 cm
c) 20/3 cm
d) 20cm
e) 30cm

09) (UFPR – PR) A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.



a) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?
b) Obtenha uma expressão para o volume V de líquido nessa taça, em função da altura x indicada na figura.

10) (UEPG – PR) Considerando um copo com a forma de um tronco de cone cujas bases têm diâmetros de 6 cm e 4 cm, enquanto sua altura é de $3\sqrt{11}$ cm, assinale o que for correto.

01. A razão entre as áreas da base maior e da base menor desse tronco é $\frac{3}{2}$.
02. O volume desse tronco é $19\pi\sqrt{11}$ cm³.
04. A área lateral desse tronco é 50π cm².
08. A área da seção transversal desse tronco é $30\sqrt{11}$ cm².
16. A área total desse tronco é 63π cm².

GABARITO – AULA 08

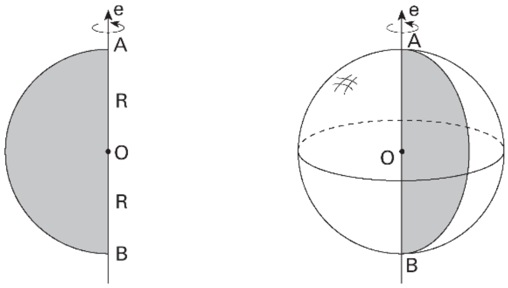
1) 06	**2)** b	**3)** e	**4)** e	**5)** 37	**6)** e
7) d	**8)** c				

9) a) 16π b) $V(x) = \frac{\pi x^3}{108}$ **10)** 22

AULA 09

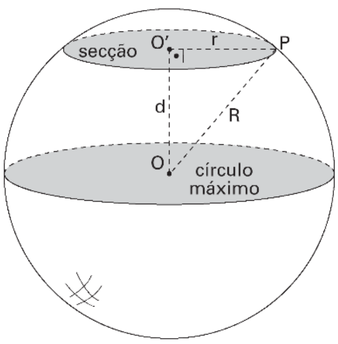
ESFERAS

Esfera é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a R. A esfera também pode ser considerada um sólido determinado pela rotação de um círculo em torno de um de seus diâmetros.



Secção de uma esfera

Qualquer plano α que secciona uma esfera de raio R determina como **secção plana** um círculo de raio r.



d é a distância entre o plano α e o centro da esfera.
R é o raio da esfera.
r é o raio da secção.

Relação: $R^2 = r^2 + d^2$

FÓRMULAS

- **Superfície esférica:** $\boxed{A_s = 4\pi R^2}$
- **Volume:** $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

EXERCÍCIOS

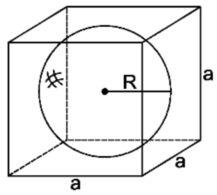
Nível 1

01) Um ourives deixou como herança para seus oito filhos uma esfera maciça de ouro. Os herdeiros resolveram fundir o ouro e, com ele, fazer oito esferas iguais. Cada uma dessas esferas terá um raio igual a:

a) 1/2 do raio da esfera original
b) 1/3 do raio da esfera original
c) 1/4 do raio da esfera original
d) 1/6 do raio da esfera original
e) 1/8 do raio da esfera original

02) (FUVEST – SP) Uma superfície esférica de raio 13cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, é:

03) Considere uma esfera inscrita num cubo, conforme mostra a figura. Sabendo que o volume do cubo é $216m^3$, assinale o que for correto.



01. a aresta do cubo é de 6m
02. o volume da esfera é de $36\pi m^3$
04. o volume interior ao cubo e exterior à esfera é de $36(6 - \pi)\ m^3$
08. uma esfera circunscrita a esse cubo terá raio $3\sqrt{3}$ m
16. A área da superfície esférica é superior que a área total do cubo.

04) (UDESC – SC) Seja S uma seção de uma esfera determinada pela interseção com um plano, conforme Figura 2.

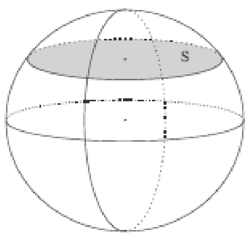


Figura 2

Se S está a 3 cm do centro da esfera e tem área igual a 16π cm², então o volume desta esfera é:

a) $36\pi\ cm^3$

b) $\frac{256\pi}{3} cm^3$

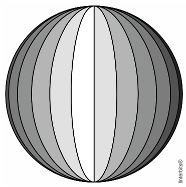
c) $100\ \pi cm^3$

d) $16\pi\ cm^3$

e) $\frac{500\pi}{3} cm^3$

Nível 2

05) (UDESC – SC) Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



Sabendo-se que o volume da bola é $2304\pi cm^3$, então a área da superfície de cada faixa é de:

a) $20\pi cm^2$
b) $24\pi cm^2$
c) $28\pi cm^2$
d) $27\pi cm^2$
e) $25\pi cm^2$

05) (UFRGS – RS) Considere um cilindro reto de altura 32 e raio da base 3, e uma esfera com volume igual ao do cilindro.
Com essas condições, o raio da esfera é
a) 4.
b) 6.
c) 8.
d) 10.
e) 12.

06) (UFSC – SC) A razão entre o volume de um cubo e sua área total é 2. O valor de $\frac{1}{3\pi}$ do volume da esfera, inscrita nesse cubo, é:

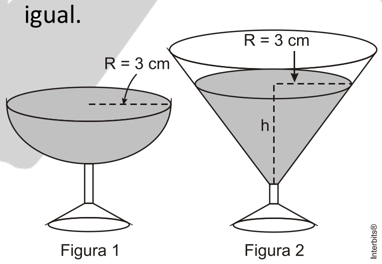
07) (UEPG – PR) – Duas esferas, congruentes entre si, são tangentes externamente. Um cilindro circular reto, de volume igual a $32\pi cm^3$, está circunscrito à reunião dessas esferas. Assim, assinale o que for correto.

01. A área total do cilindro é $40\pi\ cm^2$.
02. O volume de cada esfera é maior que 30 cm^3.
04. A altura do cilindro é o triplo de seu diâmetro da base.
08. A razão entre o volume do cilindro e o volume das duas esferas inscritas é $\frac{3}{2}$

08) (ENEM) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.
Um medicamento é produzido em pílulas com 5mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.
Use 3 como valor aproximado para π.
A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

a) 168.
b) 304.
c) 306.
d) 378.
e) 514.

09) (ENEM) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de
a) 1,33.
b) 6,00.
c) 12,00.
d) 56,52.
e) 113,04.

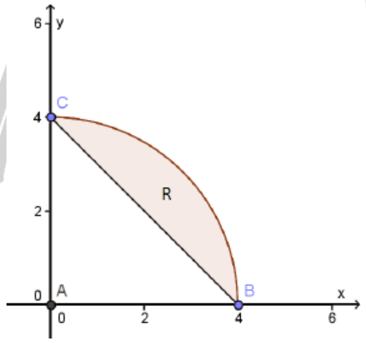
Nível 3

10) (ACAFE – SC) Um tubo cilíndrico reto de volume $128\pi\ cm^3$, contém oito bolinhas de tênis de mesa congruentes entre si e tangentes externamente.
Sabendo que o cilindro está circunscrito à reunião dessas bolinhas, o percentual do volume ocupado pelas bolinhas dentro do tubo é, aproximadamente, de:

a) 75.
b) 50.
c) 33.
d) 66.

11) (UFSC – SC) Um recipiente de forma cilíndrica medindo 12cm de raio interno é preenchido com água até uma altura “h”. Uma bola (esfera) de raio 12cm é colocada no fundo desse recipiente e constatamos que a água recobre exatamente o nível da bola. Quanto mede a altura “h”, (em cm)?

12) (ACAFE – SC) Ao se rotacionar a região delimitada pelo arco R e pelo segmento BC em torno do eixo y, obtém um sólido cujo volume mede: (Considere as medidas indicadas em cm e o arco como sendo um quarto de uma circunferência)



a) $4{,}25\pi\ cm^3$

b) $64\pi\ cm^3$

c) $\frac{64\pi}{3}\ cm^3$

d) $13{,}25\pi\ cm^3$

GABARITO – AULA 09

1) a	**2)** 5	**3)** 15	**4)** e	**5)** b	**6)** b	**7)** 11
8) e	**9)** b	**10)** d	**11)** 08	**12)** c		