



CADERNO 05

ANÁLISE COMBINATÓRIA – PROBABILIDADE –
ESTATÍSTICA

AULA 61	ANÁLISE COMBINATÓRIA - FATORIAL
AULAS 62 e 63	P.F.C
AULAS 64 e 65	ARRANJOS E COMBINAÇÕES
AULAS 66 e 67	PERMUTAÇÕES
AULA 68	PROBABILIDADE I
AULA 69	PROBABILIDADE II
AULA 70	PROBABILIDADE III
AULA 71	PROBABILIDADE IV
AULA 72	ESTATÍSTICA

VÍDEO AULA 61

Análise Combinatória Fatorial

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA



ANÁLISE COMBINATÓRIA - FATORIAL



Em vários momentos em aulas posteriores efetuaremos multiplicações do tipo $3.2.1$, $5.4.3.2.1$, etc. Como esses produtos costumam ser, de fato, comuns na análise combinatória, foi criada uma notação, chamada de *fatorial*, capaz de resumir a escrita desses produtos.

Definição: Seja n um número natural maior do que 1. O *fatorial* de n , indicado por $n!$, é definido como o produto dos n números naturais consecutivos de 1 até n , isto é,

$$n! = n(n-1).(n-2).....3.2.1 \text{ para } n \geq 2$$

Para $n = 1$ e $n = 0$ define-se $n! = 1$

Acompanhe os exemplos:

a) $8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$

b) $4! = 4.3.2.1 = 24$

Dica: Podemos desenvolver um fatorial até um fator conveniente. Observe:

a) $7! = 7.6.5.4.\underbrace{3.2.1}_{3!} = 7.6.5.4.3!$

b) $8! = 8.7.6.5.4.\underbrace{3.2.1}_{5!} = 8.7.6.5!$

c) $10! = 10.9.8!$

d) $n! = n(n-1).(n-2)!$

Esse mecanismo de “pararmos” o desenvolvimento de um fatorial em um fator conveniente, permite o cálculo de expressões envolvendo fatorial em aulas posteriores, de forma menos trabalhosa. Acompanhe os exemplos abaixo:

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Calcular o valor da expressão $\frac{9!}{7!}$

Resolução:

$$\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$$

2) Resolver a equação $\frac{x!}{(x-2)!} = 20$

Resolução:

$$\text{Condição de existência: } \begin{cases} x \geq 0 \text{ e } x - 2 \geq 0 \\ \therefore x \geq 2; x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 20 \rightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)!} = 20 \rightarrow x \cdot (x-1) = 20$$

$$x^2 - x - 20 = 0 \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 (\text{não serve}) \end{cases}$$

Resposta: $x = 5$

3) Resolver a equação $(x-3)! = 120$

Resolução:

$$(x-3)! = 120$$

$$(x-3)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$(x-3)! = 5! \rightarrow x-3=5 \rightarrow x=8$$

Resposta: $x = 8$

Exercícios



Nível 1

- 01) (Fixando conteúdo) Simplificando a expressão

$$\frac{101! + 102!}{100!}, \text{ obtém-se:}$$

- a) 101 103
- b) 102!
- c) 100 000
- d) 101!
- e) 10 403

- 02) (Fixando conteúdo) Determine o valor da expressão

$$\frac{8! + 7!}{7!}.$$

- a) 9
- b) 8
- c) 7
- d) 6
- e) 5



Nível 2

- 03) (Fixando conteúdo) O valor de n que satisfaz a equação

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12, \text{ é:}$$

- a) 2
- b) 4
- c) 5
- d) 3
- e) 1

- 04) (Fixando conteúdo) Simplificando a expressão

$$\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)!} \text{ obtemos:}$$

- a) n + 1
- b) n + 2
- c) n + 3
- d) n + 4
- e) n + 5



Nível 3

- 05) (Modelo Enem) Os fatoriais são importantes em análise combinatória. Por exemplo, existem n! caminhos diferentes de arranjar n objetos distintos numa sequência. Esses arranjos são chamados permutações simples e número de permutações é dado pelo produto $n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$. Utilizando essa teoria, o valor de n! na expressão $(n+1)! - 2n! = 6(n-1)!$ é:

- a) 2
- b) 3
- c) 6
- d) 1
- e) 24

- 06) (Fixando conteúdo) O produto $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ é equivalente a:

- a) $\frac{20!}{2}$
- b) $2 \cdot 10!$
- c) $\frac{20!}{2^{10}}$
- d) $2^{10} \cdot 10!$
- e) $\frac{20!}{10!}$

GABARITO – AULA 61

- 1) e 2) a 3) d 4) c 5) c
6) d

AULA 62 e 63

Análise Combinatória

Princípio Fundamental da contagem

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 62



AULA 63



1. O Princípio Multiplicativo da contagem



Qual é o prefixo do seu número de telefone? 3223, 3224, 3522, 3433, 3622, 3346 ou 3326? Vamos supor que você more numa cidade em que o seu prefixo telefônico seja 3223. Você já se perguntou quantas são as linhas telefônicas que existem na sua cidade com o prefixo 3223? É fácil responder a esta pergunta usando o Princípio Multiplicativo, que enunciaremos a seguir.

Princípio Multiplicativo: "Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras diferentes e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras diferentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é dado pelo produto $x \cdot y$ "

Obs.: O Princípio Multiplicativo pode ser generalizado para mais de duas decisões.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Numa sala existem 3 garotas (Adriana, Beatriz e Cleide) e 2 rapazes (Rodrigo e Sandro). Quantos casais diferentes podemos formar com essas 5 pessoas?

Solução:

Para formarmos um casal precisamos agrupar 1 homem e 1 mulher, isto é, precisamos tomar uma decisão d_1 que consiste na escolha de um homem e tomar uma decisão d_2 , que consiste na escolha de uma mulher.

A decisão d_1 pode ser tomada de 2 maneiras diferentes (existem 2 homens);

A decisão d_2 pode ser tomada de 3 maneiras diferentes (existem 3 mulheres).

Logo, o número total de casais é $2 \cdot 3 = 6$.

Note que poderíamos chegar nesse resultado listando todos os possíveis casais:

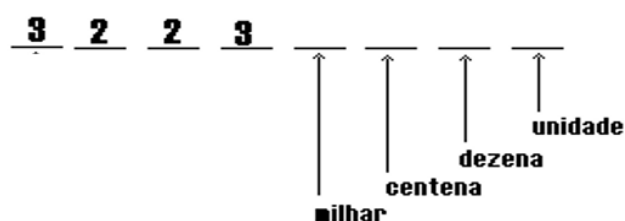
Rodrigo e Adriana	- Casal	RA
Rodrigo e Beatriz	- Casal	RB
Rodrigo e Cleide	- Casal	RC
Sandro e Adriana	- Casal	SA
Sandro e Beatriz	- Casal	SB
Sandro e Cleide	- Casal	SC

Total: 6 casais

2) Obtenha o total de linhas telefônicas que podem ser formadas com 8 algarismos sendo que o prefixo é 3223.

Solução:

Observe o esquema abaixo:



Vamos partir este problema em 4 tomadas de decisões:

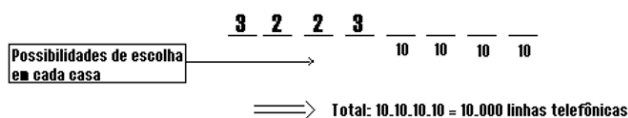
Decisão 1: escolher um número para a casa dos milhares

Decisão 2: escolher um número para a casa das centenas

Decisão 3: escolher um número para a casa das dezenas
 Decisão 4: escolher um número para a casa das unidades

Os números a serem utilizados em cada uma das casas podem ser escolhidos entre os dez dígitos do sistema decimal: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Na casa dos milhares podemos colocar qualquer um dos dez dígitos acima. Logo, a decisão 1 pode ser tomada de 10 maneiras diferentes; na casa das centenas também podemos colocar 10 dígitos diferentes, isto é, a decisão 2 pode ser tomada de 10 formas diferentes. As mesmas conclusões são obtidas para as casas das dezenas e das unidades. Portanto, o total de linhas telefônicas distintas que obtemos com o prefixo 3223 é o produto das possibilidades de cada uma das decisões, isto é, $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ linhas telefônicas.

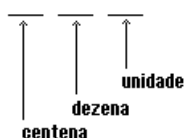


3) Quantos números ímpares de 3 algarismos distintos existem em nosso sistema de numeração?

Solução:

Dica 1: "Ao iniciar um exercício de análise combinatória, é sempre bom listar exemplos dos grupos cujo total pretendemos calcular." Neste exercício, os grupos são números ímpares de 3 algarismos distintos. Alguns deles são: 265, 379, 841, etc. Note que o número 373 não nos interessa pois os dígitos não são distintos; o número 572 também não interessa, pois não é ímpar.

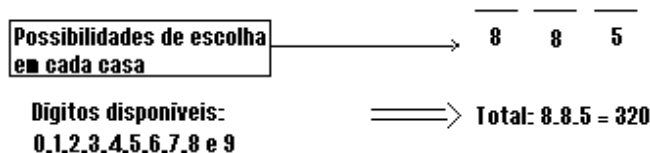
Devemos então fazer 3 decisões: escolher números para a casa das centenas, para a casa das dezenas e para a casa das unidades. Começamos por qual casa, a das centenas ou das unidades?



Dica 2: "Comece sempre pelas decisões que envolvem mais restrições."

- Neste caso a maior restrição está presente na casa das unidades; nela podemos colocar apenas os dígitos 1, 3, 5, 7 e 9 (lembre que o número tem que ser ímpar!).
 Portanto, 5 possibilidades para a casa das unidades.

- Agora, é conveniente "olhar" para a casa das centenas, pois nela não pode aparecer o dígito 0 (o número 047, por exemplo, não serve, pois não tem 3 algarismos significativos, apenas 2). Além disso, como todos os dígitos devem ser distintos, aquele escolhido inicialmente para a casa das unidades não pode ser repetido na casa das centenas, portanto, temos 8 possibilidades de escolha para a casa das centenas (os dez dígitos disponíveis menos o zero e o algarismo já escolhido na casa das unidades).
- Finalmente, na casa das dezenas temos também 8 possibilidades: os dez dígitos disponíveis menos os dois já utilizados nas casas das unidades e das centenas (note que aqui o zero pode ser usado). Portanto, temos $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$ números ímpares de 3 algarismos distintos em nosso sistema de numeração.



2. Princípio Aditivo da contagem

Se X e Y são dois conjuntos com a e b elementos respectivamente. Se para a escolha de um dos elementos do conjunto X existem a possibilidades e, para a escolha de um dos elementos do conjunto Y existem b possibilidades, então, para a escolha de um elemento do conjunto X ou de um elemento do conjunto Y existem $a + b$ possibilidades.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4) (INSPER) Alice, Bia, Cris, Dedé e Elis realizam tarefas diferentes na sequência de fabricação de um produto. Sabe-se que

- a tarefa realizada por Cris deve ser feita depois que já tenha sido concluída a tarefa realizada por Bia;
- a tarefa realizada por Elis deve ser feita antes que já tenha sido concluída a tarefa realizada por Bia;
- a tarefa realizada por Dedé deve ser feita depois que já tenha sido concluída a tarefa realizada por Alice;
- a tarefa realizada por Bia deve ser feita antes que já tenha sido concluída a tarefa realizada por Dedé.

Considerando-se apenas essas pessoas, tarefas e condições, o total de ordenações possíveis das cinco tarefas é igual a

Solução:

Suponhamos que as pessoas são colocadas em fila, de tal sorte que Elis, Bia e Cris ocupam posições fixas, nessa ordem, e Elis é a primeira da fila. Desse modo, se Dedé for a última, então haverá 4 posições possíveis para Alice. Ademais, se Dedé se posicionar entre Bia e Cris, então Alice terá 3 escolhas disponíveis.

Portanto, pelo Princípio Aditivo, segue que a resposta é $4 + 3 = 7$.

Exercícios*Nível 1*

01) (Modelo Enem) Num restaurante, são oferecidos 4 tipos de carne, 5 tipos de massa, 8 tipos de salada e 6 tipos de sobremesa. De quantas maneiras diferentes podemos escolher uma refeição composta por 1 carne, 1 massa, 1 salada e 1 sobremesa?

- a) 23.
- b) 24.
- c) 401.
- d) 572.
- e) 960.

02) (Modelo Enem) Uma melodia é uma sequência de notas musicais. Para compor um trecho de três notas musicais sem repeti-las, um músico pode utilizar as sete notas que existem na escala musical. O número de melodias diferentes possíveis de serem escritas é:

- a) 3 b) 21 c) 35 d) 210 e) 5040

03) (ENEM) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

- a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas



Nível 2

- 04) (ENEM) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

- a) $\frac{62^6}{10^6}$
 b) $\frac{62!}{10!}$
 c) $\frac{62! \cdot 4!}{10! \cdot 56!}$
 d) $62! - 10!$
 e) $62^6 - 10^6$

- 05) (ENEM) Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a

- a) $26^3 + 9^4$
 b) $26^3 \times 9^4$
 c) $26^3(10^4 - 1)$
 d) $(26^3 + 10^4) - 1$
 e) $(26^3 \times 10^4) - 1$

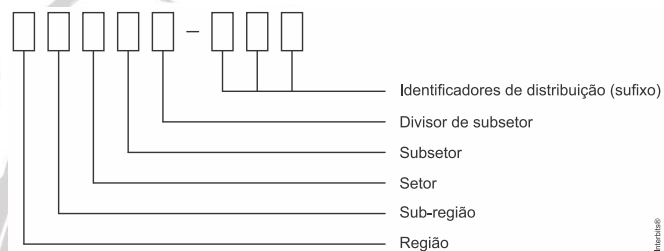


Nível 3

- 06) (Fixando conteúdo) A quantidade de números inteiros múltiplos de 5, formados por três algarismos distintos, é:

- a) 120
 b) 150
 c) 180
 d) 136
 e) 144

- 07) (ENEM) O Código de Endereçamento Postal (CEP) código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios.

A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

- a) $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$
 b) $10^5 + 9 \cdot 10^2$
 c) $2 \cdot 9 \cdot 10^7$
 d) $9 \cdot 10^2$
 e) $9 \cdot 10^7$

- 08) (ENEM) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adéqua às condições da empresa é

- I.
- II.
- III.
- IV.
- V.

GABARITO – AULAS 62 e 63

- 1) e 2) d 3) a 4) a 5) c
6) d 7) e 8) e

VÍDEO AULA 64 e 65

Análise Combinatória

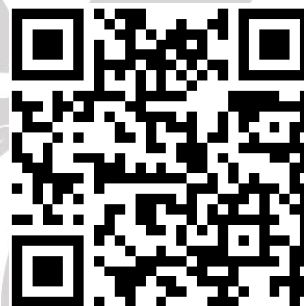
Arranjos e Combinações

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 64



AULA 65



1. Noções Iniciais

Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obter:

- a) todos os pares ordenados da forma $(x; y)$ com 2 elementos distintos a partir do conjunto A:

$(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (2, 1); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (3, 5); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 5); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4).$

- b) todos os subconjuntos de 2 elementos:

$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{1, 5\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{2, 5\}; \{3, 4\}; \{3, 5\}; \{4, 5\}$

Note que esses agrupamentos (item "a" e "b" se diferem basicamente num aspecto de fundamental importância: A ordem em que cada elemento é escrito.

Observe que no primeiro caso, a ordem em que são escritos os elementos é levado em conta, pois se trata da formação de pares ordenados.

$$(a, b) \neq (b, a)$$

Já no segundo caso, a ordem em que são escritos os elementos não é levado em conta, pois se trata agora, da formação de subconjuntos.

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

Os agrupamentos do item a, ou seja, os pares ordenados, são denominados arranjos simples. No caso acima, os pares ordenados formados são arranjos de 5 elementos tomados 2 a 2 e indicados por: A_5^2 ou $A_{5,2}$.

Os agrupamentos do item b, ou seja, os subconjuntos, são denominados combinações simples. No caso acima, os subconjuntos formados são combinações de 5 elementos tomados 2 a 2 e indicados por: C_5^2 ou $C_{5,2}$.

Observação: Quando dizemos Arranjos Simples ou Combinações Simples, significa dizer, que os agrupamentos são formados com elementos distintos do conjunto A

2. Arranjos Simples

2.1. Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Arranjos Simples de n elementos tomados p a p são seqüências formadas por p ($p \leq n$) elementos distintos de A.

Notações: A_n^p ou $A_{n,p}$

Exemplo: Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Escreva todos os arranjos de 2 elementos obtidos entre os 4 elementos de A.

Com base na definição, obter todos os arranjos de 4 elementos tomados 2 a 2 equivale a obter todas as seqüências de 2 elementos (pares ordenados) distintos de A.

Arranjos (seqüências):

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

Assim, o total de arranjos de 4 elementos tomados 2 a 2 é 12. Escrevemos $A_{4,2} = 12$ ou $A_4^2 = 12$.

De maneira geral, não nos interessaremos pela listagem dos grupos mas sim pelo total dos grupos. Isso sugere a necessidade de desenvolvermos uma fórmula para calcular o total de arranjos de n elementos tomados p a p .

2.2. Cálculo do número de arranjos simples

Pelo exemplo anterior podemos notar que A_n^p ou $A_{n,p}$ é o produto de p fatores naturais consecutivos e decrescentes, a partir de n . Acompanhe os exemplos abaixo:

$$a) A_4^2 = A_{4,2} = \underbrace{4 \cdot 3}_{2 \text{ fatores}} = 12$$

$$b) A_6^4 = A_{6,4} = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}_{4 \text{ fatores}} = 360$$

$$c) A_{10}^3 = A_{10,3} = \underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{3 \text{ fatores}} = 720$$

De um modo geral, temos:

$$A_n^p = A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots [n-(p-1)] \quad \text{ou}$$

$$A_n^p = A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots (n-p+1)$$

Multiplicando numerador e denominador por $(n-p)!$, vem:

$$A_n^p = A_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

Logo: $A_n^p = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Resultados Imediatos:

$$A_n^0 = 1 \quad A_n^1 = n \quad A_n^n = n!$$

3. Combinações Simples

3.1. Definição

Considere um conjunto com n elementos distintos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Combinações Simples de n elementos tomados p a p são subconjuntos formados por p ($p \leq n$) elementos distintos de A.

Notações: C_n^p ou $C_{n,p}$

Exemplo: Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Escreva todos as combinações de 2 elementos obtidos entre os 4 elementos de A.

Pela definição, as combinações de 4 elementos tomados 2 a 2 são todos os subconjuntos de A com 2 elementos (para simplificar, não vamos escrever os elementos dos subconjuntos entre chaves). Assim:

Combinações (subconjuntos):

ab ac ad bc bd cd

Assim, o total de combinações de 4 elementos tomados 2 a 2 é 6. Escrevemos $C_{4,2} = 6$ ou $C_4^2 = 6$.

Como já foi dito, o que nos interessa nos exercícios de análise combinatória é, essencialmente, calcular a totalidade dos agrupamentos e não apresentar a listagem dos mesmos. Isto quer dizer que precisamos “desenvolver” (ou melhor, apresentar) uma fórmula para o cálculo das combinações de n elementos tomados p a p .

3.2. Cálculo do número de combinações simples

Considere, inicialmente, o conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ com exatamente n elementos distintos. Cada subconjunto formado por p elementos de A resulta em $p!$ sequências ordenadas (arranjos) desses mesmos elementos. Deste modo, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{ou} \quad C_n^p = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Resultados Imediatos:

$$C_n^0 = 1 \quad C_n^1 = n \quad C_n^n = 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 1) As 5 finalistas do concurso para Miss Universo são: Miss Brasil, Miss EUA, Miss Austrália, Miss Filipinas e Miss Venezuela. De quantas formas os juízes poderão escolher os três primeiros lugares neste concurso?

**Solução:**

Podemos dizer que cada resultado é uma sequência da forma (1º lugar, 2º lugar, 3º lugar). Por exemplo, (Brasil, EUA, Austrália), (EUA, Filipinas, Venezuela), (Austrália, Brasil, Japão), etc. Então o total de sequências procurado é:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60.$$

Ratificando que usamos arranjo visto que a ordem que escolhemos os elementos é relevante.

- 2) Quantas vitaminas, contendo exatamente 3 frutas, podemos formar se dispomos de 8 frutas diferentes?

**Solução**

Vamos supor que as nossas 8 frutas sejam A,B,C,D,E,F,G e H. Uma possível vitamina é dada pelo grupo ABC; uma outra pelo grupo ABD. Veja ainda que a vitamina ACB é a mesma que a vitamina ABC, pois é irrelevante a ordem em que as frutas são colocadas no liquidificador. Isto significa que cada vitamina pode ser considerada como um subconjunto de 3 elementos, isto é, uma combinação de 3 elementos. O total então

$$\text{é dado por } C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

Abaixo segue um resumo do que foi estudado.

Arranjos simples

Agrupamentos que diferem:

- Pela natureza dos elementos componentes:
- Pela ordem dos elementos:

$$A_n^p = A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinações

Esses agrupamentos diferem apenas pela natureza dos elementos componentes, mas não diferem pela ordem

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{ou} \quad C_n^p = C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Exercícios



Nível 1

- 01) (Modelo Enem) Em uma festa havia 21 pessoas presentes. Ao chegarem, cumprimentaram com um aperto de mão uma única vez cada uma das outras pessoas. Quantos apertos de mão ocorreram ao todo?
- a) 42
 - b) 84
 - c) 105
 - d) 210
 - e) 420
- 02) (Modelo Enem) Para concorrer à eleição a diretor e a vice-diretor de uma escola, há 8 candidatos. O mais votado assumirá o cargo de diretor e o segundo mais votado, o de vice-diretor. Quantas são as possibilidades de ocupação dos cargos de diretor e vice-diretor dessa escola?
- a) 15
 - b) 27
 - c) 34
 - d) 56
 - e) 65
- 03) (Modelo Enem) Admita que certa cidade brasileira tenha 8 *canais* de TV aberta, todos com transmissões diárias. Se uma pessoa pretende assistir três dos oito canais em um mesmo dia, ela pode fazer isso de x maneiras diferentes sem levar em consideração a ordem em que assiste os canais, e pode fazer de y maneiras diferentes levando em consideração a ordem em que assiste os canais. Sendo assim, $y - x$ é igual a
- a) 112.
 - b) 280.
 - c) 224.
 - d) 56.
 - e) 140.



Nível 2

- 04) (ENEM) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

- a) 64
b) 56
c) 49
d) 36
e) 28
- 05) (ENEM) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.
- A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

- a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.



Nível 3

- 06) (ENEM) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

- a) $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$
b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$
c) $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$
d) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$
e) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

- 07) (Modelo Enem) Um tanque de um pesque-pague contém apenas 15 peixes, sendo 40% destes carpas. Um usuário do pesque-pague lança uma rede no tanque e pesca 10 peixes. O número de formas distintas possíveis para que o usuário pesque exatamente 4 carpas é:

- a) 151200
b) 720
c) 210
d) 185
e) 1260

- 08) (ENEM) Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R\$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R\$500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

- Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;
- Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;
- Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;
- Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;
- Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

- Caio e Eduardo.
- Arthur e Eduardo.
- Bruno e Caio.
- Arthur e Bruno.
- Douglas e Eduardo.

GABARITO – AULAS 64 e 65

- 1) d 2) d 3) b 4) e 5) a
6) a 7) e 8) a

VÍDEO AULA 66 e 67

Análise Combinatória

Permutações

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 66



AULA 67



Permutação é um caso particular de arranjo. Além disso o termo *permutação* é bastante sugestivo e neste sentido o que iremos fazer nesta seção é, essencialmente, permutar (trocar) as posições de elementos de um conjunto dado.

Definição: “Seja E um conjunto com n elementos, isto é, $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Chamamos de **Permutação Simples** dos n elementos de E a qualquer sequência formada pelos n elementos distintos de E .”

Permutações Simples de n elementos são arranjos simples de n elementos tomados n a n .

Notação: P_n

Cálculo do número de permutações simples

Sabendo que as permutações simples de n elementos são arranjos simples de n elementos tomados n a n , vem que:

$$P_n = A_n^n = n(n-1).(n-2).(n-3)....2.1$$

ou

$$P_n = n!$$

O que são Anagramas?

Anagrama é uma espécie de jogo de palavras, resultando do rearranjo das letras de uma palavra ou expressão para produzir outras palavras ou expressões, utilizando todas as letras originais exatamente uma vez.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Com relação à palavra LIVRO, calcule:

- O total de anagramas;
- O total de anagramas que começam com a letra R;
- O total de anagramas que começam por vogal;
- O total de anagramas que apresenta as vogais juntas.

Resolução

- Um anagrama da palavra LIVRO é qualquer sequência, com ou significado, das 5 letras dessa palavra. Podemos listar alguns desses anagramas: LOVRI, OILVR, LIVRO, ROLIV, etc.

Fica claro então que cada anagrama é uma permutação das 5 letras. O total é dado por $P_5 = 5! = 120$.

- Como os anagramas devem começar pela letra R, vamos fixá-la na primeira casa. Fazendo isso, é fácil ver que as 4 letras restantes podem ocupar as 4 últimas casas. Temos assim a permutação de 4 letras, cujo total é $P_4 = 4! = 24$.

$$\begin{array}{c} \text{R} \quad \text{LIVRO} \\ \hline P_4 = 4! = 24 \end{array}$$

- Esta é uma situação semelhante à do item b. Porém, aqui temos que separar em dois casos, fixando inicialmente a vogal I e depois a vogal O. Em seguida, somamos essas quantidades para obter o resultado desejado.

1º caso: começando com a vogal I

$$\begin{array}{c} \text{I} \quad \text{LIVRO} \\ \hline P_4 = 4! = 24 \end{array}$$

2º caso: começando com a vogal O

$$\begin{array}{c} \text{O} \quad \text{LIVRO} \\ \hline P_4 = 4! = 24 \end{array}$$

Logo, o total de anagramas que começam por vogal é $24 + 24 = 48$.

- Vamos listar alguns dos anagramas que nos interessam:

LI OVR
I O RLV
V R I O L
L V R I O
⋮

O fundamental nesse exercício é perceber que as vogais I e O, juntas, “funcionam” como se fossem um único “objeto” que troca de ordem com os demais “objetos” L, V e R (note que nos exemplos listados acima o objeto IO ocupou a segunda posição, depois a primeira, a terceira e a quarta posição, respectivamente). Temos assim a permutação de 4 elementos, cujo total é $P_4 = 24$.

No entanto, esse raciocínio foi feito apenas para as vogais juntas e na ordem IO. Como não foi estipulada a ordem em que as vogais devem ficar juntas, devemos considerar também considerar a ordem OI. Neste caso, é evidente que o resultado também será 24. Logo, o total de anagramas que apresenta as vogais juntas é $24 + 24 = 48$ ou $P_2 \cdot P_4$.

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Permutações com elementos repetidos

Até agora trabalhamos com permutações simples, onde não há repetição de elementos (elementos distintos). Mas, vamos supor que seja dado um grupo de n elementos, sendo que um desses elementos apareça α vezes, outro elemento apareça β vezes, um outro elemento apareça δ vezes e assim por diante. O número de permutações desses n elementos será a divisão do fatorial do número total n de elementos pelo produto dos fatoriais dos números de vezes que cada elemento aparece (já que as trocas de posições entre elementos iguais não resultam em uma nova permutação). Então:

$$P_n^{\alpha, \beta, \delta, \dots} = \frac{n!}{\alpha! \cdot \beta! \cdot \delta!}$$

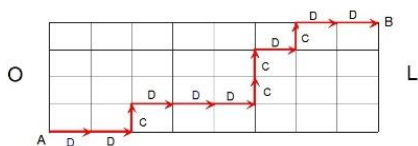
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Quantos anagramas existem com as letras da palavra ARARAS?

Temos que $n = 6$, $\alpha = 3$ (letra A aparece 3 vezes) e $\beta = 2$ (letra R aparece 2 vezes), logo:

$$P_n^{\alpha, \beta, \delta, \dots} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \delta! \dots} \Rightarrow P_6^{3,2} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} \Rightarrow P_6^{3,2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \\ \Rightarrow \boxed{P_6^{3,2} = 60}$$

2) A Figura representa o mapa de uma cidade fictícia na qual há nove ruas na direção vertical e cinco ruas na direção horizontal. Para ir do ponto A até o ponto B, os deslocamentos permitidos são sempre no sentido Oeste-Leste (D) e/ou Sul-Norte (C), como exemplificado na Figura abaixo, respectivamente, pelas letras D (direita) e C (para cima). Nestas condições existem quantos caminhos diferentes para ir do ponto A até o ponto B?



Solução:

Note que para ir do ponto A até o ponto B tem-se 12 passos (8D + 4C)

Então, cada trajetória possível, é uma sequência de 12 elementos sendo "8D" e "4C".

$$\text{Logo: } P_{12}^{8,4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495$$

3) Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z = 4$?

Solução:

Algumas soluções dessa equação são, por exemplo, as triplas (2,1,1), (1,2,1), (3,1,0), etc. Vamos fazer a seguinte convenção: o número 1 será indicado por *, o número 2 por **, o número 3 por *** e o número 4 por ****. O número zero não será representado por nenhum símbolo. Dessa maneira, a solução (2,1,1) pode ser representada por

$$**+**+, \text{ pois } 2+1+1=4;$$

a solução (1,2,1) pode ser representada por

$$*+**+*, \text{ pois } 1+2+1=4 \text{ e}$$

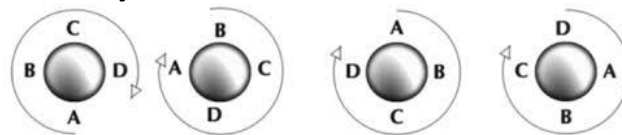
a solução (3,1,0) por

$$***+*, \text{ pois } 3+1+0=4.$$

Percebemos com isso que cada solução é uma sequência de 4 asteriscos (*) e 2 sinais de mais (+). Em outras palavras, cada solução é uma permutação de 6 símbolos, sendo que um deles aparece 4 vezes e o outro 2 duas vezes. Portanto o total de soluções da equação $x + y + z = 4$ é dado por

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

PERMUTAÇÃO CIRCULAR



Permutação circular é um tipo de permutação composta por um ou mais conjuntos em ordem cíclica. Ocorre quando temos grupos com n elementos distintos formando uma circunferência.

A quantidade de permutações circulares de um conjunto com n objetos (distintos) é o número de maneiras de colocá-los ao redor de um círculo, de forma que disposições que coincidam pela aplicação de uma rotação sejam consideradas iguais. O número de permutações circulares de n objetos é dado pela fórmula:

$$P_n = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

Exemplo: De quantas maneiras podemos organizar uma roda com 5 crianças?



Solução:

$$P_5 = (5-1)! = 4! = 24$$

Exercícios



Nível 1

01) (Modelo Enem) O número de candidatos inscritos para realização do último vestibular de verão, em um determinado curso, corresponde ao número de anagramas da palavra VESTIBULAR que começam por VE e terminam por AR. Esse número é igual a:

- a) 120.
- b) 240.
- c) 360.
- d) 540.
- e) 720.

02) (Modelo Enem) Maurício de Sousa, criador de uma famosa revista com histórias em quadrinhos, baseou a criação de seus personagens em amigos de infância e nos filhos, conferindo a cada um deles características distintivas e personalidades marcantes. A turma da Mônica e todos os demais personagens criados pelo escritor estão aí, com um tipo de mensagem carinhosa, alegre, descontraída e até matemática, dirigida às crianças e aos adultos de todo o mundo.



Se os personagens da história em quadrinhos acima continuassem permutando as letras, com o objetivo de formar todos os anagramas possíveis, eles obteriam mais:

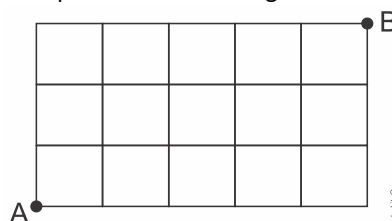
- a) 718 anagramas.
- b) 360 anagramas.
- c) 720 anagramas.
- d) 362 anagramas.
- e) 358 anagramas.

03) (ENEM) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

- a) $20 \times 8! + (3!)^2$
- b) $8! \times 5! \times 3!$
- c) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$
- d) $\frac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$
- e) $\frac{16!}{2^8}$

04) (Modelo Enem) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:

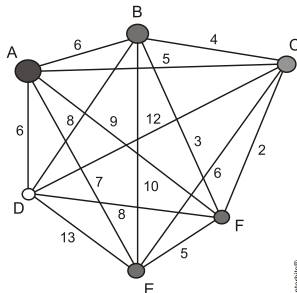


- a) 40.320
- b) 6.720
- c) 256
- d) 120
- e) 56



Nível 2

- 05) (ENEM) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

- a) 60 min.
b) 90 min.
c) 120 min.
d) 180 min.
e) 360 min.
- 06) (ENEM) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha. O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por
- a) $10^2 \cdot 26^2$
b) $10^2 \cdot 52^2$
c) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$
d) $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$
e) $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

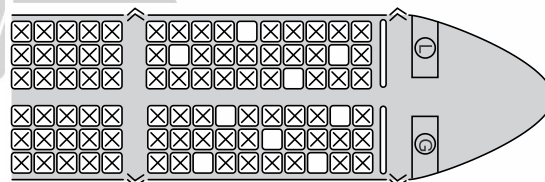


Nível 3

- 07) (ENEM) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

- a) 24
b) 31
c) 32
d) 88
e) 89

- 08) (ENEM) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site* as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

- a) $\frac{9!}{2!}$
b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$
c) $7!$
d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$
e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

GABARITO – AULAS 66 E 67

- 1) e 2) e 3) b 4) e 5) b
6) e 7) e 8) a

VÍDEO AULA 68

Probabilidades

Conceitos Iniciais

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA



PROBABILIDADE – DEFINIÇÕES INICIAIS



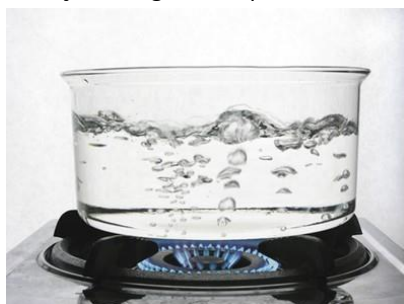
1. Conceitos Iniciais

Considere os seguintes experimentos:

1. Queda livre de um corpo;



2. Ebulição da água ao aquecê-la.



Nos experimentos acima podemos fazer previsão sobre a velocidade com que um corpo atingirá o solo, saber a que temperatura a água entra em ebulição. Esse tipo de experimento é denominado **experimento determinístico**.

Um Experimento Determinístico é aquele cujo resultado pode ser determinado antes da sua realização.

Considere agora os experimentos:

1. Retirada de uma carta de um baralho;



2. Sorteio dos números da mega sena;



3. Lançamento de um dado.



Nesses experimentos, ao retirarmos por exemplo uma carta do baralho uma ou mais vezes, não podemos prever a carta obtida, sabemos apenas os possíveis resultados. Você não pode também determinar qual face de um dado ficará voltada para cima antes do lançamento do dado ou determinar quais números serão sorteados no próximo concurso da Mega Sena. Esse tipo de experimento é denominado **experimento aleatório**.

Experimento Aleatório é todo experimento que realizado repetidas vezes sob as mesmas condições, apresenta resultados variados, impossibilitando uma previsão lógica do que vai acontecer.

1.1. Espaço Amostral

O *Espaço Amostral*, que simbolizaremos pela letra **U**, é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Representaremos o espaço amostral pela letra **U** e o seu número de elementos por $n(U)$.

Exemplos:

- 1) Veja que apesar de não podermos determinar que face ficará voltada para cima no lançamento de um dado, ainda assim podemos listar todos os possíveis resultados, ou seja, determinar o espaço amostral desse experimento.

Espaço amostral: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(U) = 6$

- 2) No lançamento de uma moeda, o conjunto de todos os resultados possíveis é:

Espaço amostral: $U = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$; $n(U) = 2$

- 3) Quando lançamos dois dados, um branco e um vermelho, qual o espaço amostral?

Vamos representar cada resultado como um par ordenado (B, V) , onde o primeiro número do par representa o resultado do dado branco e o segundo do dado vermelho. Assim, por exemplo, o par $(2, 6)$ significa que ocorreu 2 na face do dado branco e 6 no dado vermelho. Assim, os elementos do espaço amostral são descritos abaixo:

D ₂ \ D ₁	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

1.2. Evento

Evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Representaremos o espaço amostral pela letra **A** e o seu número de elementos por $n(A)$.

Observe o exemplo:



Lançamos um dado e observamos a face voltada para cima. Já sabemos que o espaço amostral desse experimento é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Suponha que estejamos interessados na:

- a) Ocorrência de um número par.

Vamos descrever estes resultados que nos interessam através do conjunto $A = \{2, 4, 6\}$, que será chamado de Evento A. Note que A é subconjunto de U.

- b) Ocorrência de um número primo.
Como no item anterior, temos aqui mais um evento, que chamaremos de evento B. Assim $B = \{2, 3, 5\}$

- c) Ocorrência de um número maior do que 7.

Um evento desse tipo costuma ser chamado de *evento impossível* e é representado pelo conjunto vazio $\emptyset$.

- d) Ocorrência de um número menor do que 10.

Vamos chamar este evento de C. É claro que $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Como este evento é igual ao espaço amostral, ele será chamado de *evento certo*.

- d) Ocorrência de um número maior do que 5.

Temos aqui o evento $D = \{6\}$, formado por um único elemento. Eventos representados por conjuntos unitários são chamados de *eventos elementares*.

IMPORTANTE!

Evento união: é a reunião de dois eventos;

Evento intersecção: é a intersecção (elementos em comum) de dois ou mais eventos.

Ainda no exemplo anterior, considere os eventos:

- 5) $E \rightarrow$ ocorrência de um número par
 $\therefore E = \{2, 4, 6\}$
- 6) $F \rightarrow$ ocorrência de um número primo
 $\therefore F = \{2, 3, 5\}$

Evento união: $E \cup F = \{2, 3, 4, 6\}$

Evento intersecção: $E \cap F = \{2\}$

2. Conceito de Probabilidade

Não podemos prever com antecedência se determinado evento de um experimento aleatório vai ou não ocorrer. No entanto, podemos atribuir ao evento um número que represente a chance de sua ocorrência. Esse número é que será chamado de probabilidade.

Seja **A** o espaço amostral finito de um determinado experimento aleatório. Suponha que este espaço amostral seja *equiprovável*, isto é, que todos os eventos elementares (conjunto unitário), tenham iguais chances de ocorrer. Sendo assim, a *Probabilidade* de ocorrer um determinado evento **A**, que representamos por $P(A)$, é dada pela fórmula:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

em que $n(U)$ representa o número de elementos do espaço amostral U .

A fórmula acima basicamente nos diz que uma probabilidade nada mais é do que o quociente entre o número de situações que nos interessam no experimento e o número de resultados possíveis do experimento, isto é,

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{número de casos que interessam}}{\text{número de casos possíveis}}$$

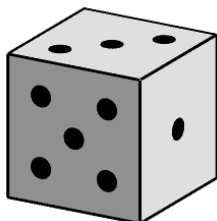
Observações:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- Quando $P(A) = 1$, dizemos que o evento é **certo**.
- Quando $P(A) = 0$, dizemos que o evento é **impossível**.
- É usual representarmos uma probabilidade na forma de porcentagem. Por exemplo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

Exercícios Resolvidos

1) No lançamento de um dado, qual a probabilidade de a face voltada para cima ser um número ímpar?



Solução:

- Nesta experiência o espaço amostral é o conjunto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, logo $n(U) = 6$.
- O evento "sair número ímpar" é o conjunto $A = \{1, 3, 5\}$, logo $n(A) = 3$
- A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $P(A) = \frac{1}{2}$ ou $P(A) = 50\%$

2) Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis.

Se uma bola dessa urna é retirada ao acaso, qual a probabilidade de se obter uma bola azul?



Solução:

Espaço Amostral U : $\begin{cases} 6 \text{ bolas vermelhas} \\ 4 \text{ bolas azuis} \end{cases} \Rightarrow n(U) = 10$

Evento A : bola azul $\Rightarrow n(A) = 4$

A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Resposta: $P(A) = \frac{2}{5}$ ou $P(A) = 40\%$

3) De um baralho de 52 cartas extraímos uma carta. Qual a probabilidade de que a carta seja um rei, sabendo que ela é uma figura?



Solução:

Note que o espaço amostral desse experimento não é o conjunto das 52 cartas. Com a informação de que a carta é uma figura, o espaço amostral será formado pelas 12 figuras do baralho. Como existem 4 reis, a probabilidade

$$\text{será } P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Probabilidades como essas são denominadas **probabilidades condicionadas** e será assunto do módulo 77.

3. Cálculo do número de elementos de um espaço amostral

Apesar de ser essencial termos em mente como são os elementos do espaço amostral de um experimento, em geral não faremos a listagem dos mesmos; nos preocuparemos mais em saber quantificá-los..

O número de elementos de um espaço amostral de um experimento pode ser calculado usando os conceitos vistos em análise combinatória. Observe os exemplos abaixo:

1) Calcule o número de elementos do espaço amostral correspondente ao números obtidos no lançamento de dois dados.

Resolução:

Lançando um mesmo dado duas vezes ou lançando dois dados diferentes, o espaço amostral será o mesmo

D ₂ \ D ₁	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Repare que se a intenção é definir apenas a quantidade de elementos poderíamos usar o princípio fundamental da contagem:

$$\boxed{\begin{matrix} 6 & \cdot & 6 & = & 36 \\ \text{1º dado} & & \text{2º dado} \end{matrix}} \quad \text{Logo } n(U) = 36.$$

2) De um baralho de 52 cartas extraímos duas sucessivamente e sem reposição. Calcule a probabilidade de ambas serem valetes?

Resolução:

Eis aqui um exemplo onde “não é de bom senso” tentar listar os elementos do espaço amostral. Alguns deles são

$$U = \{(3\text{copas}, 2\text{paus}); (6\text{ouro}, \text{dama espada}); (\text{rei paus}, 5\text{paus}); \dots\}$$

Veja que cada elemento do espaço consiste num grupo de duas cartas extraídas dentre as 52. Está claro também que a ordem em que as duas cartas são extraídas não tem a menor importância. Portanto, o total de casos possíveis é

$$n(U) = C_{52}^2 = \frac{52!}{2!50!} = 1326$$

3) Determinar o número de elementos do espaço amostral relativo à escolha de um número de 2 algarismos distintos, formado a partir dos algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Resolução: A quantidade de números de 2 algarismos distintos que podemos formar a partir de 6 algarismos disponíveis é dada por um arranjo de 6 elementos tomados 2 a 2. Logo:

$$A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30 \quad \text{Então } n(U) = 30$$

4) Dê o número de elementos do espaço amostral relativo à escolha de um anagrama da palavra BOLA.

Resolução: A quantidade de anagramas que podemos formar com as letras da palavra BOLA é dada pela permutação das 4 letras, ou seja:

$$P_4 = 4! = 24 \quad \text{Então } n(U) = 24$$

Exercícios Resolvidos

4) Uma comissão será formada por 3 pessoas sorteadas entre 5 homens e 4 mulheres. Escolhida uma comissão ao acaso, qual a probabilidade de nessa comissão terem apenas mulheres?

Solução:

a) Nesta experiência o espaço amostral é o total de comissões formadas por 3 pessoas a partir de 9 disponíveis, ou seja:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

$$\text{logo } n(U) = 84.$$

b) O evento “comissão só com mulheres” é dado por:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\text{logo } n(A) = 4$$

c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

Resposta: $P(A) = \frac{1}{21}$

- 5) Considere todos os números naturais de 3 algarismos distintos que se podem formar com os algarismos do conjunto $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Escolhendo um deles, aleatoriamente, qual é a probabilidade de sair um número múltiplo de 5?

Solução:

- a) O espaço amostral é o total de números com 3 algarismos distintos formados a partir de K, ou seja:

$$??? \rightarrow A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 210$$

$$\text{logo } n(U) = 210.$$

- b) O evento “número múltiplo de 5” é dado por:

$$??5 \rightarrow A_6^2 = \frac{6!}{4!} = 30$$

$$\text{logo } n(A) = 30$$

- c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

Resposta: $P(A) = \frac{1}{7}$

- 3) Dois dados, um azul e outro vermelho, são lançados simultaneamente.



Qual a probabilidade de a soma das faces voltadas para cima ser maior do que 7?

Solução:

- a) O espaço amostral pode ser dado pelo princípio fundamental da contagem:

$$\begin{matrix} 6 & \cdot & 6 & = & 36 \\ \text{1º dado} & & \text{2º dado} & & \end{matrix}$$

$$\text{Logo } n(U) = 36.$$

Abaixo estão as 36 possibilidades:

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- b) O evento “soma maior do que 7” é dado analisando o quadro abaixo:

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$\text{Veja que } n(A) = 15$$

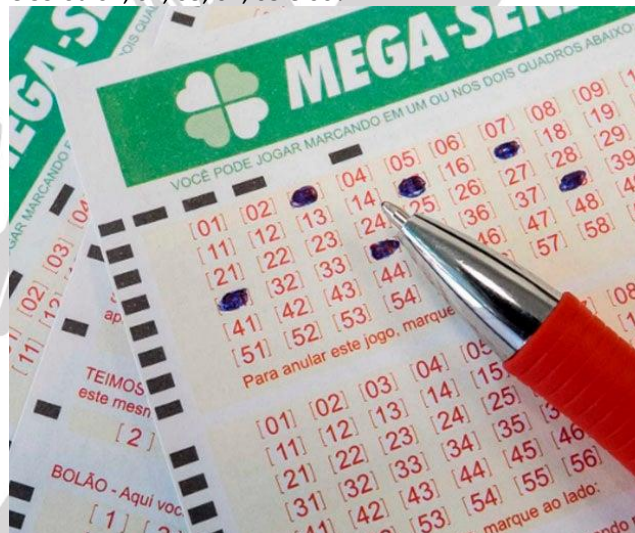
- c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Resposta: $P(A) = \frac{5}{12}$

SAIBA MAIS!

Qual dos seguintes grupos de 6 números você acha mais “interessante” para jogar na Mega Sena: 02, 08, 21, 44, 56 e 59 ou 01, 02, 03, 04, 05 e 06?



Seguramente você jamais jogaria no segundo grupo, por achar totalmente improvável que esses números venham a ser sorteados. Para seu espanto, fique sabendo que do ponto de vista da matemática, a chance do primeiro grupo ser sorteado é exatamente igual à chance do segundo.

As chances da Mega Sena

Se alguém fizer a aposta mínima que custa hoje R\$3,50 que chance tem de ganhar?

Solução:

- a) Nesta experiência o espaço amostral é o total de combinações diferentes que podemos obter com 6

números a partir de 60 disponíveis, ou seja:

$$C_{60}^6 = \frac{60!}{54!6!} = 50063860$$

logo $n(U) = 50\,063\,860$.

b) O ganhador acertará a mega sena se os seis números escolhidos por ele coincidirem com os seis números sorteados, sendo assim:

logo $n(A) = 1$;

c) A probabilidade de ocorrer o evento é

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{50063860} \cong 0,000002\%$$

Exercícios



Nível 1

01) (ENEM) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

- a) $\frac{1}{100}$
- b) $\frac{19}{100}$
- c) $\frac{20}{100}$
- d) $\frac{21}{100}$
- e) $\frac{80}{100}$

02) (ENEM) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

- a) 8%.
- b) 9%.
- c) 11%.
- d) 12%.
- e) 22%.



Nível 2

- 03) (ENEM) Um projeto para incentivar a reciclagem de lixo de um condomínio conta com a participação de um grupo de moradores, entre crianças, adolescentes e adultos, conforme dados do quadro.

Participantes	Número de pessoas
Crianças	X
Adolescentes	5
Adultos	10

Uma pessoa desse grupo foi escolhida aleatoriamente para falar do projeto. Sabe-se que a probabilidade de a pessoa escolhida ser uma criança é igual a dois terços.

Diante disso, o número de crianças que participa desse projeto é

- a) 6.
b) 9.
c) 10.
d) 30.
e) 45.
- 04) (ENEM) O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% deles eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade de o primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%.

Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

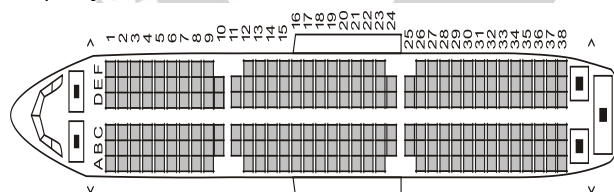
- a) 10.
b) 15.
c) 35.
d) 40.
e) 45.

- 05) (ENEM) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1 132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

- a) 63,31%
b) 60,18%
c) 56,52%
d) 49,96%
e) 43,27%

- 06) (ENEM) Uma empresa aérea lança uma promoção de final de semana para um voo comercial. Por esse motivo, o cliente não pode fazer reservas e as poltronas serão sorteadas aleatoriamente. A figura mostra a posição dos assentos no avião:



Avião com 38 fileiras de poltronas.

Por ter pavor de sentar entre duas pessoas, um passageiro decide que só viajará se a chance de pegar uma dessas poltronas for inferior a 30%.

Avaliando a figura, o passageiro desiste da viagem, porque a chance de ele ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é mais aproximada de

- a) 31%.
b) 33%.
c) 35%.
d) 68%.
e) 69%.

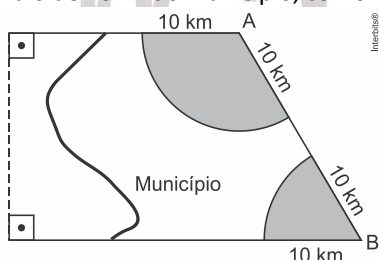


Nível 3

07) (ENEM) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

- Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
- José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
- José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
- José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
- Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

08) (ENEM) Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10km do município, conforme mostra a figura:



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente,

- 20%.
- 25%.
- 30%.
- 35%.
- 40%.

09) (ENEM) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes saudáveis e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

- Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
- Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do Teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

- 47,5%
- 85,0%
- 86,3%
- 94,4%
- 95,0%

GABARITO – AULA 68

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1) c | 2) c | 3) d | 4) d | 5) d |
| 6) a | 7) d | 8) b | 9) e | |

VÍDEO AULA 69

Probabilidades

União de probabilidades

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA



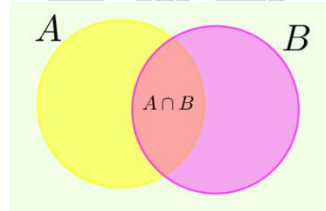
Probabilidade da união de dois eventos

Sejam **A** e **B** eventos quaisquer de um espaço amostral **S**.
Temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Justificativa:

Considere os conjuntos **A**, **B** e **U**.



Sabemos que: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

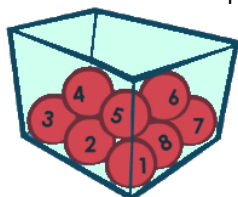
Dividindo a expressão anterior por $n(U)$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

Então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exercícios Resolvidos:

- 1) Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 15.
Sorteando-se uma das bolas, qual é a probabilidade de sair um número par ou um número múltiplo de 3?



Resolução:

O espaço amostral é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 15\} \rightarrow n(U) = 15$

Eventos:

- Ocorrência de um número par:
 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \rightarrow n(A) = 7$
- Ocorrência de um múltiplo de 3:
 $B = \{3, 6, 9, 12, 15\} \rightarrow n(B) = 5$
- $A \cap B = \{6, 12\} \rightarrow n(A \cap B) = 2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{15} + \frac{5}{15} - \frac{2}{15}$$

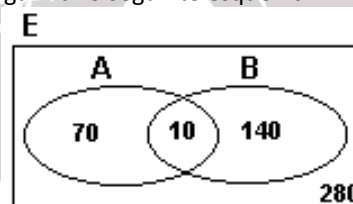
$$P(A \cup B) = \frac{10}{15}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

- 2) Em um grupo de 500 estudantes, 80 estudam engenharia, 150 estudam economia e 10 estudam engenharia e economia. Se um aluno é escolhido ao acaso, qual a probabilidade de que ele estude economia ou engenharia?

Solução:

Vamos chamar de **A** ao evento “estudar engenharia” e de **B** ao evento “estudar economia”.
Recorrendo aos diagramas da teoria dos conjuntos podemos organizar o seguinte esquema:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{80}{500} + \frac{150}{500} - \frac{10}{500}$$

$$P(A \cup B) = \frac{220}{500} = \frac{11}{25}$$

Observação: Dois eventos **A** e **B** são ditos mutuamente exclusivos quando não possuem elementos em comum, ou seja: Se $A \cap B = \emptyset$.

Nesse caso temos que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- 3) No lançamento de um dado qual a probabilidade de ocorrer um número maior ou igual a 5 ou um número menor que 3?



Resolução:

Nesse caso o espaço amostral é:
 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(U) = 6$

- Ocorrência de um número maior ou igual a 5:
 $A = \{5, 6\} \rightarrow n(A) = 2$
- Ocorrência de um número menor do que 3 :
 $B = \{1, 2\} \rightarrow n(B) = 2$
- $A \cap B = \emptyset \rightarrow A$ e B são eventos mutuamente exclusivos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{= 0}$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - 0$$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

SAIBA MAIS!

Quantas ...?

- Maneiras existem de rearrumar as 26 letras do alfabeto?



Resposta: 403.291.461.126.605.635.584.000.000

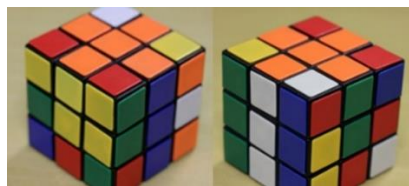
- Maneiras existem de embaralhar um maço de cartas?



Resposta:

80.658.175.170.943.878.571.660.636.856.403.766.975.289.
 505.440.883.277.824.000.000.000.000

- Posições diferentes pode ter um cubo mágico?



Resposta:

43.252.003.274.489.856.000

- Configurações diferentes pode ter um jogo de sudoku?



Resposta:

6.670.903.752.021.072.936.960

(Calculado por Bertram Felgenhauer e Frazer Jarvis, em 2005)

(Almanaque das curiosidades matemáticas)

Exercícios



Nível 1

01) (Fixando conteúdo) Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. A probabilidade de o bilhete sorteado ser um número maior que 40 ou número par é:

- a) 60%
- b) 70%
- c) 80%
- d) 90%
- e) 50%

02) (Modelo Enem) O filme Jumanji (1995) é uma obra de ficção que retrata a história de um jogo de tabuleiro mágico que empresta seu nome ao longa-metragem. O jogo é composto de dois dados distinguíveis de 6 lados, um tabuleiro com um visor de cristal no centro e peças que representam cada jogador. No filme, Alan Parrish é um garoto que encontra o jogo em um local de construção e o leva para casa. Assim que chega, Alan convida Sarah Whittle, uma garota da vizinhança, para jogar. Quando Alan lança os dados, aparece no visor a seguinte mensagem:



Adaptado de google.com.br

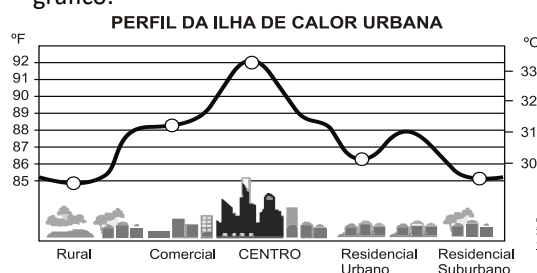
Alan então é sugado pelo visor de cristal e transportado magicamente até a selva de Jumanji. Supondo que os dois dados do jogo sejam independentes e honestos, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a probabilidade de algum jogador lançar os dois dados e obter a soma de 5 ou 8, de modo a tirar Alan da selva.

- a) 15%
- b) 22%
- c) 25%
- d) 62%
- e) 66%



Nível 2

03) (ENEM) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{3}{5}$
- e) $\frac{3}{4}$

04) (ENEM) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{5}{8}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{5}{6}$
- e) $\frac{5}{14}$



Nível 3

05) (ENEM) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o *rock* e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1 000 alunos de uma escola.

Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos.

Preferência musical	<i>rock</i>	samba	MPB	<i>rock</i> e samba
número de alunos	200	180	200	70

Preferência musical	<i>rock</i> e MPB	samba e MPB	<i>rock</i> , samba e MPB
número de alunos	60	50	20

Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

- a) 2%
- b) 5%
- c) 6%
- d) 11%
- e) 20%

06) (ENEM) A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir.

Por que vive na rua?

Alcoolismo/drogas	36%
Desemprego	30%
Problemas familiares	30%
Perda de moradia	20%
Decepção amorosa	16%

Escolaridade

Superior completo ou incompleto	1,4%
Médio completo ou incompleto	7,0%
Fundamental completo ou incompleto	58,7%
Nunca estudaram	15,1%

Istoé, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a

- a) 12%.
- b) 16%.
- c) 20%.
- d) 36%.
- e) 52%.

GABARITO – AULA 69

1) c 2) c 3) e 4) a 5) d 6) a

VÍDEO AULA 70

Probabilidades

PROBABILIDADE DO EVENTO COMPLEMENTAR
PRODUTO DE PROBABILIDADES

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA



1. Probabilidade do evento complementar

Considere o seguinte experimento:



No lançamento de um dado de RPG numerado de 1 a 12, determine a probabilidade de:

- sair um número primo;
- de não sair um número primo.

Solução:

a) sair um número primo: $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Visto que o espaço amostral é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 12\}$, temos:

$$P(A) = \frac{5}{12}$$

b) não sair um número primo: $B = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$:

$$P(B) = \frac{7}{12}$$

Veja que nesse exemplo que:

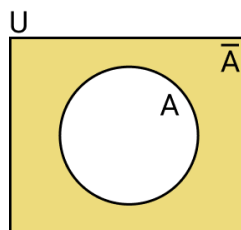
$$P(A) + P(B) = \frac{5}{12} + \frac{7}{12} = \frac{12}{12} = 1 = 100\%$$

Nesses casos os eventos são ditos complementares, ou seja, um dos eventos é a negação do outro.

Notação: $\bar{A}$ é evento complementar de A.

Generalizando:

Observe o diagrama abaixo juntamente com os eventos A e $\bar{A}$ em relação ao mesmo espaço amostral U.



Visto que $A \cup \bar{A} = U$, temos::

$$n(A) + n(\bar{A}) = n(U)$$

Dividindo-se a igualdade acima por $n(U)$, vem:

$$\frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(\bar{A})}{n(U)} = \frac{n(U)}{n(U)}$$

Assim:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

2. Produto de Probabilidades

Sejam dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral U. A probabilidade de ocorrer A e B é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Em que:

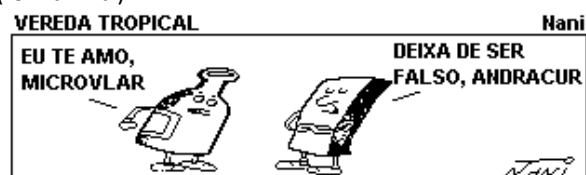
- $P(A \cap B)$ é a probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente.
- $P(A)$ é a probabilidade de ocorrer A.
- $P(B/A)$ é a probabilidade de ocorrer B, tendo ocorrido A.

Observação: $P(B/A) = P(B)$, dizemos que a probabilidade do evento B ocorrer independe do evento A ter ocorrido, dizemos então, que A e B são eventos independentes, logo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exercícios Resolvidos:

1) (UERJ – RJ)



(O Dia, 25/08/98)

Suponha haver uma probabilidade de 20% para uma caixa de Microvlar ser falsificada. Em duas caixas, a probabilidade de pelo menos uma delas ser falsa é:

Solução:

Seja o evento A: ocorrer duas caixas de Microvlar verdadeiras.

Como a ocorrência de uma caixa verdadeira independe da probabilidade da outra ser verdadeira, podemos dizer que as ocorrências individuais de caixas de Microvlar verdadeiras são eventos independentes. Assim a probabilidade de ambas serem verdadeiras é:

$$P(A) = 80\% \cdot 80\% = \frac{80}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{64}{100} = 64\% .$$

Portanto, o que nos interessa é

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{64}{100} = \frac{36}{100} = 36\% .$$

2) Lançando-se uma moeda e um dado, qual a probabilidade de se obter cara na moeda e face 2 no dado?



Resolução: Sejam os eventos:

$$A: \text{ocorrer cara} \rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$B: \text{ocorrer face 3} \rightarrow P(B/A) = P(B) = \frac{1}{6}$$

Veja que A e B são eventos independentes.

Então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\text{Portanto: } P(A \cap B) = \frac{1}{12} .$$

3) Uma urna contém 10 bolas vermelhas e 6 bolas brancas.



Retirando-se duas bolas ao acaso, qual é a probabilidade de que ambas sejam de mesma cor com:

- reposição da primeira bola
- sem reposição da primeira bola

Resolução: Note que queremos que ocorra duas bolas vermelhas ou duas bolas brancas. Chamando os eventos de A e B, temos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- com reposição da primeira bola

$$P(A \cup B) = \underbrace{\frac{10}{16} \cdot \frac{10}{16}}_{2 \text{ vermelhas}} + \underbrace{\frac{6}{16} \cdot \frac{6}{16}}_{2 \text{ brancas}}$$

$$P(A \cup B) = \frac{17}{32}$$

- sem reposição da primeira bola

$$P(A \cup B) = \underbrace{\frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15}}_{2 \text{ vermelhas}} + \underbrace{\frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15}}_{2 \text{ brancas}}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

4) (FGV – SP) Um sistema de controle de qualidade consiste em três inspetores A, B e C que trabalham em série e de forma independente, isto é, o produto é analisado pelos três inspetores trabalhando de forma independente.

O produto é considerado defeituoso quando um defeito é detectado, ao menos, por um inspetor.

Quando o produto é defeituoso, a probabilidade de o defeito ser detectado por cada inspetor é 0,8. A probabilidade de uma unidade defeituosa ser detectada é:

Solução:

Probabilidade de uma unidade defeituosa não apresentar defeito: $1 - 0,8 = 0,2$.

Probabilidade de uma unidade defeituosa não ser detectada por nenhum inspetor.

$$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008 .$$

Probabilidade de uma unidade defeituosa ser detectada por pelo menos um inspetor.

$$1 - 0,008 = \underline{0,992} .$$

Exercícios



Nível 1

- 01) (ENEM) Um protocolo tem como objetivo firmar acordos e discussões internacionais para conjuntamente estabelecer metas de redução de emissão de gases de efeito estufa na atmosfera. O quadro mostra alguns dos países que assinaram o protocolo, organizados de acordo com o continente ao qual pertencem.

Países da América do Norte	Países da Ásia
Estados Unidos da América	China
Canadá	Índia
México	Japão

Em um dos acordos firmados, ao final do ano, dois dos países relacionados serão escolhidos aleatoriamente, um após o outro, para verificar se as metas de redução do protocolo estão sendo praticadas.

A probabilidade de o primeiro país escolhido pertencer à América do Norte e o segundo pertencer ao continente asiático é

- a) $\frac{1}{9}$
 b) $\frac{1}{4}$
 c) $\frac{3}{10}$
 d) $\frac{2}{3}$
 e) 1

- 02) (ENEM) Uma caixa contém uma cédula de R\$ 5,00, uma de R\$ 20,00 e duas de R\$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.

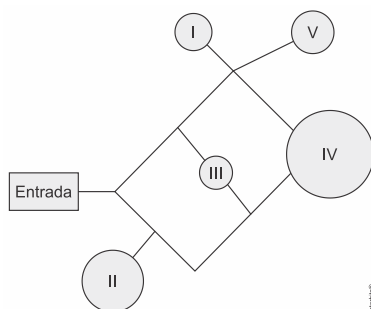
A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R\$ 55,00 é

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{5}{9}$



Nível 2

- 03) (ENEM) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

- a) $\frac{1}{96}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{5}{24}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{12}$

- 04) (ENEM) Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisada, para definir o valor do recolhimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tomando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançarão a idade de 80 anos.

Qual é essa probabilidade?

- a) 50%
b) 44%
c) 38%
d) 25%
e) 6%



Nível 3

- 05) (ENEM) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%.

A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de

- a) 5,0%
b) 7,5%
c) 22,5%
d) 30,0%
e) 75,0%

- 06) (ENEM) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de

parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$ eram

defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos

produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

- a) excelente.
- b) bom.
- c) regular.
- d) ruim.
- e) péssimo.

07) (ENEM) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

- a) 23,7%
- b) 30,0%
- c) 44,1%
- d) 65,7%
- e) 90,0%

08) (ENEM) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- a) 0,075
- b) 0,150
- c) 0,325
- d) 0,600
- e) 0,800

GABARITO – AULA 70

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1) c | 2) c | 3) c | 4) b | 5) c |
| 6) b | 7) d | 8) c | | |

VÍDEO AULA 71

Probabilidades

PROBABILIDADE CONDICIONAL – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA



De um baralho de 52 cartas extraímos uma carta. Qual a probabilidade de que a carta seja um rei, sabendo que ela é uma figura?

**Solução:**

Note que o espaço amostral desse experimento não é o conjunto das 52 cartas. Com a informação de que a carta é uma figura, o espaço amostral será formado pelas 12 figuras do baralho. Como existem 4 reis, a probabilidade

$$\text{será } P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Probabilidades como essas são denominadas **probabilidades condicionadas** e será objeto de nosso módulo.

1. Probabilidade condicional

Acompanhe o seguinte exemplo:

Numa escola existem 20 estudantes, dos quais 12 são mulheres e 8 são homens.



Ao prestarem vestibular no final do ano observou-se que 5 mulheres e 3 homens foram aprovados, como mostra o quadro:

	aprovados	Não aprovados	total
Mulheres	5	7	12
Homens	3	5	8
Total	8	12	20

Considere agora, os seguintes eventos:

A: O estudante escolhido foi aprovado: $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

B: O estudante escolhido é mulher: $P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

Daí pergunta-se: Qual é a probabilidade de o estudante ter sido aprovado, sabendo que é mulher?

Resolução: Observe que o problema pede a probabilidade de ocorrer **A** (estudante ter sido aprovado), mas informa que já ocorreu **B** (estudante é mulher); Portanto o novo espaço amostral está condicionado. Veja o quadro abaixo:

	aprovados	Não aprovados	total
Mulheres	5	7	12

Portanto, a probabilidade que procuramos é: $\frac{5}{12}$

Generalização

De um modo geral, se **U** é um espaço amostral e A e B eventos, denominamos **probabilidade condicional** de A, dado B, a probabilidade de ocorrer A visto que já ocorreu B.

Notação: $P(A/B)$

Cálculo: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ com $P(B) \neq 0$

No exemplo anterior, temos:

A: O estudante escolhido foi aprovado: $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

B: O estudante escolhido é mulher: $P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$A \cap B$: O estudante escolhido foi aprovado e é mulher:

$P(A \cap B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Aplicando $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ vem:

$P(A/B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{12}$

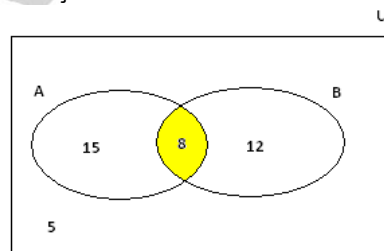
Exercício Resolvido

Numa pesquisa sobre a preferência de dois jornais A e B com 40 pessoas, constatou-se que:

- 15 pessoas gostam apenas do jornal A
- 12 pessoas gostam apenas do jornal B
- 8 pessoas gostam dos jornais A e B.

Qual a probabilidade de uma pessoa que gosta do jornal A também gostar do jornal B?

Resolução:



Aplicando $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ vem: $P(B/A) = \frac{\frac{8}{40}}{\frac{23}{40}} = \frac{8}{23}$

2. Distribuição Binomial

Se um experimento aleatório é realizado n vezes sucessivas, sempre nas mesmas condições, então a probabilidade de que um evento A desse experimento ocorra exatamente k vezes é dada pela expressão:

$$P_n^{k, n-k} \cdot [P(A)]^k \cdot [P(\bar{A})]^{n-k}$$

ou

$$C_n^k \cdot [P(A)]^k \cdot [P(\bar{A})]^{n-k}$$

ou ainda:

$$\binom{n}{k} \cdot [P(A)]^k \cdot [P(\bar{A})]^{n-k}$$

$$\text{onde } P_n^{k, n-k} = C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Vamos considerar o seguinte problema:



A probabilidade de um atirador atingir um alvo em um único tiro é $\frac{1}{5}$. Com apenas 5 tiros, qual a probabilidade de se acertar o alvo exatamente 2 vezes?

Resolução: Inicialmente observe os seguintes eventos:

$$\begin{cases} A : \text{Acertar o alvo} \rightarrow P(A) = \frac{1}{5} \\ \bar{A} : \text{Não acertar o alvo} \rightarrow P(\bar{A}) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Observe que A e $\bar{A}$ são eventos complementares.

Nos 5 experimentos, o problema exige que ocorra o evento A exatamente 2 vezes. É natural perceber que o evento $\bar{A}$ deve ocorrer 3 vezes.

Em contra partida, não é definido no problema a ordem em que devem acontecer os eventos A e $\bar{A}$.

Veja abaixo algumas das possibilidades em que podem ocorrer:

A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A	$\bar{A}$
---	-----------	-----------	---	-----------

$\bar{A}$	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
-----------	---	---	-----------	-----------

A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	$\bar{A}$
---	---	-----------	-----------	-----------

Observe que qualquer que seja a disposição dos eventos, é fácil perceber que a probabilidade dessa ocorrência é a mesma, ou seja: $[P(A)]^2 \cdot [P(\bar{A})]^3$

Daí, resta obter apenas a quantidade de maneiras diferentes em que essas situações podem ser dispostas.

Para isso basta permutarmos $A, A, \bar{A}, \bar{A}, \bar{A}$.

Então, a probabilidade procurada é dada por:

$$P_5^{2,3} \cdot [P(A)]^2 \cdot [P(\bar{A})]^3$$

$$\frac{5!}{2!3!} \cdot \left[\frac{1}{5}\right]^2 \cdot \left[\frac{4}{5}\right]^3$$

$$10 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{64}{125}$$

$$\text{Efetuando os cálculos, vem: } \frac{128}{625}$$

Exercícios



Nível 1

- 01) (ENEM)** O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

- a) $\frac{1}{3}$
 b) $\frac{1}{5}$
 c) $\frac{2}{5}$
 d) $\frac{5}{7}$
 e) $\frac{5}{14}$

- 02) (Modelo Enem)** Uma prova consta de 7 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada uma, e apenas uma correta. Se um aluno escolher como correta uma alternativa ao acaso em cada questão, a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente:

- a) 87%.
 b) 85%.
 c) 90%.
 d) 47%.
 e) 57%.



Nível 2

- 03) (Modelo Enem)** Um casal que pretende ter 5 filhos descobre, ao fazer certos exames, que determinada característica genética tem a probabilidade de um terço de ser transmitida a cada de seus futuros filhos. Nessas condições, a probabilidade de, exatamente, três dos cinco filhos possuírem essa característica é:

- a) exatamente 17%.
 b) maior que 15%.
 c) menor que 14%.
 d) exatamente 18%.
 e) exatamente 23%

- 04) (ENEM)** O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

- a) 0,02048.
 b) 0,08192.
 c) 0,24000.
 d) 0,40960.
 e) 0,49152.

- 05) (ENEM)** Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é

- a) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
 b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
 c) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
 d) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
 e) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.



Nível 3

06) (ENEM) Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos. Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

- a) $\frac{1}{16}$
- b) $\frac{3}{16}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{3}{8}$
- e) $\frac{1}{2}$

07) (ENEM) Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

- a) $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$
- b) $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$
- c) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$
- d) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$
- e) $\frac{2}{3^{10}}$

08) (ENEM) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

- a) $2 \times (0,2\%)^4$.
- b) $4 \times (0,2\%)^2$.
- c) $6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$.
- d) $4 \times (0,2\%)$.
- e) $6 \times (0,2\%) \times (99,8\%)$.

GABARITO – AULA 71

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1) d | 2) a | 3) b | 4) b | 5) e |
| 6) d | 7) a | 8) c | | |

VÍDEO AULA 72

Noções de Estatística

CLIQUE NO LINK ABAIXO E ASSISTA À VÍDEO AULA

AULA 72 – PARTE I



AULA 72 – PARTE II



1. Médias

Média Aritmética Simples

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{ou} \quad M_a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Média Aritmética Ponderada

$$M_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Média Geométrica

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Média Harmônica Simples

$$M_H = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Observações: $M_H \leq M_G \leq M_A$

Para dois números positivos, vale a seguinte igualdade:

$$M_H = \frac{(M_G)^2}{M_A}$$

2. Medidas de tendência central

Mediana

Dados n valores colocados em ordem crescente ou decrescente (rol), a mediana é o valor intermediário (se n é ímpar) ou a média aritmética (se n é par) dos valores intermediários.

- Caso o número n de elementos da amostra seja ímpar, a mediana ocupa a posição p onde $p = \frac{n+1}{2}$.
- Já se o número n de elemento da amostra seja par, a mediana é a média aritmética dos elementos que ocupam as posições $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$.

Moda

O elemento que ocorre com mais frequência dentre um conjunto de elementos é denominado moda.

Exemplo: Foram registradas as notas de 25 alunos de uma turma da escola APRENDA BEM.

7,0	7,5	6,0	7,5	7,5
7,5	9,0	3,5	9,0	4,5
8,0	9,0	4,0	10,0	6,0
6,5	8,0	4,5	10,0	7,5
6,5	7,5	5,5	7,5	7,5

A nota de maior frequência é 7,5 (apareceu 8 vezes). Dizemos com isso, que a moda dessa amostra é 7,5.

Observação: Um conjunto de elementos pode ter uma ou mais modas ou ainda, não possuir moda.

3. Medidas de Dispersão

Dois candidatos **A** e **B** disputam uma vaga para ingressar num concurso público. O critério para escolha do candidato é a maior média obtida em três provas com o mesmo peso. Após a resolução das provas cada aluno obteve as seguintes notas:

Candidato A	Candidato B
4	2
8	9
9	10
Média = 7	Média = 7

Observe que os dois candidatos obtiveram a mesma média. O critério de desempate do concurso consistia no candidato que fosse mais regular. Eis a questão!!! Que parâmetro pode ser utilizado para essa decisão? Estudaremos, agora, as chamadas medidas de dispersão usadas em estatística para quantificar o afastamento dos dados de uma amostra em relação a sua média aritmética.

Desvio

Denomina-se desvio a diferença entre um dos elementos de uma amostra e a média dessa amostra.

Exemplo:

O candidato **A** obteve as notas: 4, 8 e 9.

$$M_A = \frac{4 + 8 + 9}{3} = 7$$

Os desvios são:

$$4 - 7 = -3$$

$$8 - 7 = 1$$

$$9 - 7 = 2$$

Os valores -3 , 1 e 2 indicam o quanto cada valor da amostra se distancia da média da amostra. Dizemos que o elemento 4 está 3 valores abaixo da média, enquanto o elemento 8 está 1 valor acima da média.

Desvio Absoluto

Denomina-se desvio absoluto, o módulo da diferença entre um dos elementos de uma amostra e a média dessa amostra.

No caso anterior, temos:

$$|4 - 7| = 3$$

$$|8 - 7| = 1$$

$$|9 - 7| = 2$$

Desvio Médio

Desvio médio (d_m) é a média aritmética dos desvios absolutos.

Exemplo: Para a amostra 4, 8, 9, temos:

$$d_m = \frac{3 + 1 + 2}{3} = 2$$

Variância:

Denomina-se variância ao número v , média aritmética dos quadrados dos desvios dos elementos da amostra.

Exemplo:

O candidato A obteve as notas 4, 8, 9. Sua média aritmética é:

$$M_A = \frac{4 + 8 + 9}{3} = 7$$

e os desvios são:

$$4 - 7 = -3$$

$$8 - 7 = 1$$

$$9 - 7 = 2$$

Logo, a variância desse conjunto de dados é

$$v = \frac{(-3)^2 + 1^2 + 2^2}{3} = \frac{9 + 1 + 4}{3} \cong 4,67$$

Já o candidato B obteve as notas 2, 9 e 10. Sua média aritmética é

$$M_B = \frac{2 + 9 + 10}{3} = 7$$

e os desvios são:

$$2 - 7 = -5$$

$$9 - 7 = 2$$

$$10 - 7 = 3$$

Logo, a variância desse conjunto de dados é

$$v = \frac{(-5)^2 + 2^2 + 3^2}{3} = \frac{25 + 4 + 9}{3} \cong 12,67$$

Dentre os dois candidatos com mesma média, o que possui **menor variância** é aquele cujas notas estão mais próximas da média, ou seja, aquele cujas notas apresentam menos dispersão. No critério de desempate, estaria aprovado o candidato **A** (candidato mais regular).

Desvio Padrão

Desvio padrão (d_p) é a raiz quadrada da variância.

$$d_p = \sqrt{v}$$

Exemplo: No exemplo anterior:

Candidato A: $v \cong 4,67 \rightarrow d_p = \sqrt{4,67} \cong 2,16$

Candidato B: $v \cong 12,67 \rightarrow d_p = \sqrt{12,67} \cong 3,56$

O desvio padrão é muito usado em estatística pois conserva a unidade dos valores da amostra. Por exemplo, numa amostra onde as medidas são as alturas em *metros* dos alunos de uma escola, a variância teria unidade *metros quadrados*, enquanto o desvio padrão tem “*metros*” como unidade.

Exercícios



Nível 1

01) (Modelo Enem) Um aluno realizou cinco provas em uma disciplina, obtendo as notas: 10, 8, 6, x e 7. Sabe-se que a média aritmética simples destas notas é 8. Assinale qual a nota da prova representada por x.

- a) 6.
- b) 7.
- c) 8.
- d) 9.
- e) 10.

02) (ENEM) Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas. O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

- a) 18.
- b) 19.
- c) 22.
- d) 25.
- e) 26.

- 03) (ENEM) No final de uma matéria sobre sorte e azar publicada em uma revista, o leitor tem a opção de realizar um teste no qual ele deve responder a dez perguntas sobre cinco temas, sendo cinco sobre sorte e cinco sobre azar. Para cada pergunta, o leitor marca apenas uma alternativa dentre as seis opções de respostas, sendo que a alternativa escolhida está associada a uma nota entre os valores 1, 3, 5, 7, 8 e 9.

Um leitor respondeu ao teste, obtendo as notas de sorte e de azar para as perguntas e representou-as no Quadro 1.

Quadro 1

	Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5
Sorte	1	3	9	7	7
Azar	8	5	5	5	9

O resultado do teste x é calculado como sendo a diferença entre as médias aritméticas das notas de sorte e de azar, nessa ordem. A classificação desse resultado é dada de acordo com o Quadro 2.

Quadro 2

	Resultado
Você é muito azarado	$x \leq -4$
Você é azarado	$-4 < x < -1$
Você está na média	$-1 \leq x \leq 1$
Você é sortudo	$1 < x < 4$
Você é muito sortudo	$x \geq 4$

De acordo com os dados apresentados, a classificação do resultado do teste desse leitor é

- "Você é azarado".
- "Você é sortudo".
- "Você é muito azarado".
- "Você é muito sortudo".
- "Você está na média".



Nível 2

- 04) (ENEM) No quadro estão representadas as quantidades de certos tipos de vinho vendidos durante um ano e o lucro por unidade vendida de cada um desses tipos. Para repor seu estoque, o proprietário escolherá apenas os tipos de vinho em que o lucro total com sua venda foi maior do que a média entre os lucros obtidos com a venda de todos os tipos.

Tipo de vinho	I	II	III	IV	V	VI
Unidades vendidas	120	50	71	47	70	90
Lucro por unidade (R\$)	6,00	12,00	10,00	20,00	5,00	12,00

Conforme condições estabelecidas, os tipos de vinhos escolhidos serão

- I e VI.
- IV e VI.
- I, IV e VI.
- II, IV e VI.
- II, III, IV e VI.

- 05) (ENEM) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

- 17°C, 17°C e 13,5°C
- 17°C, 18°C e 13,5°C
- 17°C, 13,5°C e 18°C
- 17°C, 18°C e 21,5°C.
- 17°C, 13,5°C e 21,5°C.

- 06) (ENEM) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no ultimo campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

- a) $X = Y < Z$.
 b) $Z < X = Y$.
 c) $Y < Z < X$.
 d) $Z < X < Y$.
 e) $Z < Y < X$.

- 07) (ENEM) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
 b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
 c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português
 d) Paulo, pois obteve maior mediana.
 e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.



Nível 3

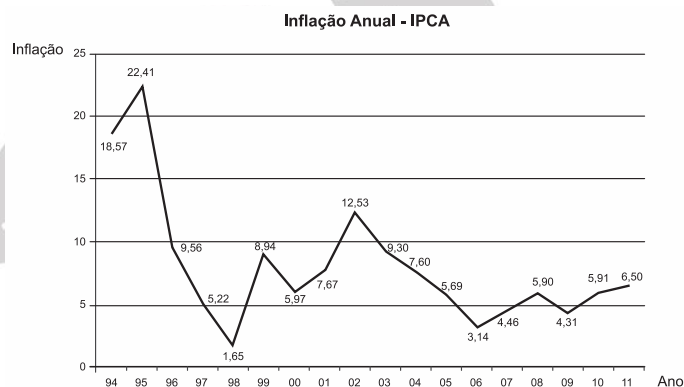
- 08) (ENEM) Passar trote nos telefones de emergência da Polícia Militar, Corpo de Bombeiros e Serviço de Atendimento Móvel de Urgência (Samu) pode resultar em multa para o dono do telefone de onde partiu a ligação. Para exemplificar a seriedade dessa questão, em uma cidade brasileira, um jornal local publicou a tabela a seguir, mostrando o número de trotes telefônicos recebidos pelos bombeiros da cidade, ao longo de um semestre.

Meses	Trotes
Jan	18
Fev	20
Mar	30
Abr	16
Mai	14
Jun	16

Qual o valor mediano da quantidade de trotes recebidos nesse semestre?

- a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 23

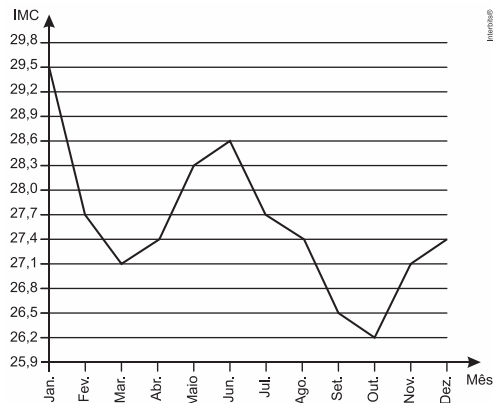
- 09) (ENEM) Um dos principais indicadores de inflação é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O gráfico apresenta os valores do IPCA nos anos de 1994 a 2011.



O valor mais próximo da mediana de todos os valores da inflação indicados no gráfico é

- a) 5,97.
 b) 6,24.
 c) 6,50.
 d) 8,07.
 e) 10,10.

- 10) (ENEM) O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa é definido como o quociente entre a massa dessa pessoa, medida em quilograma, e o quadrado da sua altura, medida em metro. Esse índice é usado como parâmetro para verificar se indivíduo está ou não acima do peso ideal para a sua altura. Durante o ano de 2011, uma pessoa foi acompanhada por um nutricionista e passou por um processo de reeducação alimentar. O gráfico indica a variação mensal do IMC dessa pessoa, durante o referido período. Para avaliar o sucesso do tratamento, o nutricionista vai analisar as medidas estatísticas referentes à variação do IMC.



De acordo com o gráfico, podemos concluir que a mediana da variação mensal do IMC dessa pessoa é igual a

- a) 27,40. b) 27,55. c) 27,70. d) 28,15. e) 28,45.

GABARITO – AULA 72

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1) d | 2) a | 3) e | 4) b | 5) b |
| 6) e | 7) b | 8) b | 9) b | 10) a |