

MATEMÁTICA

BINÔMIO DE NEWTON

$$(a + b)^n$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$





SUMÁRIO

BINÔMIO DE NEWTON

AULA

01

NÚMEROS BINOMIAIS



AULA

02

TERMO GERAL DE $(a + b)^n$



AULA

03

TERMO INDEPENDENTE



$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
...



▶ ASSISTA À AULA

1. Números Binomiais

Dados dois números naturais n e p , denomina-se número binomial de n sobre p e indicado por

$\binom{n}{p}$ ao número definido por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ com } n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq p$$

$n \rightarrow$ numerador

$p \rightarrow$ classe

EXEMPLO

Determine o valor $\binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{4}$

Solução:

Desenvolvendo os números binomiais, vem:

$$\binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{4} = \frac{7!}{0!(7-0)!} + \frac{5!}{1!(5-1)!} + \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1 + 5 + 1 = 7$$

Portanto:

$$\binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{4} = 7$$

DE IMEDIATO, VEM:

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{1} = n$ c) $\binom{n}{n} = 1$

OBSERVAÇÕES:

- ✓ Dois números binomiais de mesmo numerador são chamados complementares quando a soma dos denominadores (classes) é igual ao numerador

Exemplo:

$\binom{10}{4}$ e $\binom{10}{6}$ são complementares, pois $4 + 6 = 10$

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são complementares, pois $p + n - p = n$

PROPRIEDADE: Dois números binomiais complementares são iguais.

$$\text{Então se } \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \Rightarrow \begin{cases} k = p \\ \text{ou} \\ k + p = n \end{cases}$$

- ✓ Dois binomiais de mesmo numerador são ditos consecutivos se seus denominadores (classes) forem números consecutivos.

Exemplos: a) $\binom{10}{2}$ e $\binom{10}{3}$ b) $\binom{8}{5}$ e $\binom{8}{6}$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} \text{ com } n, p \in \mathbb{N} \text{ e } n > p$$

Propriedade (Relação de Stifel):

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

EXEMPLO

a) $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \binom{7}{3}$ b) $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$

2. Triângulo de Pascal

TRIÂNGULO DE PASCAL

	Col 0	Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6
Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
Linha 5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
Linha 6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

Substituindo cada binomial pelo respectivo valor, temos:

TRIÂNGULO DE PASCAL

```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
  
```

Somando os elementos de uma mesma linha obtém-se uma potência de base 2 e expoente que é a ordem da linha. Observe:

$$\binom{0}{0} \rightarrow 1 = 2^0$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \rightarrow 1 + 1 = 2^1$$

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \rightarrow 1 + 2 + 1 = 2^2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \rightarrow 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \rightarrow 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$$

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \rightarrow 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$$

Genericamente:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

RESUMO E CURIOSIDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL

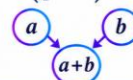
```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
  
```

RELAÇÃO DE STIFEL

Cada termo interno é a soma dos dois termos imediatamente acima.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$



SIMETRIA

Os números são iguais em relação ao eixo central.



SOMA DAS LINHAS

A soma dos termos da linha n é 2^n .



DIAGONAIS

Formam números naturais e números triangulares.



FIBONACCI

A soma de diagonais oblíquas gera a sequência de Fibonacci.



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. O número de comissões com exatamente 2 pessoas que podemos formar a partir de 5 pessoas disponíveis pode ser calculado por $\binom{5}{2}$. Nesse cenário, quantas comissões poderíamos formar?

a) 10 b) 20 c) 30 d) 15 e) 25

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. Calcule E, sendo $E = \binom{6}{2} + \binom{5}{5} + \binom{8}{0} + \binom{9}{1}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (UFRGS – RS) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas abaixo.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7	...
Linha 0	1								
Linha 1	1	1							
Linha 2	1	2	1						
Linha 3	1	3	3	1					
Linha 4	1	4	6	4	1				
Linha 5	1	5	10	10	5	1			
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é

a) 15 b) 91 c) 105 d) 120 e) 455

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. Determine o valor dos seguintes somatórios abaixo:

a) $\sum_{p=0}^8 \binom{8}{p} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{8}$

b) $\sum_{p=0}^{10} \binom{10}{p} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10}$

c) $\sum_{p=2}^6 \binom{6}{p} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{6}{6}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. Determine o(s) valor(es) de x que satisfazem as equações abaixo:

a) $\binom{20}{4} = \binom{20}{3x-2}$

b) $\binom{18}{x-1} = \binom{18}{2x-6}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (MACK – SP) Sabendo que $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 256$, então o valor de n vale

a) 8

b) 7

c) 6

d) 5

e) 4

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UEPG – PR) Assinale o que for correto.

01. $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$

02. $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 15$

04. A soma das soluções da equação $\binom{11}{x} - \binom{10}{3} = \binom{10}{2}$ é 11.

08. A equação $\binom{10}{x} = \binom{10}{2x-4}$ tem duas soluções distintas.

16. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (ESPECEX) A soma dos 2023 coeficientes binomiais com numerador 2022,

$$\sum_{n=0}^{2022} \binom{2022}{n} = \binom{2022}{0} + \binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \dots + \binom{2022}{2021} + \binom{2022}{2022}, \quad \text{equivale a}$$

- a) 4^{1011} . b) 2^{4044} . c) 2^{1011} . d) $(\sqrt{2})^{2023}$. e) $(\sqrt{2})^{1011}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

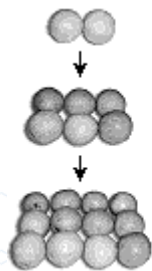
EXERCÍCIOS NÍVEL 3

9. (UECE – CE) O número inteiro n , maior do que 3, para o qual os números $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ e $\binom{n}{3}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética é

- a) $n = 6$ b) $n = 8$ c) $n = 5$ d) $n = 7$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UERJ – RJ) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração abaixo.



Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$, qual n e p são números naturais, $n \geq p$ e C_n^p correspondem ao número de combinações simples de n elementos tomados p a q .

Com base nessas instruções, calcule:

- a soma $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{18}^2$.
- o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 01

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	26	C	*	*	A	23	A	D
1	*									

- 4) a) 256 b) 1024 c) 57
 5) a) 2 ou 6 b) 5
 10. a) 969 b) 1360 laranjas

Resolução do Exercício 1: [A]

Resolução: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Resolução do Exercício 2:

$$\binom{6}{2} + \binom{5}{5} + \binom{8}{0} + \binom{9}{1}$$

$$\frac{6!}{4!2!} + \frac{5!}{0!5!} + \frac{8!}{8!0!} + \frac{9!}{8!1!} =$$

$$15 + 1 + 1 + 9 = 26$$

Resolução do Exercício 3: [C]

A tabela acima é o famoso triângulo de Pascal.

$$\binom{15}{13} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

Resolução do Exercício 4:

a) $2^8 = 256$ b) $2^{10} = 1024$ c) $2^6 - 1 - 6 = 57$

Gabarito: a) 2 ou 6 b) 5

Resolução do Exercício 5:

a) $\binom{20}{4} = \binom{20}{3x-2} \rightarrow \begin{cases} 3x-2=4 \rightarrow x=2 \\ \text{ou} \\ 3x-2+4=20 \rightarrow x=6 \end{cases}$

b)

$$\binom{18}{x-1} = \binom{18}{2x-6} \rightarrow \begin{cases} 2x-6=x-1 \rightarrow x=5 \\ \text{ou} \\ 2x-6+x-1=18 \rightarrow x=\frac{25}{3} \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Resolução do Exercício 6: [A]

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Assim,

$$2^n = 256$$

$$2^n = 2^8$$

$$n = 8$$

Resolução do Exercício 7: [23]

[01] Verdadeira, pois $n-2+2=n$ (binomiais complementares).

[02] Verdadeira, pois

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 - \binom{4}{0} = 15.$$

[04] Verdadeira, pois

$$\binom{11}{x} - \binom{10}{3} = \binom{10}{2} \Rightarrow \binom{11}{x} = \binom{11}{3} \quad e$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ ou } x+3=11 \Rightarrow x=2 \text{ ou } x=8$$

$$8+3=11.$$

$$\binom{10}{x} = \binom{10}{2x-4} \Rightarrow$$

[08] Falsa, pois $2x-4=x$ ou $2x-4+x=10$

$$\Rightarrow x=4 \text{ ou } x=\frac{14}{3} \text{ (não convém).}$$

[16] Verdadeira, pois $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$ (relação de Stifel).

Resolução do Exercício 8: [A]

Como:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Devemos ter que:

$$\binom{2022}{0} + \binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \dots + \binom{2022}{2022} = 2^{2022}$$

Manipulando o expoente, chegamos a:

$$2^{2022} = (2^2)^{1011} = 4^{1011}$$

Resolução do Exercício 9: [D]

Do enunciado,

$$\frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{3}}{2} = \binom{n}{2}$$

$$n + \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = 2 \times \frac{n!}{2! \times (n-2)!}$$

$$n + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} = n \times (n-1)$$

$$6n + n \times (n^2 - 3n + 2) = 6n \times (n-1)$$

$$n \times (6 + n^2 - 3n + 2) = 6n \times (n-1)$$

$$6 + n^2 - 3n + 2 = 6n - 6$$

$$n^2 - 9n + 14 = 0$$

$$n = 2 \text{ ou } n = 7$$

Como $n > 3$,

$$n = 7$$

Resolução do Exercício 10:

Solução. Utilizando os conceitos binomiais, temos:

a)

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{18}^2 = C_{19}^3 = \frac{19!}{3! \cdot 16!} =$$

$$\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{3! \cdot 16!} = (19) \cdot (17) \cdot (3) = 969$$

b)

As camadas de laranjas podem ser representações de números binomiais em colunas. Observando as primeiras representações do triângulo de Pascal, temos que a 3ª coluna multiplicada por 2 fornece a quantidade indicada de laranjas por camadas:

$$\begin{cases} 1^\text{a} \text{ camada: } 2 = 2 \cdot C_2^2 \\ 2^\text{a} \text{ camada: } 6 = 2 \cdot C_3^2 \\ 3^\text{a} \text{ camada: } 12 = 2 \cdot C_4^2 \\ 4^\text{a} \text{ camada: } 20 = 2 \cdot C_5^2 \\ \dots \\ 15^\text{a} \text{ camada: } 2 \cdot C_{16}^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Total: } 2 \cdot (C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{16}^2) = 2 \cdot C_{17}^3 = 2 \cdot \left(\frac{17!}{3! \cdot 14!} \right)$$

$$\text{Total: } 2 \cdot \left(\frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{(2 \cdot 3) \cdot 14!} \right) = 17 \cdot 16 \cdot 5 = 1360$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} \begin{matrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & \dots & & & \end{matrix}$$



▶ ASSISTA À AULA

1. Desenvolvimento de $(a+b)^n$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Compare estes desenvolvimentos acima com as linhas, de zero a cinco do triângulo de Pascal.

```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
    
```

Podemos escrever os desenvolvimentos acima, assim:

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

Genericamente temos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Observe que ao desenvolvermos $(a+b)^n$ obtemos $n+1$ termos.

2. Soma dos coeficientes

Qual é a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+3)^2$? Facilmente podemos responder a essa pergunta se desenvolvermos esse binômio. Veja: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ e os seus coeficientes são 1, 6 e 9. Logo a soma dos coeficientes é $1+6+9 = 16$.

Mas se o binômio fosse $(x+2)^{55}$? É claro que não iremos desenvolver os 56 termos desse binômio para somarmos os seus coeficientes. Existe uma maneira bastante simples de resolver esse problema. Observe:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Se substituirmos $x=1$, obtemos exatamente a soma dos coeficientes $(1+3)^2 = 1+6+9$.

O mesmo ocorre com o binômio $(2x+y)^3$.

$$\text{Observe: } (2x+y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

Substituindo $x=1$ e $y=1$, obtemos

$$(2+1)^3 = 8+12+6+1, \text{ que é exatamente a soma dos coeficientes.}$$

CONCLUSÃO

A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é obtida substituindo-se as variáveis da base por 1.

$$a=1 \text{ e } b=1$$

$$(1+1)^n = 2^n$$

Portanto, a soma dos coeficientes é

$$2^n$$

3. Fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton

É possível obter um termo qualquer do desenvolvimento do binômio sem que tenhamos que desenvolver todo o binômio.

Voltemos à fórmula do desenvolvimento do binômio:

Quando desenvolvemos um binômio da forma $(a+b)^n$ segundo as potências decrescentes de a , obtemos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

onde:

$$1^\circ \text{ termo : } T_1 = \binom{n}{0}a^n$$

$$2^\circ \text{ termo : } T_2 = \binom{n}{1}a^{n-1}.b^1$$

$$3^\circ \text{ termo : } T_3 = \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2$$

$\vdots$ $\vdots$

$$(p+1)\text{-ésimo termo : } T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p}.b^p$$

Ou seja, qualquer termo do desenvolvimento do binômio de Newton pode ser calculado pela expressão:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p}.b^p$$

EXEMPLO

Determinar o 5º termo do desenvolvimento de $(x+2)^6$.

Resolução: $n = 6$ $p = 4$ (T_5) $a = x$ $b = 2$

$$T_5 = \binom{6}{4}.x^{6-4}.2^4$$

$$T_5 = 15.x^2.16$$

$$T_5 = 240 x^2$$

EXEMPLO

Determinar o termo médio do desenvolvimento de $\left(3x + \frac{1}{x}\right)^6$.

Resolução: Temos 7 termos no desenvolvimento de $\left(3x + \frac{1}{x}\right)^6$. Portanto, o termo médio é o 4º.

$n = 6$ $p = 3$ (T_4) $a = 3x$ $b = \frac{1}{x}$

$$T_4 = \binom{6}{3}.(3x)^{6-3}.\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$T_4 = 20.27x^3.\frac{1}{x^3}$$

$$\therefore T_4 = 540$$



1. Desenvolvendo o binômio $(x-y)^{4n}$, obtém-se um polinômio de 19 termos. O valor de n é:

a) 15

b) 10

c) 5

d) 4

e) 2

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



2. Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (2x + 1)^4$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é

a) 16

b) 24

c) 32

d) 40

e) 81

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. O coeficiente do quinto termo no desenvolvimento de $(2x + 3)^6$ é:

a) 1586

b) 4860

c) 5860

d) 3840

e) 1260

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. (UDESC – SC) O sexto termo do binômio $\left(\frac{x}{3} + y\right)^{10}$ é:

a) $\frac{70}{243}x^6y^4$

b) $\frac{28}{27}x^5y^5$

c) $\frac{70}{27}x^4y^6$

d) $\frac{40}{729}x^7y^3$

e) $5x^2y^8$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. (PUC – RS) O termo médio no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{2}{x}\right)^6$ é:

a) 320

b) 720

c) 960

d) 1200

e) 1280

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (UFSC – SC) Determine o valor do coeficiente numérico do 3º termo do desenvolvimento do binômio

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5.$$

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UEPG – PR) Considerando que, $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 32$ e $a - b = -1$, assinale o que for correto.

01. $a > 1$.

02. $b < 0$.

04. $\frac{b}{a}$ é um número natural.

08. $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$.

16. $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UEPG – PR) Dois casais, Marcos e Maria e Leonardo e Lucia, vão ao teatro, sentando-se em quatro lugares consecutivos que sobraram numa mesma fila. Considerando n o número de maneiras diferentes que os quatro podem sentar, de tal forma que Marcos sempre fique ao lado de Maria e Leonardo fique ao lado de Lucia, assinale o que for correto.

01. O coeficiente do termo central do desenvolvimento do binômio $(x + y)^n$ é maior que 80.

02. Um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x - 2)^n$ é igual a $112x^6$.

04. Acendendo pelo menos uma lâmpada, pode-se iluminar de 256 modos diferentes uma sala que tem n lâmpadas, com interruptores independentes.

08. Se $x = 1$, então $\binom{n}{3x+2} = \binom{n}{2x+1}$.

16. Existem menos que 50 maneiras de sentar-se n meninos num banco que tem apenas dois lugares.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (UEPG – PR) Considerando que n é a solução da equação $A_{n,4} = 12 A_{n,2}$ e que m é solução da equação $A_{m,5} = 180 C_{m,3}$, assinale o que for correto.

01. A soma dos coeficientes do binômio $(3x+1)^{m-n}$ é 64.

02. Se $\binom{14}{mp-np} = \binom{14}{p+n}$, então $p = 3$ ou $p = 2$.

04. O quarto termo do desenvolvimento do binômio $(x+m)^n$ é $14.580 x^3$.

08. O valor de $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \binom{n}{6} = 64$.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (UEPG – PR) Sabendo que m e n são as soluções do sistema $\begin{cases} C_{m,n} = 56 \\ A_{m,n} = 336 \end{cases}$, assinale o que for correto.

01. O desenvolvimento do binômio $(x+3)^{m-n}$ é um polinômio com cinco termos.

02. O terceiro termo do binômio $(x+n)^4$ é $54x^2$.

04. O valor de p para que $\binom{15}{np} = \binom{15}{p+8}$ é $p = 4$ ou $p = 6$.

08. A soma dos coeficientes do binômio $(x+1)^m$ é 256.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

GABARITO – AULA 02

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	B	B	E	80	28	10	15
1	10									

RESOLUÇÕES

Resolução do Exercício 1: [D]

$(x - y)^{4n}$, possui 17 termos, então:
 $4n + 1 = 17 \Rightarrow n = 4$

Resolução do Exercício 2: [C]

A soma dos coeficientes de P é dada por
 $P(1) = (2 \cdot 1 + 1)^4 = 3^4 = 81$.

Resolução do Exercício 3: [B]

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a = 2x \\ b = 3 \\ n = 6 \\ p + 1 = 5 \rightarrow p = 4 \end{cases}$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

$$T_5 = \binom{6}{4} (2x)^{6-4} \cdot 3^4 \quad \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

$$T_5 = 15 \cdot 4x^2 \cdot 81$$

$$T_5 = 4860x^2$$

Resposta: $4860x^2$

Resolução do Exercício 4: [B]

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a = \frac{x}{3} \\ b = y \\ n = 10 \\ p + 1 = 6 \rightarrow p = 5 \end{cases}$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

$$T_6 = \binom{10}{5} \left(\frac{x}{3}\right)^{10-5} \cdot y^5 \quad \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$$

$$T_5 = 252 \cdot \frac{x^5}{243} \cdot y^5$$

$$T_5 = \frac{28}{27} \cdot x^5 \cdot y^5$$

Resolução do Exercício 5: [E]

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a = 2x \\ b = \frac{2}{x} \\ n = 6 \\ p + 1 = 4 \rightarrow p = 3 \end{cases}$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

$$T_3 = \binom{6}{3} (2x)^{6-3} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^3 \quad \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

$$T_3 = 20 \cdot 8x^3 \cdot \frac{8}{x^3}$$

$$T_3 = 1280$$

Resolução do Exercício 6: [80]

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a = 2x \\ b = \frac{1}{x} \\ n = 5 \\ p + 1 = 3 \rightarrow p = 2 \end{cases}$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

$$T_3 = \binom{5}{2} (2x)^{5-2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

$$T_5 = 10 \cdot 4x^3 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$T_5 = 80x$$

Portanto, o coeficiente numérico do 3º termo é 80.

Resolução do Exercício 7: [28]

Cálculos auxiliares

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 32 \Rightarrow (a + b)^5 = 32 \Rightarrow a + b = 2.$$

Portanto:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Item (01) – Falso

$$a = \frac{1}{2} < 1$$

Item (02) – Falso

$$b = \frac{3}{2} > 0$$

Item (04) – Verdadeiro

$$\frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 3 \in \mathbb{N}$$

Item (08) – Verdadeiro

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

Item (16) – Verdadeiro

$$\frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Resolução do Exercício 8: [10]

Os dois casais podem escolher o par de cadeiras no qual se sentará de 2 maneiras. Definidos os pares de cadeiras, cada casal pode se sentar de 2 modos. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

[01] Falsa. Tem-se que o coeficiente do termo central é $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 < 80$.

[02] Verdadeira. De fato, pois sendo $T_{p+1} = \binom{8}{p} \cdot x^{8-p} \cdot (-2)^p$ o termo geral do binômio $(x-2)^8$, sendo que $p=2$ e, portanto, $T_3 = \binom{8}{2} \cdot x^6 \cdot (-2)^2 = 112x^6$.

[04] Falsa. Cada uma das $n=8$ lâmpadas pode estar acesa ou apagada. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ possibilidades. Para que a sala esteja iluminada, deve haver pelo menos uma lâmpada acesa. Em consequência, devemos descontar o caso em que todas as lâmpadas estão apagadas. A resposta é $256 - 1 = 255$.

[08] Verdadeira. Com efeito, pois $\binom{8}{5}$ e $\binom{8}{3}$ são números binomiais complementares.

[16] Falsa. Dispondo de $n=8$ meninos, existem $A_{8,2} = \frac{8!}{6!} = 56$ maneiras distintas de ocupar um banco de dois lugares com dois meninos.

Resolução do Exercício 9: [15]

Desde que $n \geq 4$ e $m \geq 5$, temos

$$\begin{aligned} A_{n,4} &= 12A_{n,2} \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 12 \frac{n!}{(n-2)!} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(n-4)!} = 12 \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)!} \\ &\Rightarrow n^2 - 5n - 6 = 0 \\ &\Rightarrow n = 6 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_{m,5} &= 180C_{m,3} \Rightarrow \frac{m!}{(m-5)!} = 180 \frac{m!}{3!(m-3)!} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(m-5)!} = 30 \frac{1}{(m-3)(m-4)(m-5)!} \\ &\Rightarrow m^2 - 7m - 18 = 0 \\ &\Rightarrow m = 9. \end{aligned}$$

[01] Verdadeira. De fato, a soma dos coeficientes do binômio $(3x+1)^3$ é $(3 \cdot 1 + 1)^3 = 4^3 = 64$.

[02] Verdadeira. Com efeito, pois

$$\begin{aligned} \binom{14}{9p-6p} &= \binom{14}{p+6} \Leftrightarrow \binom{14}{3p} = \binom{14}{p+6} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3p = p+6 \\ \text{ou} \\ 3p + p+6 = 14 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow p = 3 \text{ ou } p = 2. \end{aligned}$$

[04] Verdadeira. De fato, pois o quarto termo do binômio $(x+9)^6$, segundo as potências decrescentes de x , é

$$\begin{aligned} \binom{6}{3} \cdot x^{6-3} \cdot 9^3 &= \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 729 \cdot x^3 \\ &= 14580x^3. \end{aligned}$$

[08] Verdadeira. Com efeito, pois $64 = 2^6$ e, assim, pelo Teorema das Linhas, vem $n = 6$.

Resolução do Exercício 10: [10]

Calculando a razão entre equações do sistema, obtemos:

$$\frac{A_{m,n}}{C_{m,n}} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{\frac{m!}{n!(m-n)!}} = n! \Rightarrow \frac{336}{566} = n! \Rightarrow n = 6 \text{ e } m = 8.$$

[01] Falsa. $(x+3)^{8-3} = (x+3)^5$ possui 6 elementos.

[02] Verdadeira.

$$T_3 = \binom{4}{2} x^{4-2} \cdot 3^2 = 6 \cdot x^2 \cdot 9 = 54x^2$$

[04] Falsa.

$$\binom{15}{3p} = \binom{15}{p+8} \Rightarrow 3p = p+8 \quad \text{ou}$$

$$3p + p + 8 = 15 \Rightarrow p = 4 \quad \text{ou} \quad p = \frac{7}{4} \quad (\text{n\~ao conv\~em})$$

[08] Verdadeira.

A soma dos coeficientes de $(x+1)^8$ \u00e9 $(1+1)^8 = 2^8 = 256$.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} \begin{matrix} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & \dots & & & & & & & \end{matrix}$$



▶ ASSISTA À AULA

Vimos que ao desenvolver um binômio da forma $(a + b)^n$ segundo as potências decrescentes de a , obtemos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

e percebemos que um termo qualquer desse desenvolvimento pode ser calculado pela expressão:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

Nessa aula veremos como calcular o termo independente de uma variável em questão no desenvolvimento de um binômio.

EXEMPLO

Determinar o termo independente no desenvolvimento de $(2x + 3)^4$.

Resolução: $n = 4$ $a = 2x$ $b = 3$

$$T_{p+1} = \binom{4}{p} \cdot (2x)^{4-p} \cdot 3^p$$

$$T_{p+1} = \binom{4}{p} \cdot 2^{4-p} \cdot x^{4-p} \cdot 3^p$$

O termo independente de x é o que contém x^0 , logo:

$$4 - p = 0 \Rightarrow p = 4.$$

Portanto, temos:

$$T_5 = \binom{4}{4} \cdot 2^{4-4} \cdot x^{4-4} \cdot 3^4$$

$$T_5 = 81$$

Portanto, o termo independente é 81.

EXEMPLO

Calcular o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^{10}$

$$\text{Solução: } a = x^4 \quad b = -\frac{1}{x} \quad n = 10$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} \cdot (x^4)^{10-p} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} \cdot x^{40-4p} \cdot (-1)^p \cdot (x^{-1})^p$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} \cdot x^{40-4p} \cdot (-1)^p \cdot x^{-p}$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p} \cdot x^{40-5p} \cdot (-1)^p$$

O termo independente de x é o que contém x^0 , logo: $40 - 5p = 0 \rightarrow p = 8$

$$T_9 = \binom{10}{8} \cdot x^0 \cdot (-1)^8 \quad \binom{10}{8} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

$$T_9 = 45 \rightarrow \text{termo independente}$$



EXERCÍCIOS NÍVEL 1



1. (UFSC – SC) Desenvolvendo o binômio $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$, o valor do termo independente de x , é:

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

2. (EFOMM) Assinale a alternativa que apresenta o termo independente de x na expansão binomial

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8.$$

a) 1

b) 8

c) 28

d) 56

e) 70

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

3. (ESPM) O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9$ é:

- a) 5.376 b) 876 c) 4.832 d) 1.278 e) 654

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

4. Desenvolvendo o binômio $\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^4$, encontramos um termo em x^2 . O coeficiente desse termo é:

- a) 24 b) 26 c) 36 d) 48 e) 56

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

5. O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^7$ é

- a) 30 b) 90 c) 120 d) 270 e) 560

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 2



6. (UECE – CE) No desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{16}$, a soma do coeficiente de x^4 com o termo independente de x é

a) 1836.

b) 1823.

c) 1830.

d) 1828.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

7. (UFSC – SC) O coeficiente numérico do termo em x^2 , no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{10}$ é:

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

8. (UEPG – PR) Considerando o binômio de Newton $\left(mx + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, em que “m” é a solução par da equação $\binom{9}{m} = \binom{10}{7} - \binom{9}{6}$ e “n” é a solução da equação $12n = C_{10,3} - \frac{A_{8,3}}{7}$, assinale o que for correto.

- 01. O termo médio no desenvolvimento do binômio tem coeficiente 160.
- 02. O quinto termo do binômio é independente de x.
- 04. A soma dos coeficientes do binômio é 64.
- 08. O último termo do binômio é independente de x.
- 16. O desenvolvimento do binômio tem seis termos.

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO



EXERCÍCIOS NÍVEL 3



9. (UECE – CE) O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$ é

a) 18

b) 24

c) 34

d) 30

ESPAÇO PARA RESOLUÇÃO

10. (ITA – SP) Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então $a + b$ é

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

GABARITO – AULA 03

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		20	C	A	A	E	A	45	03	B
1	B									

Resolução do Exercício 1: [20]

$$\text{Resolução: } \begin{cases} a = x \\ b = \frac{1}{x} \\ n = 6 \\ p = ? \end{cases}$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} (x)^{6-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} x^{6-p} \cdot \frac{1}{x^p}$$

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot x^{6-2p}$$

O termo independente de x é o termo em x^0 . Então para que o expoente de x seja 0, devemos ter:

$$6 - 2p = 0 \rightarrow p = 3$$

Assim, nesse caso, para obter o termo independente basta fazer $p = 3$.

$$T_{3+1} = \binom{6}{3} x^{6-2 \cdot 3}$$

$$T_4 = 20 \rightarrow T_4 = 20$$

Resposta: 20

Resolução do Exercício 2: [C]

O termo geral de $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$ é dado por:

$$\binom{8}{p} \cdot (x^2)^p \cdot (x^{-6})^{8-p}$$

$$\binom{8}{p} \cdot x^{2p} \cdot x^{-48+6p}$$

$$\binom{8}{p} \cdot x^{8p-48}$$

$$\text{Fazendo } 8p - 48 = 0, \\ p = 6$$

Daí, o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$ é:

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8!}{8! \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{8}{6} = 28$$

Resolução do Exercício 3: [A]

Termo geral do binômio:

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} (x^2)^{9-p} \left(\frac{2}{x}\right)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} x^{18-2p} \cdot \frac{2^p}{x^p}$$

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} x^{18-3p} \cdot 2^p$$

O termo que independe de x é tal que:
 $18 - 3p = 0$

$$p = 6$$

Logo:

$$T_{6+1} = \binom{9}{6} x^0 \cdot 2^6$$

$$T_7 = \frac{9!}{6!3!} \cdot 64$$

$$T_7 = 84 \cdot 64$$

$$\therefore T_7 = 5376$$

Resolução do Exercício 4: [A]

$$\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^4 = \binom{4}{p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{4-p} \cdot (x^2)^p$$

$$\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^4 = \binom{4}{p} \cdot 2^{4-p} \cdot x^{3p-4}$$

Devemos ter:

$$3p - 4 = 2 \Rightarrow p = 2$$

Logo:

$$\binom{4}{2} \cdot 2^{4-2} \cdot x^{3 \cdot 2 - 4} =$$

$$24x^2$$

O coeficiente do termo em x^2 é 24.

Resolução do Exercício 5: [E]

$$\binom{7}{p} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{7-p} \cdot (x^3)^p = \binom{7}{p} \cdot 2^{7-p} \cdot x^{4p-7}$$

Como o expoente de x é 5, temos $4p - 7 = 5$, isto é $p = 3$. Fazendo, agora, $p = 3$, temos:

$$\binom{7}{3} \cdot 2^{7-3} \cdot x^{4 \cdot 3 - 7} = 35 \cdot 16 \cdot x^5 = 560x^5.$$

Portanto, o coeficiente pedido é 560.

Resolução do Exercício 6: [A]

Do termo geral do binômio de Newton, obtemos:

$$T_{p+1} = \binom{16}{p} \left(\frac{1}{x}\right)^{16-p} \left(\sqrt[3]{x}\right)^p = \binom{16}{p} \frac{x^{\frac{p}{3}}}{x^{16-p}} = \binom{16}{p} x^{\frac{4p}{3}-16}$$

Coeficiente de x^4 :

$$\frac{4p}{3} - 16 = 4 \Rightarrow p = 15$$

$$\binom{16}{15} = \frac{16!}{15!} = 16$$

Termo independente de x :

$$\frac{4p}{3} - 16 = 0 \Rightarrow p = 12$$

$$\binom{16}{12} = \frac{16!}{12!4!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1820$$

Portanto, a soma pedida vale:

$$16 + 1820 = 1836$$

Resolução do Exercício 7: [45]

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{10} = \binom{10}{p} \cdot (\sqrt{x})^{10-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{10} = \binom{10}{p} \cdot x^{\frac{10-p}{2}} \cdot x^{-p}$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{10} = \binom{10}{p} \cdot x^{\frac{10-3p}{2}}$$

$$\text{Devemos ter } \frac{10-3p}{2} = 2 \Rightarrow p = 2$$

Logo:

$$\binom{10}{2} \cdot x^{\frac{10-3 \cdot 2}{2}} = 45x^2$$

Resolução do Exercício 8: [03]

Tem-se que

$$\binom{9}{m} = \binom{10}{7} - \binom{9}{6} \Rightarrow \binom{9}{m} = \binom{9}{6} + \binom{9}{7} - \binom{9}{6}$$

$$\Rightarrow \binom{9}{m} = \binom{9}{7}$$

$$\Rightarrow m = 7 \text{ ou } m = 2.$$

Logo, vem $m = 2$.

Ademais, segue que

$$12n = C_{10,3} - \frac{A_{8,3}}{7} \Leftrightarrow 12n = \frac{10!}{3! \cdot 7!} - \frac{1}{7} \cdot \frac{8!}{5!}$$

$$\Leftrightarrow 12n = 120 - 48$$

$$\Leftrightarrow n = 6.$$

Em consequência, temos

$$\left(mx + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n = \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6,$$

cujo termo geral é

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot (2x)^{6-p} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p$$

$$= \binom{6}{p} \cdot 2^{6-p} \cdot x^{6-p} \cdot x^{-\frac{p}{2}}$$

$$= \binom{6}{p} \cdot 2^{6-p} \cdot x^{6-\frac{3p}{2}}.$$

[01] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} T_4 &= \binom{6}{3} \cdot (2x)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \\ &= \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 8x^3 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \\ &= 160x\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Logo, o coeficiente do termo médio é 160.

[02] Verdadeira. Com efeito, pondo $6 - \frac{3p}{2} = 0$, encontramos $p = 4$. Desse modo, o quinto termo do binômio é independente de x .

[04] Falsa. Pondo $x = 1$, vem

$$\left(2 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right)^6 = 3^6 = 729 \neq 64.$$

[08] Falsa. Conforme [02], há somente um termo independente de x .

[16] Falsa. O desenvolvimento do binômio possui $n+1=7$ termos.

Resolução do Exercício 9: [B]

Sendo

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p},$$

o termo geral de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3$, e

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot (x^2)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^q = \binom{3}{q} \cdot 2^{-q} \cdot x^{6-3q},$$

o termo geral de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$, e

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{p} \cdot \binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}.$$

Logo, deve-se ter $p+q=1$, o que implica em $(p, q) = (0, 1)$ ou $(p, q) = (1, 0)$. Em consequência, a resposta é

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2^2 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot 2^2 = 24.$$

Resolução do Exercício 10: [B]

Do enunciado,
 $a = 2b$

O termo geral de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é:

$$\binom{12}{p} \cdot (ax)^{12-p} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^p$$

$$\binom{12}{p} \cdot a^{12-p} \cdot x^{12-p} \cdot \frac{(-b)^p}{x^{\frac{p}{2}}}$$

$$\binom{12}{p} \cdot a^{12-p} \cdot (-b)^p \cdot x^{\frac{24-3p}{2}}$$

O termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é obtido

tomando-se $\frac{24-3p}{2} = 0$, ou seja, $p = 8$.

Daí,

$$7920 = \binom{12}{8} \cdot a^4 \cdot (-b)^8$$

$$7920 = 495 \cdot a^4 \cdot b^8$$

Mas, $a = 2b$
logo,

$$16 = (2b)^4 \cdot b^8$$

$$16 = 2^4 \cdot b^4 \cdot b^8$$

$$b^{12} = 1$$

Como b é positivo,
 $b = 1$

De $a = 2b$ e $b = 1$,
 $a = 2$.

Assim,
 $a + b = 3$