



Produto de matrizes

ASSISTA À AULA



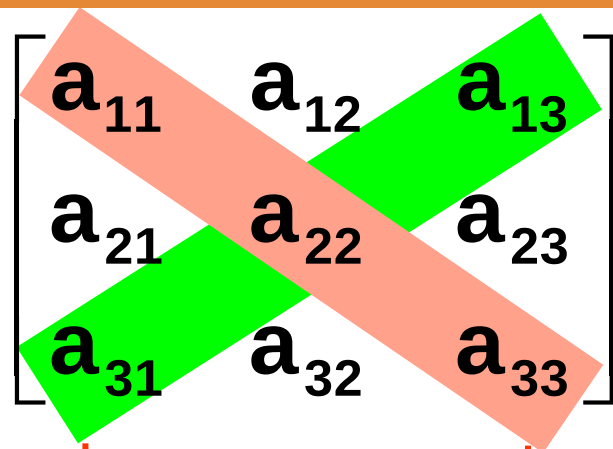
Professor Ricardinho



Matemática – Frente C

Matrizes – Tipologia

Matriz Quadrada (A_n)



DIAGONAL
SECUNDÁRIA

$$i + j = n + 1$$

DIAGONAL
PRINCIPAL

$$i = j$$

Matriz Transposta

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^t_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Simétrica

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = A^t$$

Antissimétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = -A^t$$

Matriz Identidade

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neutra na
multiplicação
 $A \cdot I = A$
 $B \cdot I = B$
 $C \cdot I = C$

Matriz Triangular

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Superior

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

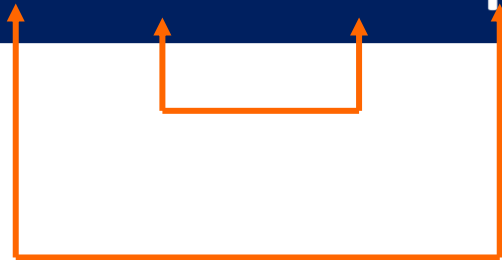
Inferior

Matriz Diagonal

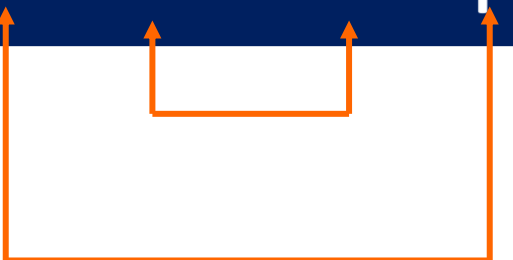
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Produto de Matrizes

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$



Produto de Matrizes

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$


$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

Produto de Matrizes

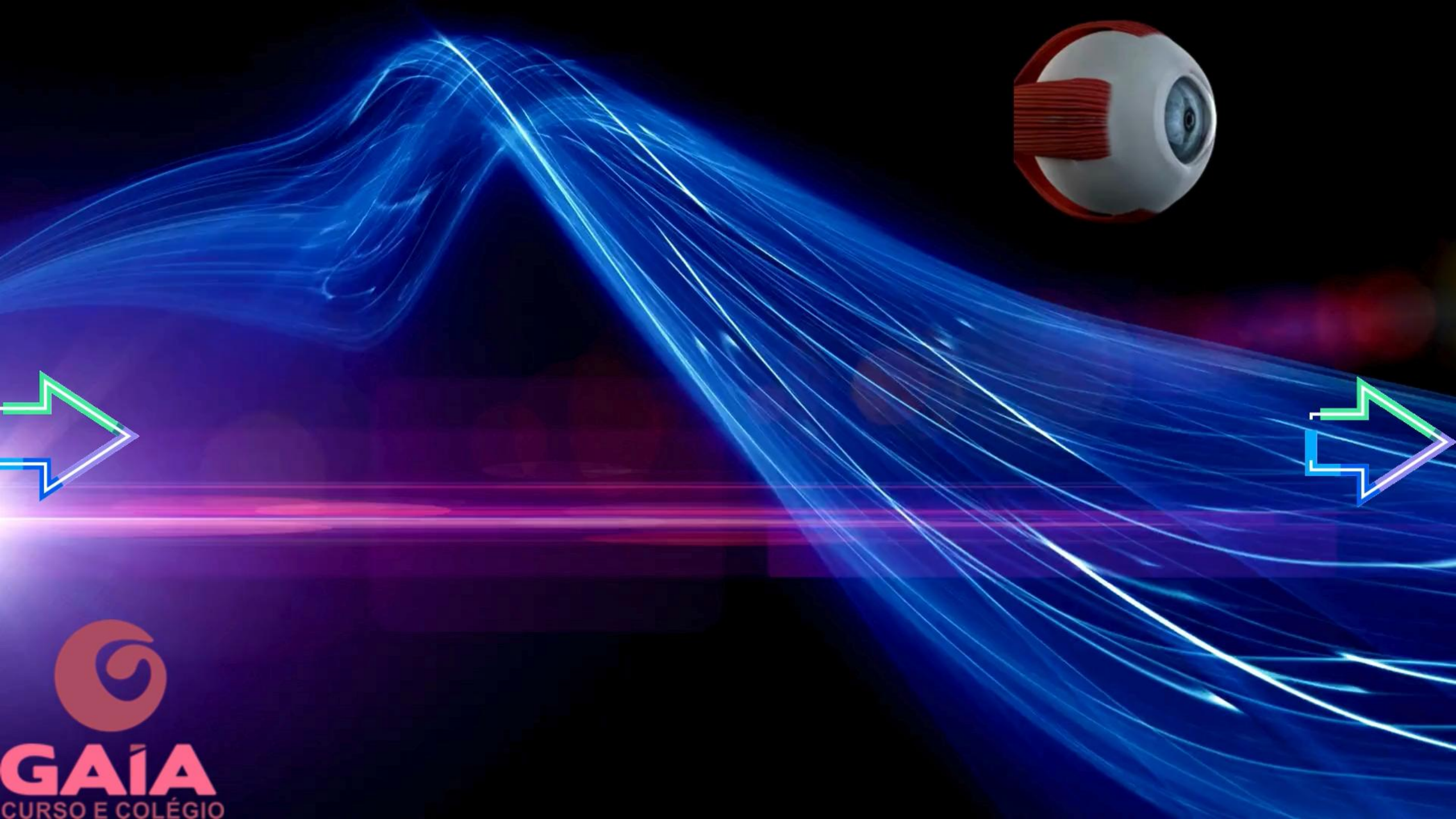
$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$$



ITENS DA UFSC

UFSC 2020

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $(A.B)^t = A^t.B^t$

UFSC 2018

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n , então $(A + B).(A - B) = A^2 - B^2$.

UFSC 2018

Sejam A , B e O matrizes quadradas de ordem n , sendo O a matriz nula. Se $A.B = O$ então $A = O$ ou $B = O$.

Produto de Matrizes

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

PROPRIEDADES

- ▶ Em geral $A.B \neq B.A$
- ▶ $(A.B)^{\dagger} = B^{\dagger}.A^{\dagger}$
- ▶ $A.I = I.A = A$
- ▶ Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento, ou seja podemos ter $A.B = 0$ mesmo com $A \neq 0$ $B \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3.(-1) + 1.3 + 0.(-2) & -3.2 + 1.5 + 0.6 \\ 2.(-1) + 4.3 + (-2).(-2) & 2.2 + 4.5 + -2.6 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$$

1; 3; 4; 5; 6; 9; 11; 14 e 16

UFSC 2020

F

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $(A.B)^t = A^t.B^t$

UFSC 2018

F

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n , então $(A + B).(A - B) = A^2 - B^2$.

UFSC 2018

F

Sejam A , B e O matrizes quadradas de ordem n , sendo O a matriz nula. Se $A.B = O$ então $A = O$ ou $B = O$.

AULA
08

Determinantes

ASSISTA À AULA



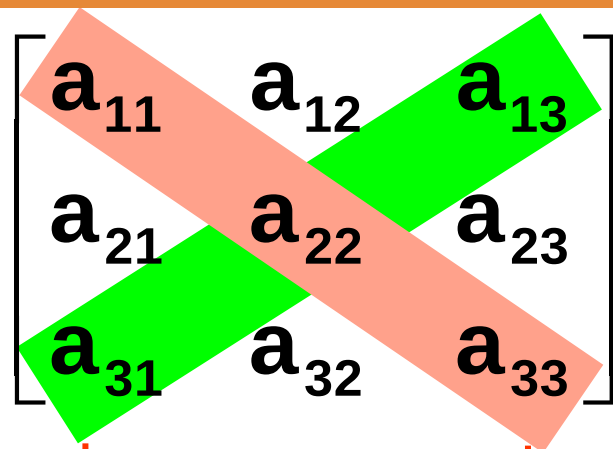
Professor Ricardinho



Matemática – Frente C

Matrizes – Tipologia

Matriz Quadrada (A_n)



DIAGONAL
SECUNDÁRIA

$$i + j = n + 1$$

DIAGONAL
PRINCIPAL

$$i = j$$

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Matriz Transposta

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^t_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Simétrica

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = A^t$$

Antissimétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = -A^t$$

Matriz Identidade

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neutra na
multiplicação
 $A \cdot I = A$
 $B \cdot I = B$
 $C \cdot I = C$

Matriz Triangular

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Superior

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Inferior

Matriz Diagonal

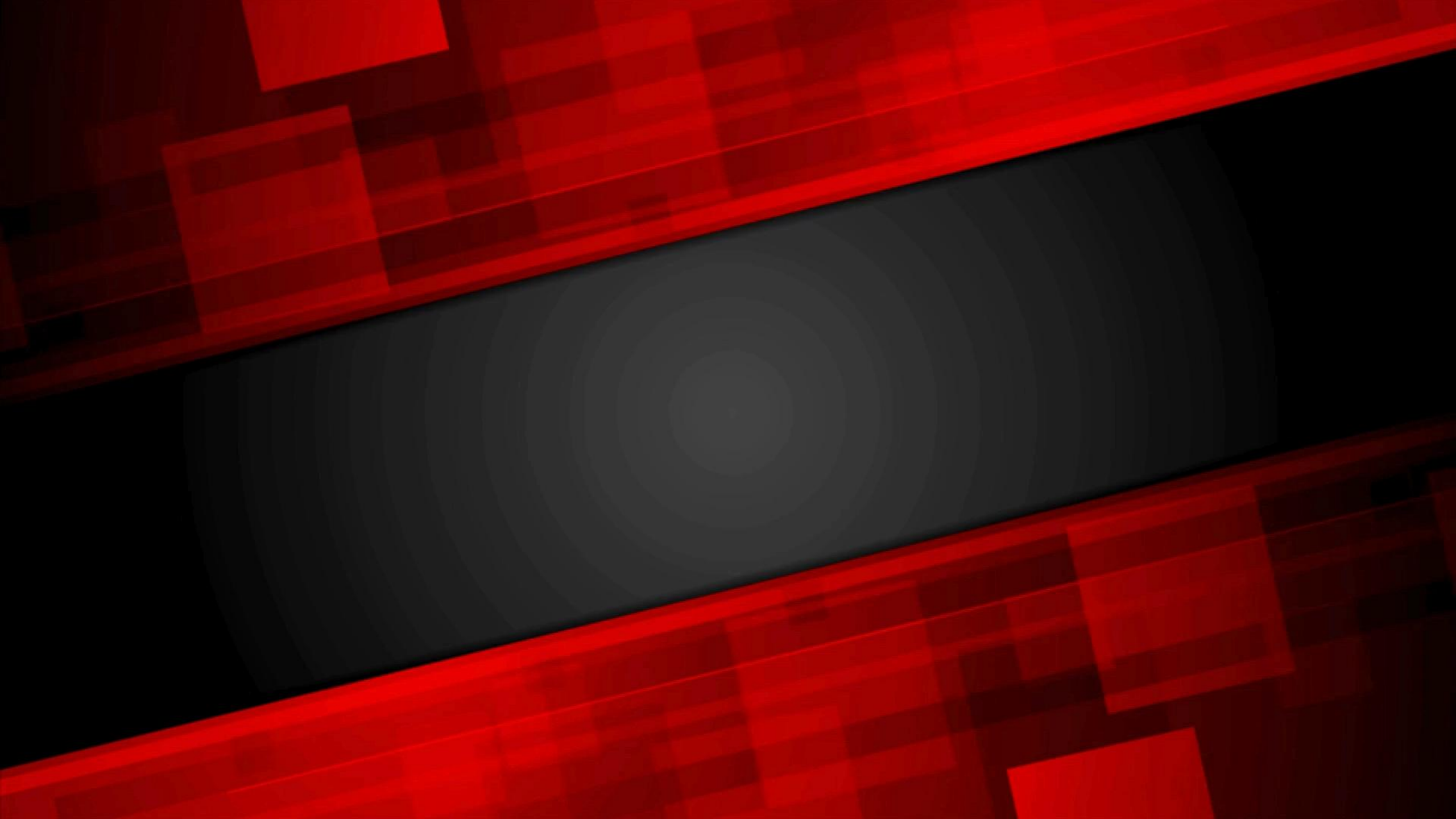
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO – 2ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$


$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$$


$$\det B = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = -18$$



CÁLCULO – 2ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$


$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$$


$$\det B = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 4 - 2 \cdot (-1) = -18$$

1

EXERCÍCIOS DE SALA

Sendo as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Determine:

- a) $\det A$
- b) $\det B$
- c) $\det (A + B)$
- d) $\det (A \cdot B)$

CÁLCULO – 3ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

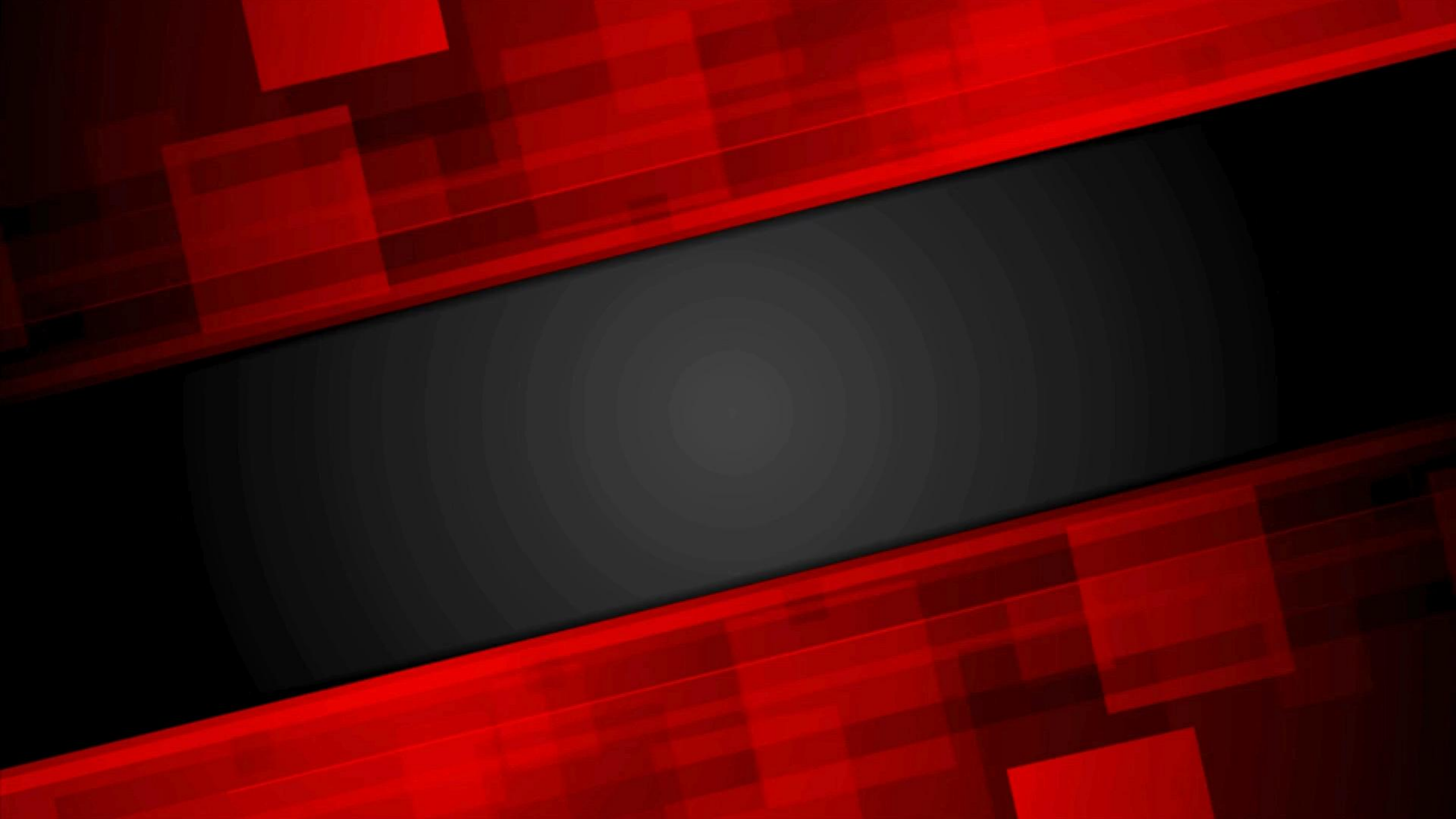


$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6 + 0 + 8 + 8 - 0 + 36$$

$$\det A = 58$$



CÁLCULO – 3ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Diagram illustrating the calculation of a 3x3 determinant using the rule of Sarrus. The first three columns are repeated to the right. Yellow arrows indicate the positive terms (downward diagonals), and red arrows indicate the negative terms (upward diagonals).

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

2

EXERCÍCIOS DE SALA

Em reais, a solução da equação:

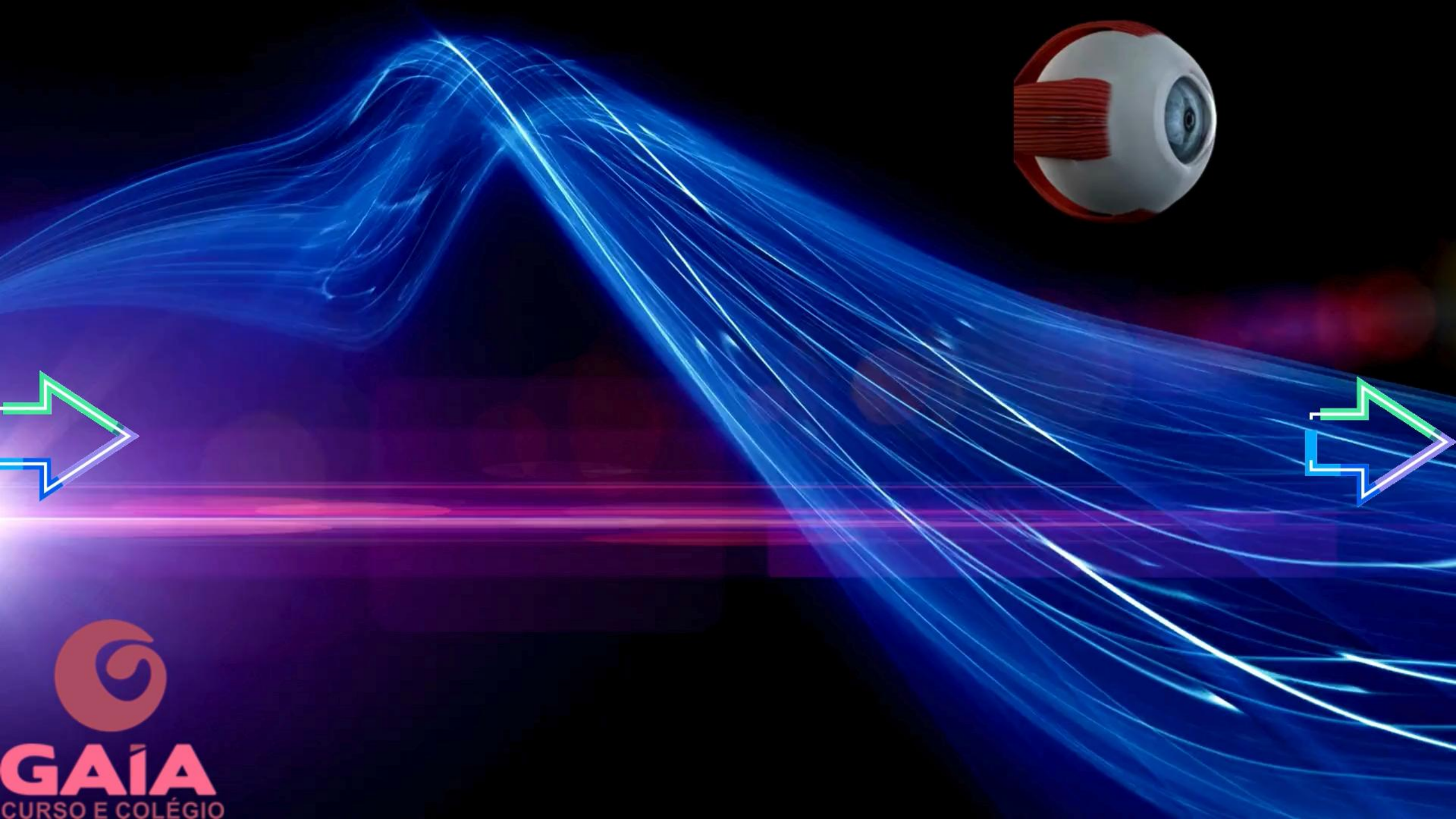
$$\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ -2 & -x & 4 \\ 1 & -3 & x \end{vmatrix} = 175 \text{ é:}$$

4

EXERCÍCIOS DE SALA

O conjunto solução da inequação:

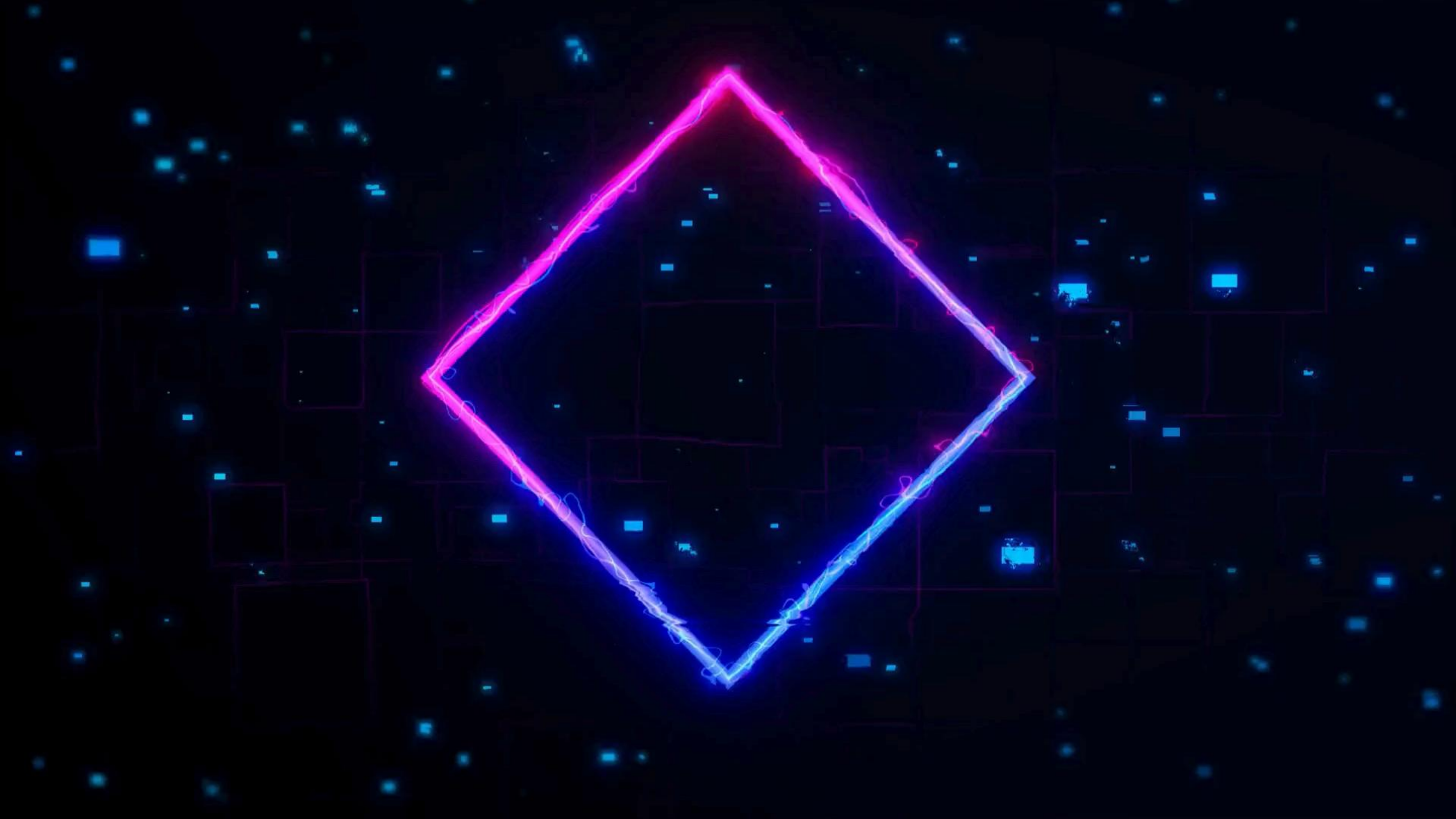
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \text{ é:}$$



DETERMINANTES



Considere o polinômio $P(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix}$. Calcule as raízes de $P(x)$.



Determinantes

TAREFA MÍNIMA

PROPRIEDADES

1; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 12;
14; 15

CÁLCULO – 2ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det (A \cdot B) = \det (A) \cdot \det (B)$$
$$\det (A + B) \neq \det (A) + \det (B)$$

CÁLCULO – 3ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$



Propriedade dos determinantes

ASSISTA À AULA



Professor Ricardinho



Matemática – Frente C

Determinantes

PROPRIEDADES

CÁLCULO – 2ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det (A \cdot B) = \det (A) \cdot \det (B)$$

$$\det (A + B) \neq \det (A) + \det (B)$$

CÁLCULO – 3ª ORDEM

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Propriedade dos determinantes

1) Casos onde o determinante é nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fila de elementos
Igual a zero

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

2 Filas paralelas
proporcionais

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

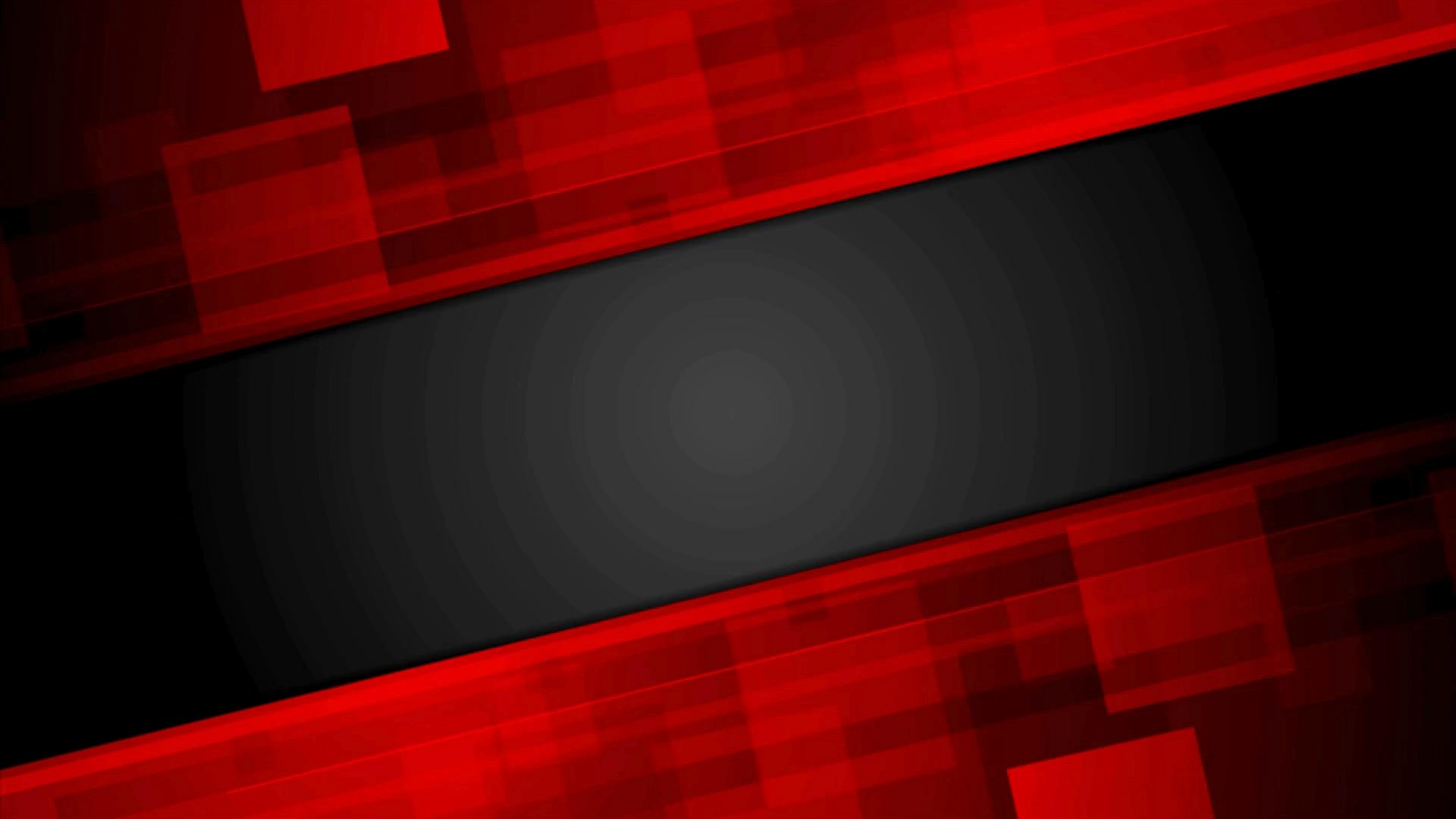
2 Filas paralelas
Iguais

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Uma das filas é a
soma de duas
outras

2) Se trocamos a posição de duas filas paralelas, o determinante trocará de sinal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$



Propriedade dos determinantes

1) Casos onde o determinante é nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fila de elementos
Igual a zero

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

2 Filas paralelas
proporcionais

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2 Filas paralelas
Iguais

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Uma das filas é a
soma de duas
outras

2) Se trocarmos a posição de duas filas paralelas, o determinante trocará de sinal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13 \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

1

EXERCÍCIOS DE SALA



PUCRS
VIVA ESSE MUNDO

Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ m & t & k \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} m & t & k \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}$

e $\det A = 4$, o determinante de B é igual a:

A

$-1/4$

B

$1/4$

C

$3/4$

D

4

E

-4



Propriedade dos determinantes

1) Casos onde o determinante é nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fila de elementos
Igual a zero

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

2 Filas paralelas
proporcionais

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2 Filas paralelas
Iguais

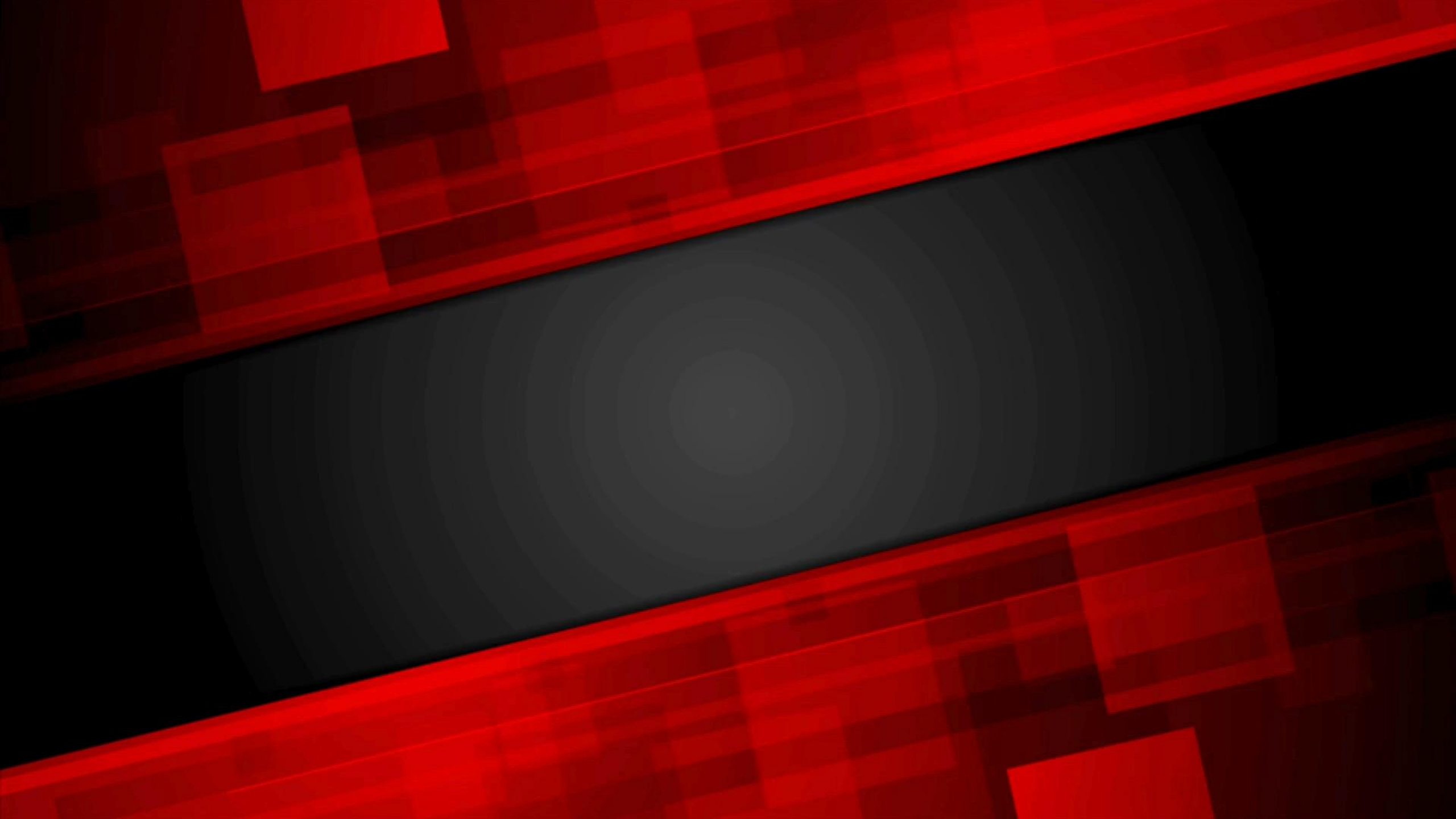
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & -8 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Uma das filas é a
soma de duas
outras

2) Se trocarmos a posição de duas filas paralelas, o determinante trocará de sinal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

3) Se multiplicarmos uma fila por um número real, o determinante será multiplicado por esse número.



3) Se multiplicarmos uma fila por um número real, o determinante será multiplicado por esse número.

2

EXERCÍCIOS DE SALA

Sabe-se que $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 2$. Determine o valor de $\begin{vmatrix} 2a & -3d & 4g \\ 2b & -3e & 4h \\ 2c & -3f & 4i \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 2$$

$\times 2 \times (-3) \times 4$

$$\begin{vmatrix} 2a & -3d & 4g \\ 2b & -3e & 4h \\ 2c & -3f & 4i \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 4 = -48$$

Propriedade dos determinantes

- 2) Se trocarmos a posição de duas filas paralelas, o determinante trocará de sinal.
- 3) Se multiplicarmos uma fila por um número real, o determinante será multiplicado por esse número.
- 4) Seja k , um número real e A uma matriz de ordem n : $\det(k.A) = k^n \cdot \det A$

3

EXERCÍCIOS DE SALA

Sabe-se que M é uma matriz quadrada de ordem 3 e que $\det(M) = 5$. Então $\det(2M)$ é igual a:

$$\det(2M) = 2^3 \cdot 5$$

$$\det(2M) = 40$$

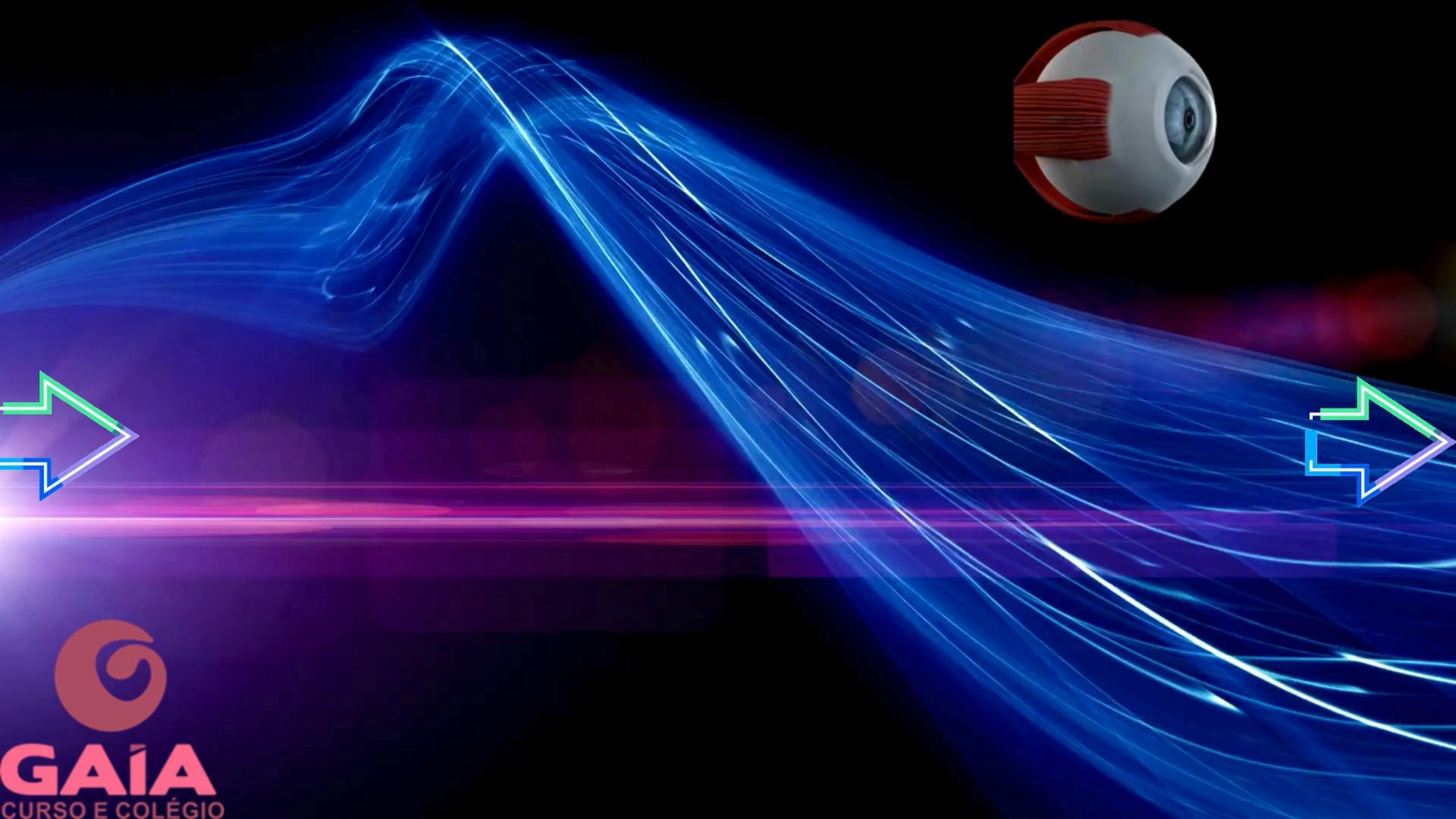
Gabarito: 40

Propriedade dos determinantes

- 2) Se trocarmos a posição de duas filas paralelas, o determinante trocará de sinal.
- 3) Se multiplicarmos uma fila por um número real, o determinante será multiplicado por esse número.
- 4) Seja k , um número real e A uma matriz de ordem n : $\det(k.A) = k^n \cdot \det A$
- 5) O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.
- 6) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \det A = 2 \cdot 1 \cdot 6 = 12$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det B = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 10$$



Propriedade dos determinantes



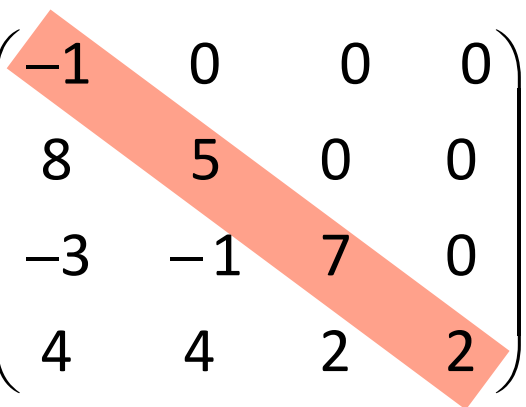
Sendo A uma matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ calcule } \det(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
A red curved arrow points from the bottom row (row 4) to the top row (row 1), indicating a row swap operation.

$$\det A = 70$$

2) Se trocarmos a posição de duas filas paralelas, o determinante trocará de sinal.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
A thick red diagonal line is drawn across the matrix A' from the top-left element (-1) to the bottom-right element (2), indicating that the matrix is not invertible (singular).

$$\det A' = -70$$

7) Se A e B são duas matrizes de ordem n o determinante do produto de A por B é o produto dos determinantes da matriz A pelo determinante da matriz B, ou seja:

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

5

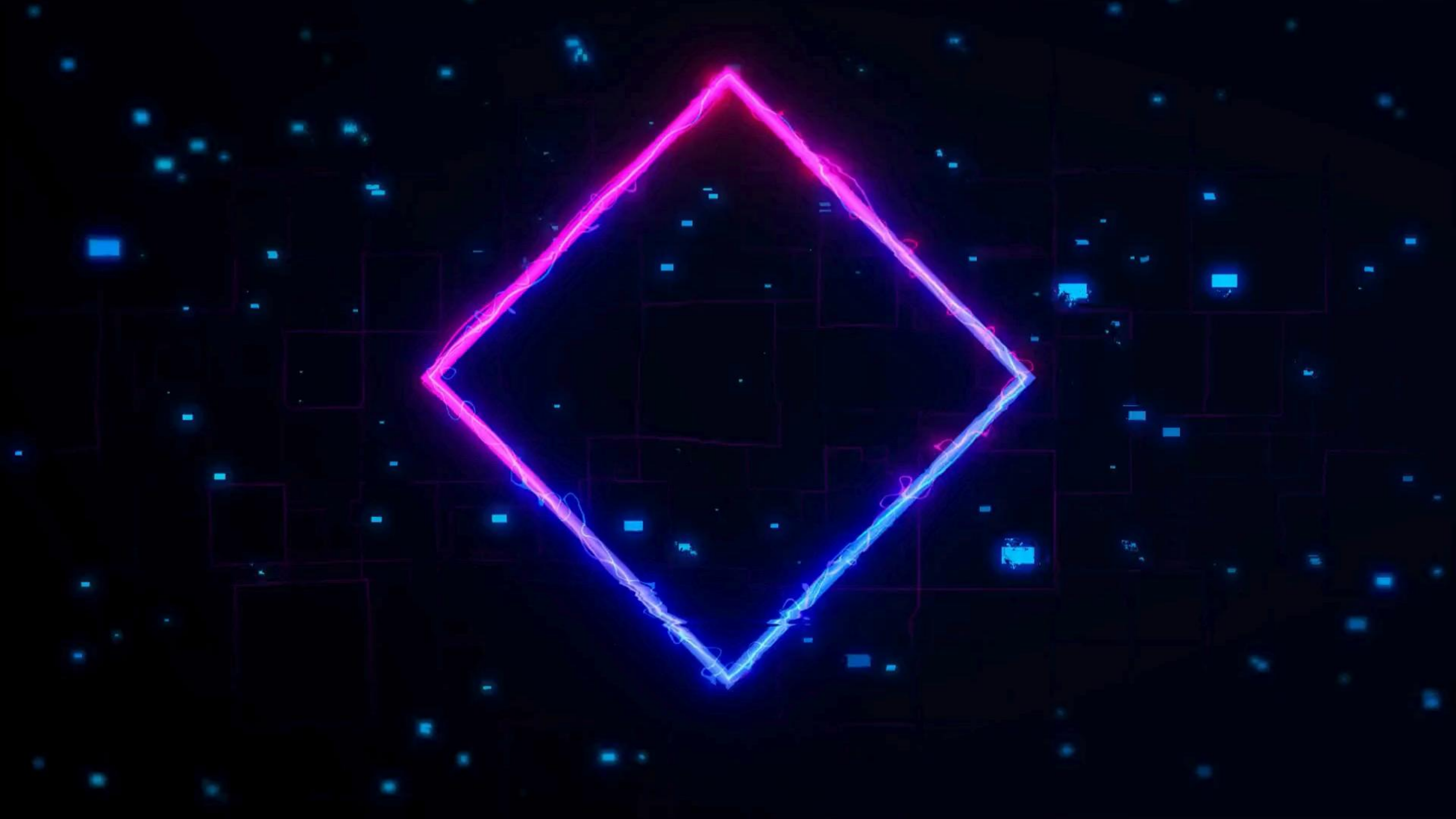
EXERCÍCIOS DE SALA

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A.B)$

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

$$\det(A.B) = 24 . 8$$

$$\det(A.B) = 192$$



Propriedade dos determinantes

Casos onde determinante é nulo

- ▶ Fila de elementos Igual a zero
- ▶ 2 Filas paralelas iguais
- ▶ 2 Filas paralelas proporcionais
- ▶ Uma das filas é a soma de duas outras

Se trocarmos a posição de duas filas paralelas, o determinante trocará de sinal.

Se multiplicarmos uma fila por um número real, o determinante será multiplicado por esse número.

Seja k , um número real e A uma matriz de ordem n :

$$\det(k.A) = k^n. \det A$$

$$\det(A) = \det(A^t)$$

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Se A e B são duas matrizes de ordem n , temos:

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

TAREFA MÍNIMA

1, 2, 4, 6, 7, 9,
12, 14 e 17