www.ricardinhomatematicax.com.br

AULA 15

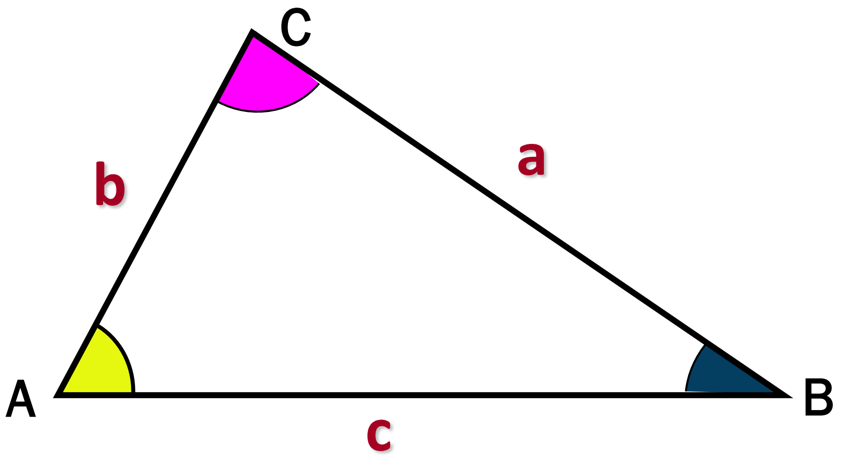
Trigonometria no triângulo qualquer

ASSISTA À AULA

Professor Ricardinho

Matemática – Frente B

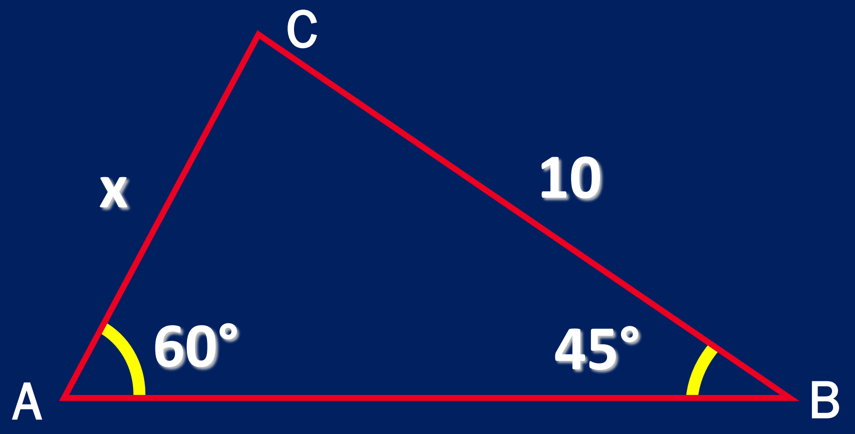
Trigonometria no triângulo qualquer



LEI DOS SENOS 2L e 2 âng

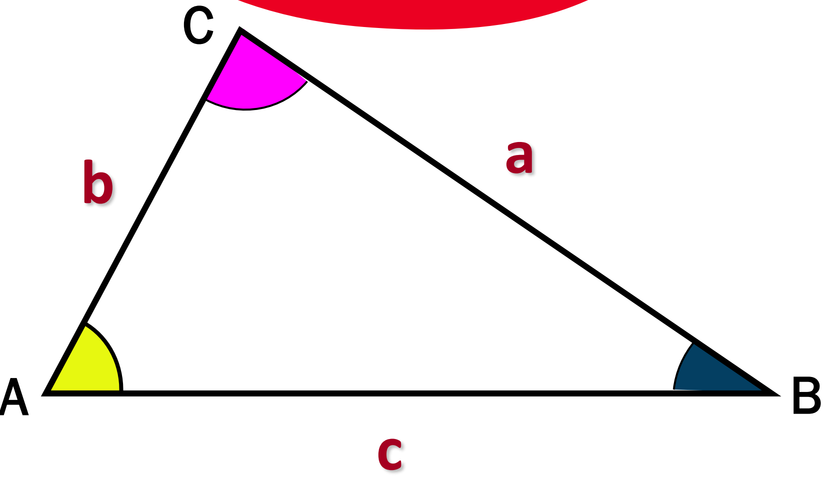
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Exemplo 1:



MATEMÁTICA X

Trigonometria no triângulo qualquer



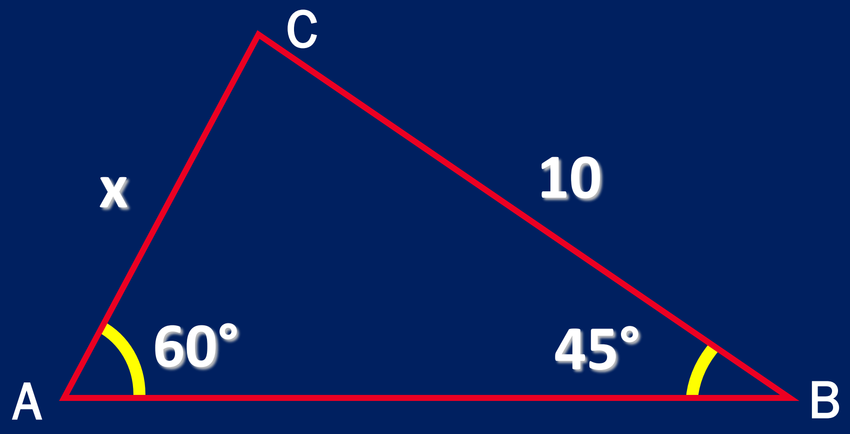
LEI DOS SENOS 2L e 2 âng

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}}$$

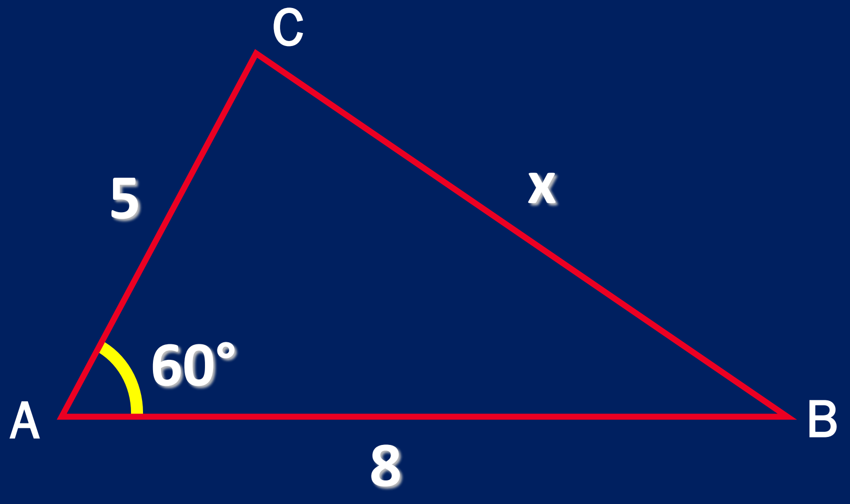
LEI DOS COSSENOS 3L e 1 âng

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\,(\cos A)}$$

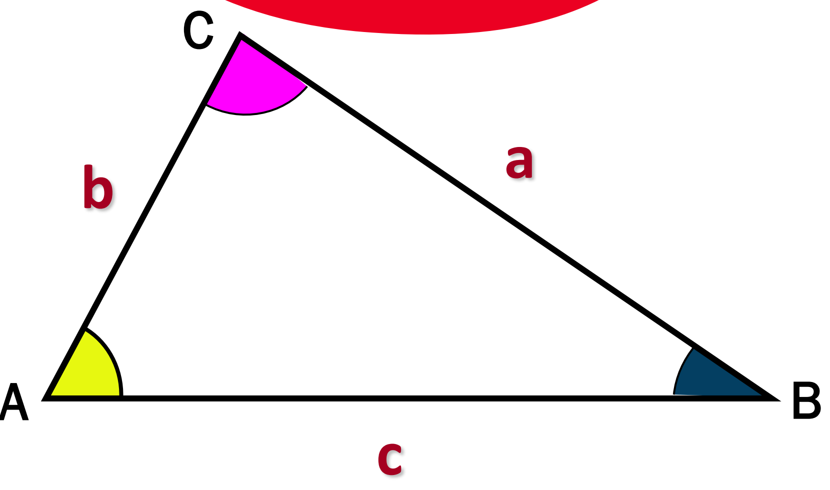
Exemplo 1:



Exemplo 2:



Trigonometria no triângulo qualquer



LEI DOS SENOS 2L e 2 âng

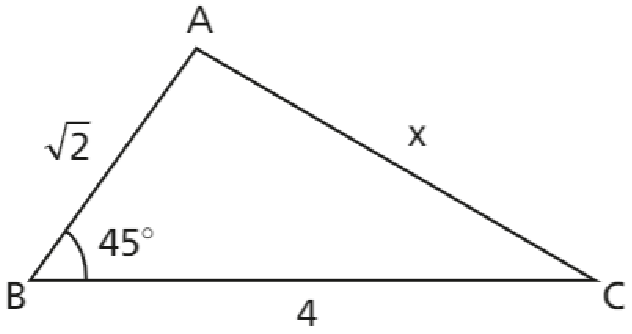
$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

LEI DOS COSSENOS 3L e 1 âng

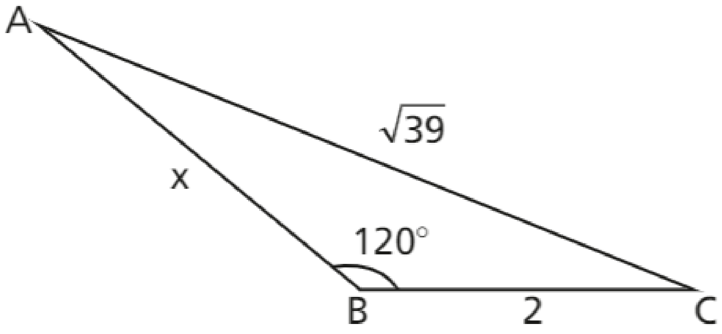
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\,(\cos A)$$

1. Em cada um dos triângulos a seguir, obtenha a medida **x** do segmento indicado:

a)

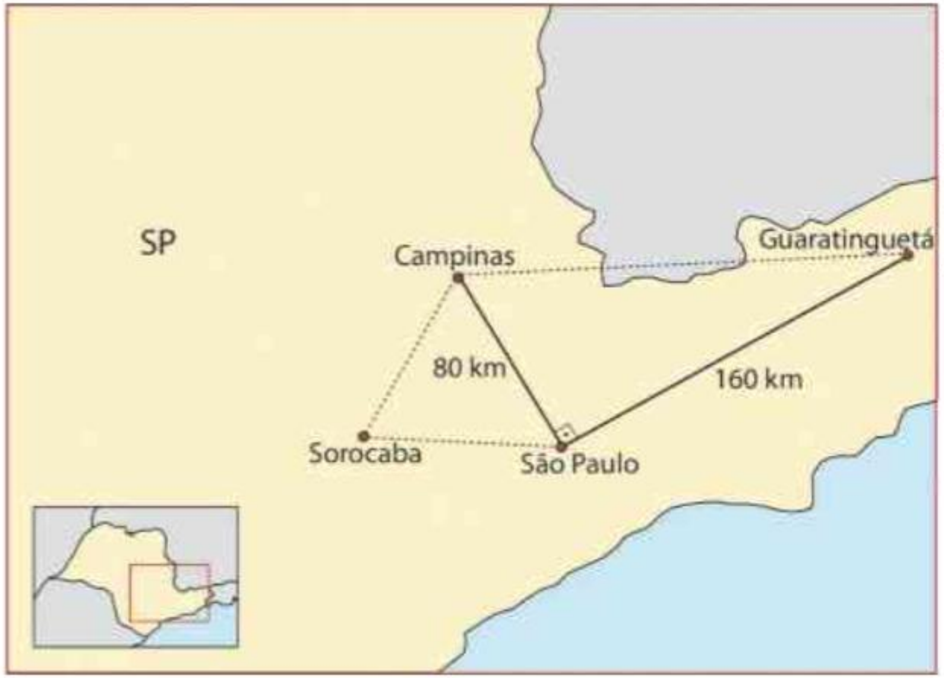


b)



MATEMÁTICA X

2. (Unesp) Um professor de Geografia forneceu a seus alunos um mapa do estado de São Paulo, que informava que as distâncias aproximadas em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Campinas e entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Guaratinguetá eram, respectivamente, 80 km e 160 km. Um dos alunos observou, então, que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Campinas e Sorocaba formavam um triângulo equilátero. Já um outro aluno notou que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Guaratinguetá e Campinas formavam um triângulo retângulo, conforme mostra o mapa.



Com essas informações, os alunos determinaram que a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km, é próxima de

a) $80 \cdot \sqrt{2 + 5 \cdot \sqrt{3}}$

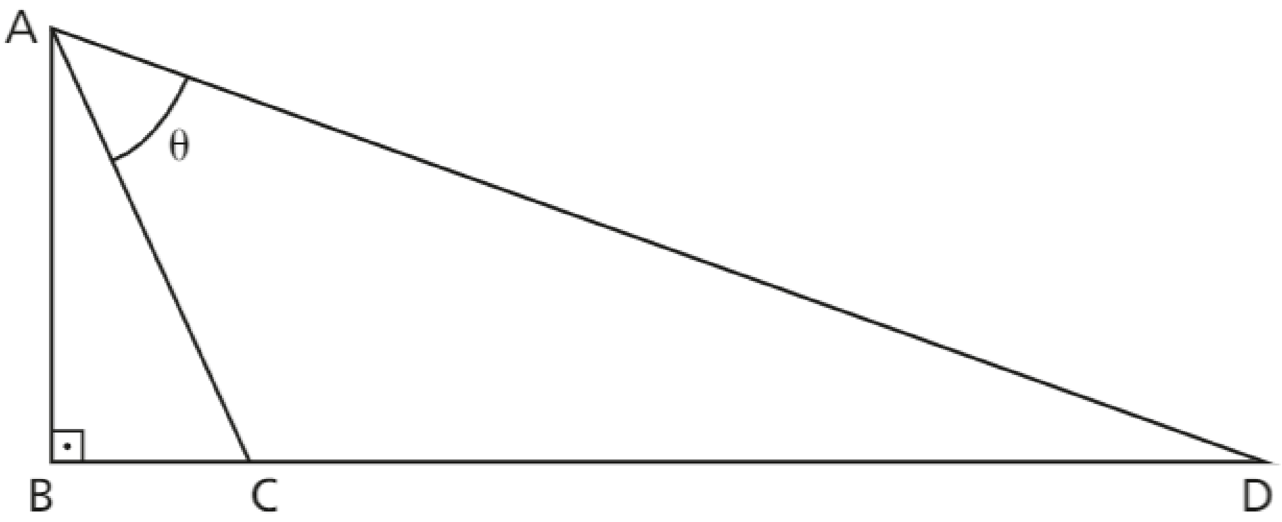
b) $80 \cdot \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{3}}$

c) $80 \cdot \sqrt{6}$

d) $80 \cdot \sqrt{5 + 3 \cdot \sqrt{2}}$

e) $80 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{3}}$

3. (Unicamp-SP) Considere o triângulo retângulo ABD exibido na figura abaixo, em que AB = 2 cm, BC = 1 cm e CD = 5 cm. Então, o ângulo θ é igual a



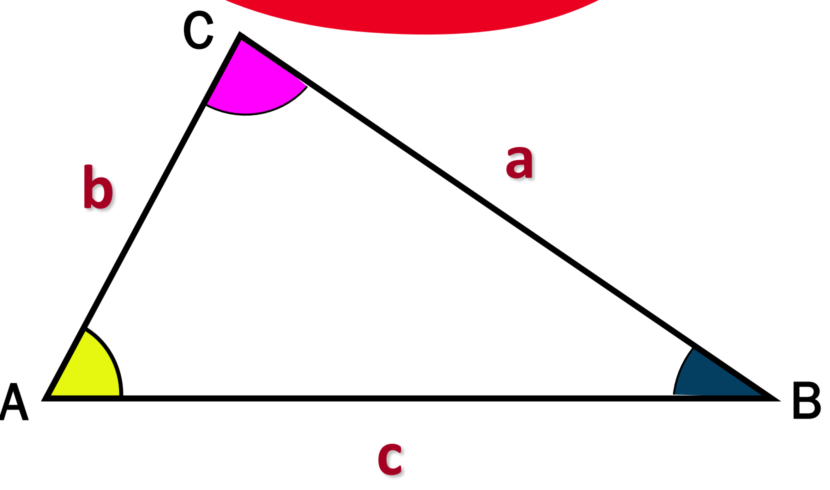
a) 15°

b) 30°

c) 45°

d) 60°

Trigonometria no triângulo qualquer



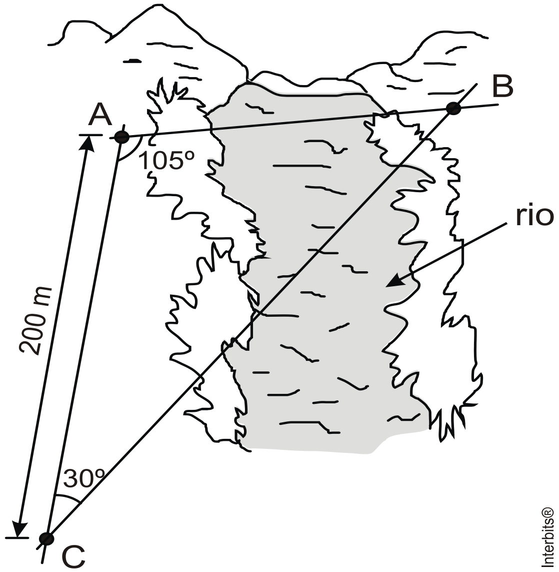
LEI DOS SENOS 2L e 2 âng

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

LEI DOS COSSENOS 3L e 1 âng

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\,(\cos A)$$

A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante **200*m*** do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos BCA e CAB mediam, respectivamente, **30°** e **105°**, conforme ilustrado na figura a seguir.



Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

www.ricardinhomatematicax.com.br

AULA 16

Polígonos regulares

ASSISTA À AULA

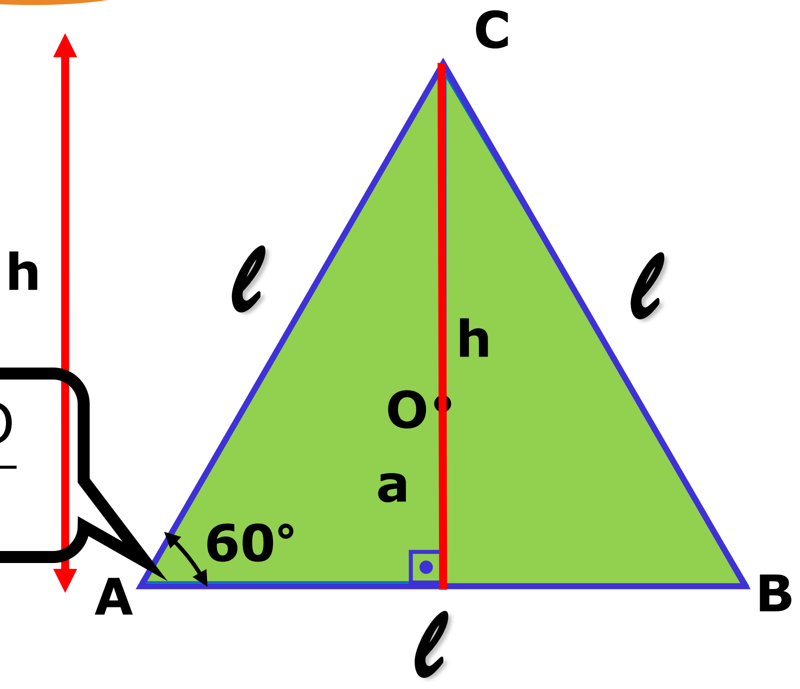
Professor Ricardinho

Matemática – Frente B

Polígonos Regulares

Triângulo equilátero

$$\text{sen}\alpha = \frac{C.O}{H}$$



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{1}{3}h$$

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{sen}60^\circ = \frac{h}{\ell}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{\ell}$$

$$\boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

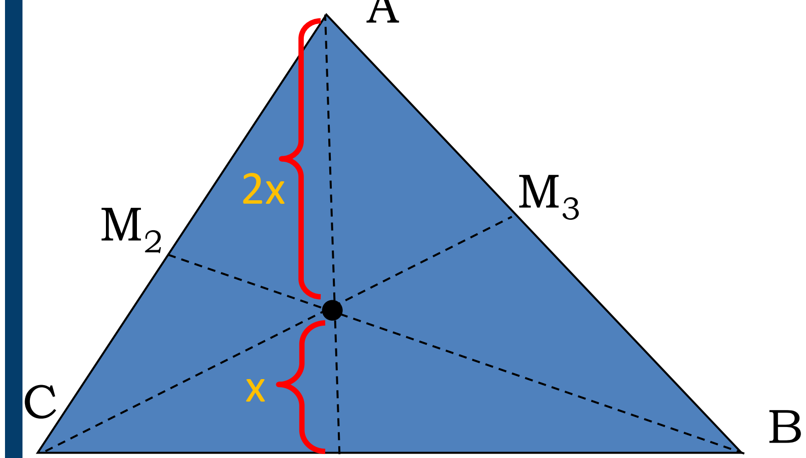
apótema

$$\boxed{a = \frac{1}{3}h}$$

$$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{\Delta eq} = \frac{\ell \times \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}$$

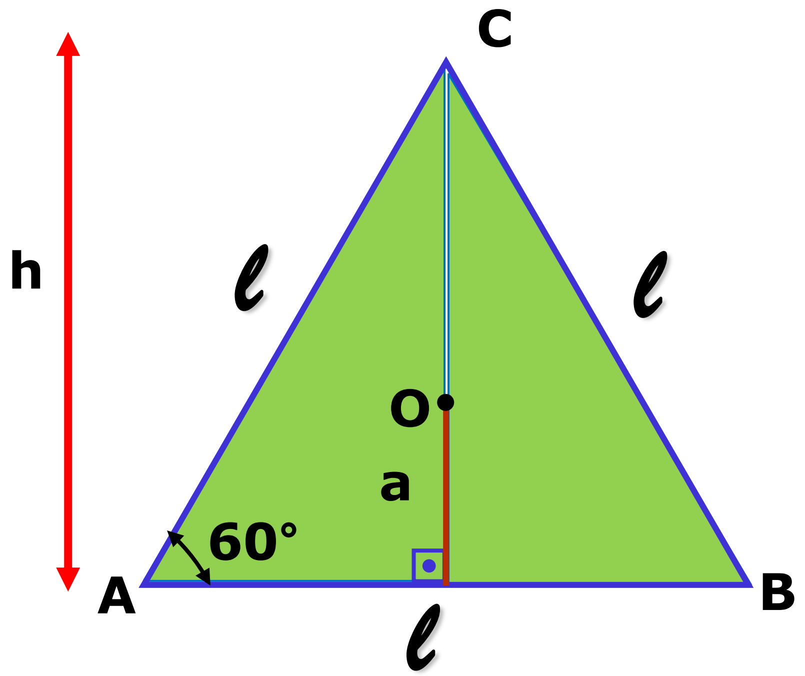
$$\boxed{A_{\Delta eq} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$



$$\boxed{x = \frac{1}{3}h}$$

Polígonos Regulares

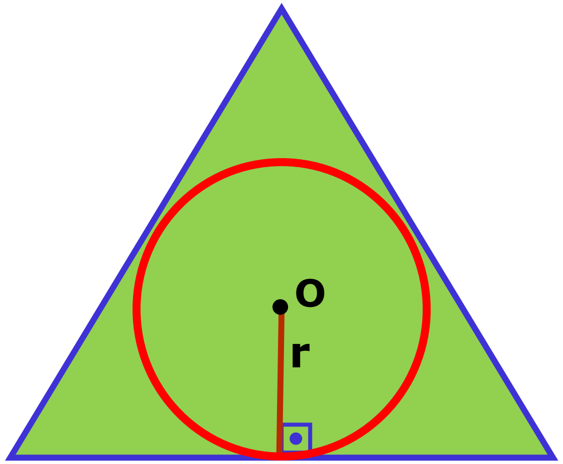
Triângulo equilátero



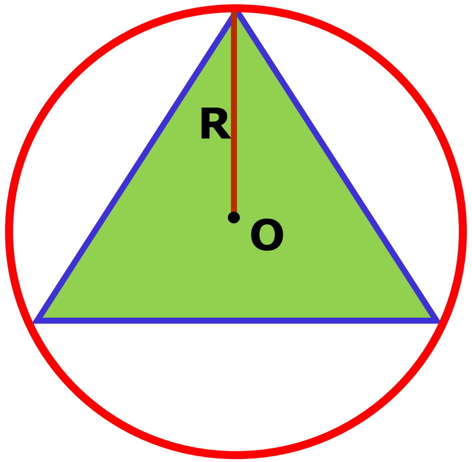
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{1}{3}h$$

$$A_{\Delta eq} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$



$$r = \frac{1}{3}h$$



$$R = \frac{2}{3}h$$

Polígonos Regulares

Triângulo equilátero

Área

$$\frac{\ell^{2}\sqrt{3}}{4}$$

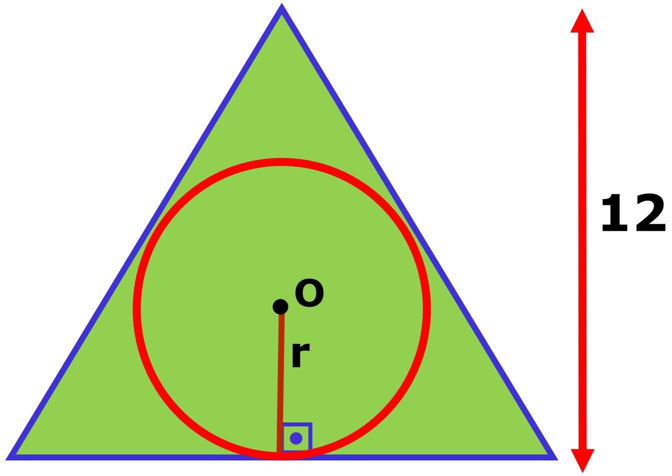
Altura

$$\frac{\ell^{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}}$$

$$\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Polígonos Regulares
Triângulo equilátero

Determine a área de um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência de raio 4cm:



$$\boxed{r=\frac{1}{3}h} \Rightarrow 4=\frac{1}{3}h \Rightarrow \boxed{h=12\text{cm}}$$

$$\boxed{h=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

$$12=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$24=\ell\sqrt{3}$$

$$\frac{24}{\sqrt{3}}=\ell$$

$$\boxed{\ell=8\sqrt{3}\text{cm}}$$

$$\boxed{A_{\Delta eq}=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$A=\frac{\left(8\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

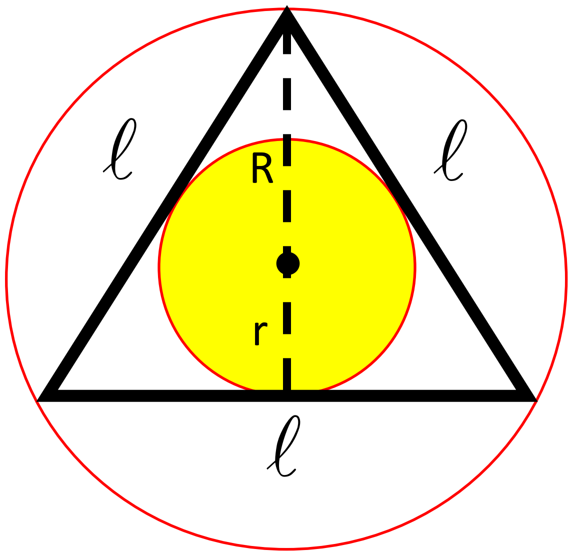
$$A=\frac{64.3\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{A_{\Delta eq}=48\sqrt{3}\,\text{cm}^2}$$

$$\frac{24}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$(a.b)^n=a^n.b^n$$

TRIÂNGULO EQUILÁTERO



$$h=\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

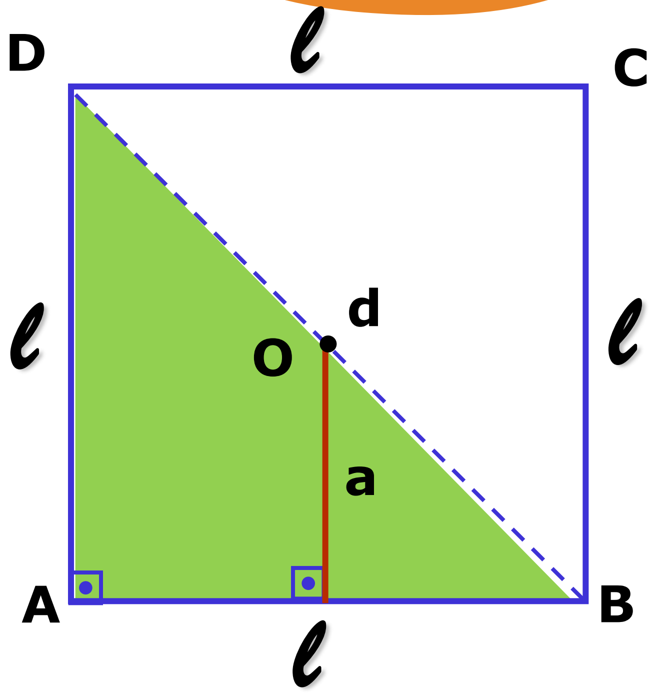
$$r=\frac{1}{3}h$$

$$A=\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R=\frac{2}{3}h$$

MATEMÁTICA

Polígonos Regulares
Quadrado



diagonal

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2$$

$$d = \sqrt{2\ell^2}$$

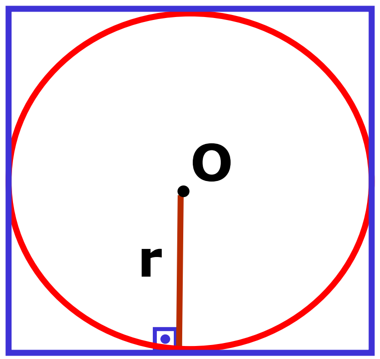
$$\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

apótema

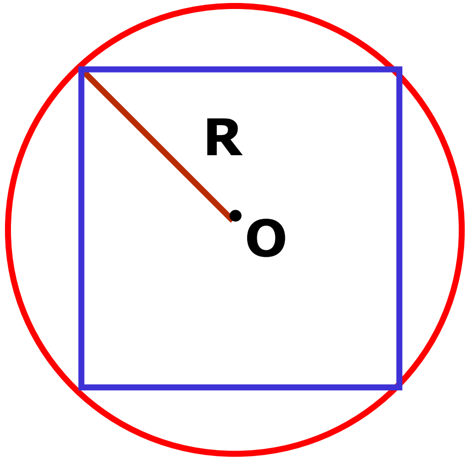
$$2a = \ell$$

$$a = \frac{\ell}{2}$$

$$\boxed{d = \ell\sqrt{2}} \quad \boxed{a = \frac{\ell}{2}} \quad \boxed{A = \ell^2}$$



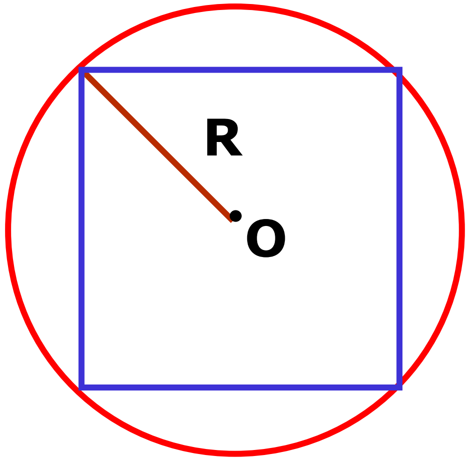
$$\boxed{r = a = \frac{\ell}{2}}$$



$$\boxed{R = \frac{d}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}}$$

Polígonos Regulares
Quadrado

O comprimento da circunferência circunscrita a um quadrado é 32π cm. Determine a área do quadrado.



$$\boxed{C = 2\pi R}$$

$$32\pi = 2\pi R$$

$$32\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi}R$$

$$\boxed{R = 16cm}$$

$$\boxed{R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}}$$

$$16 = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

$$32 = \ell\sqrt{2}$$

$$\boxed{\ell = 16\sqrt{2}}$$

$$\boxed{A = \ell^2}$$

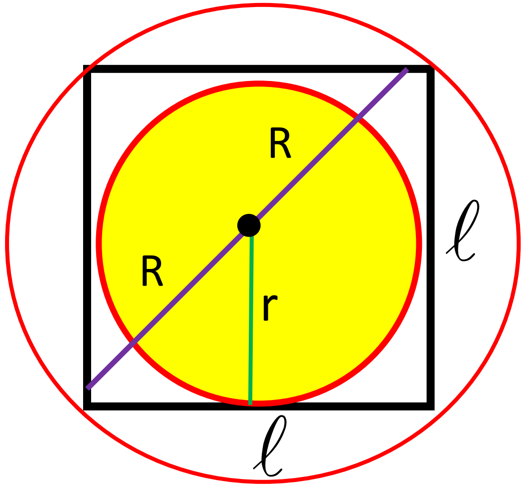
$$A = \left(16\sqrt{2}\right)^2$$

$$A = 256.2$$

$$\boxed{A = 512\,cm^2}$$

$$\frac{32}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{32\sqrt{2}}{2}$$

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$



$$A = \ell^2$$

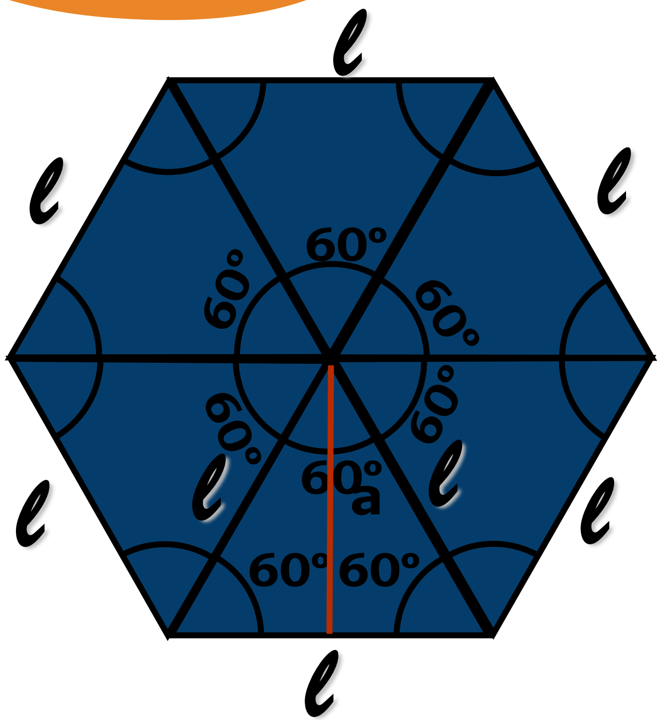
$$r = \frac{\ell}{2}$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

MATEMÁTICA X

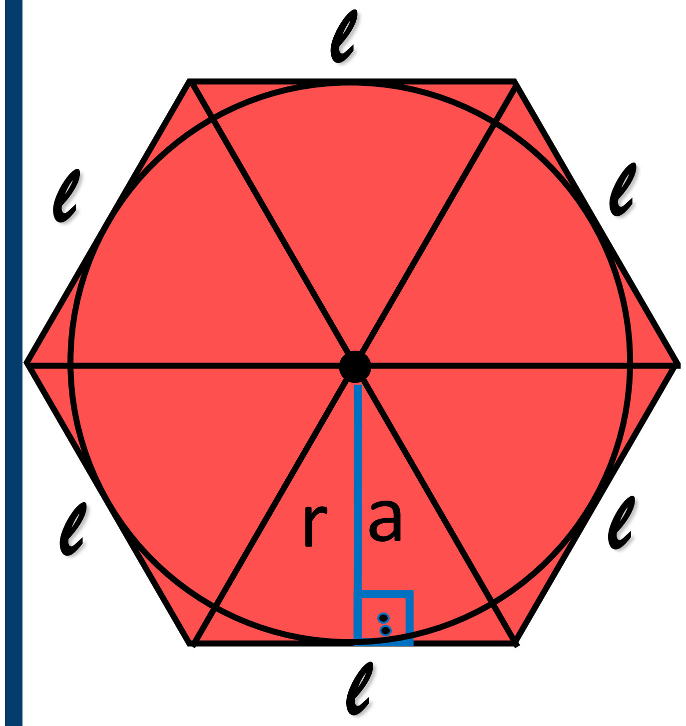
Polígonos Regulares
Hexágono Regular



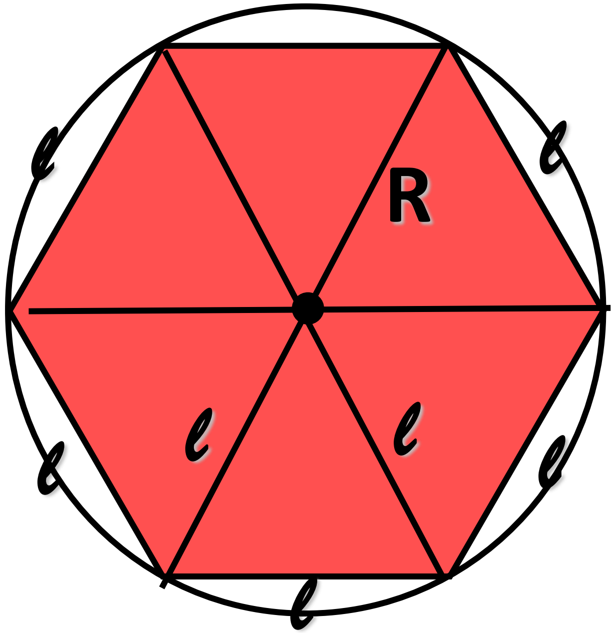
$$A_{\Delta eq} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{HEX} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\ell\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$



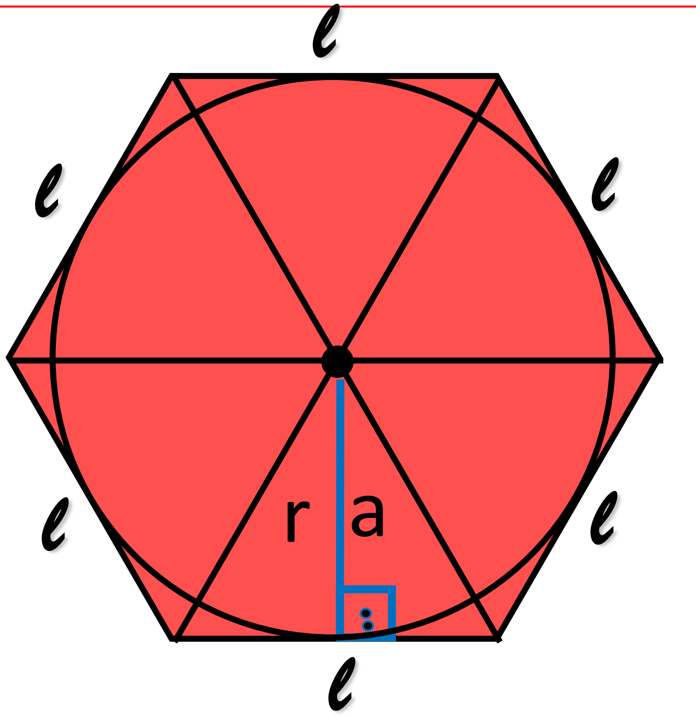
$$r = a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



$$R = \ell$$

Polígonos Regulares
Hexágono Regular

Determine o raio da circunferência inscrita (apótema) no hexágono regular, sabendo que a área do hexágono é $36\sqrt{3}$ cm².



$$\sqrt{24} = \sqrt{2^2.2.3} = 2\sqrt{6}$$

$$\boxed{A_{HEX} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4}}$$

$$36\sqrt{3} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$36\cancel{\sqrt{3}} = \frac{6\ell^2\cancel{\sqrt{3}}}{4}$$

$$144 = 6\ell^2$$

$$24 = \ell^2$$

$$\sqrt{24} = \ell$$

$$\ell = 2\sqrt{6}$$

$$\boxed{r = a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

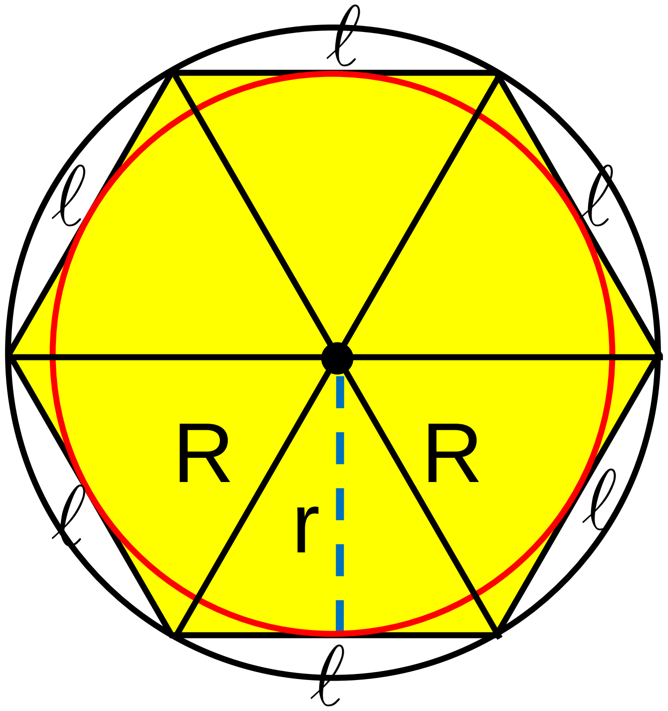
$$r = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{18}$$

$$r = \sqrt{2.3^2}$$

$$\boxed{r = 3\sqrt{2}\,\text{cm}}$$

HEXÁGONO REGULAR



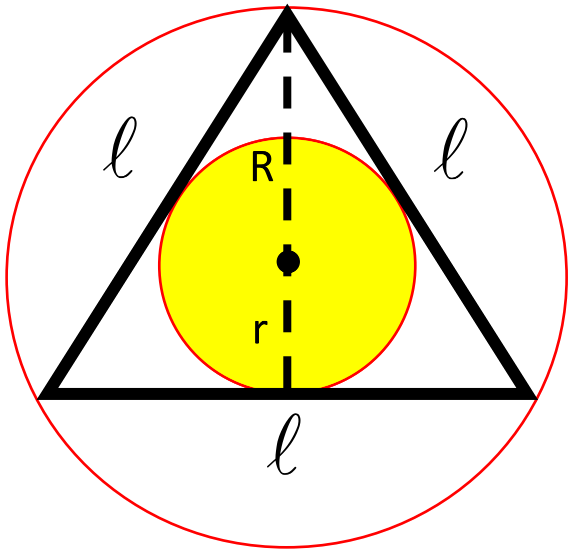
$$A = \frac{6.\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \ell$$

Polígonos Regulares

TRIÂNGULO EQUILÁTERO



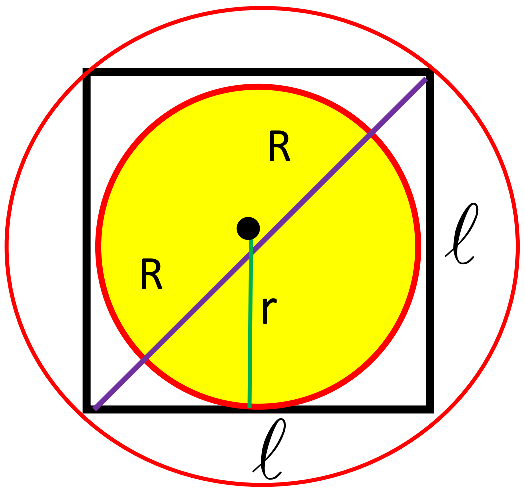
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

QUADRADO



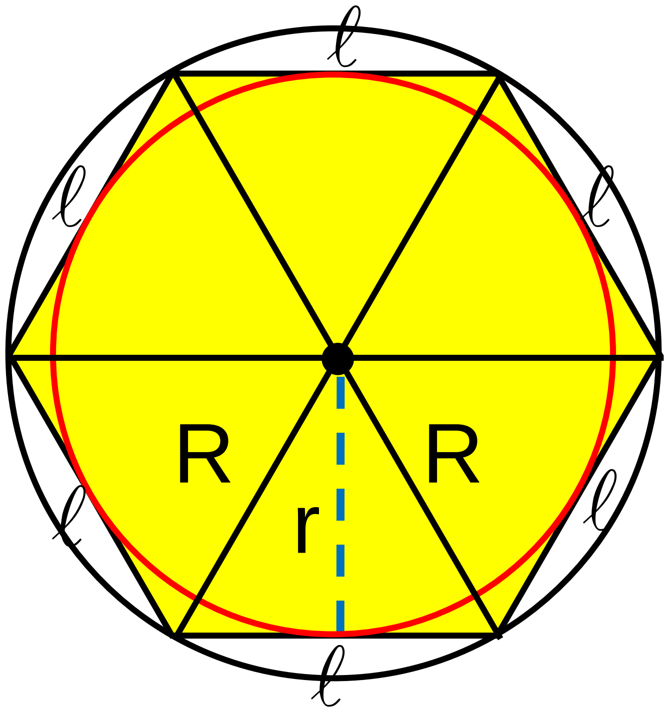
$$A = \ell^2$$

$$r = \frac{\ell}{2}$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

HEXÁGONO REGULAR



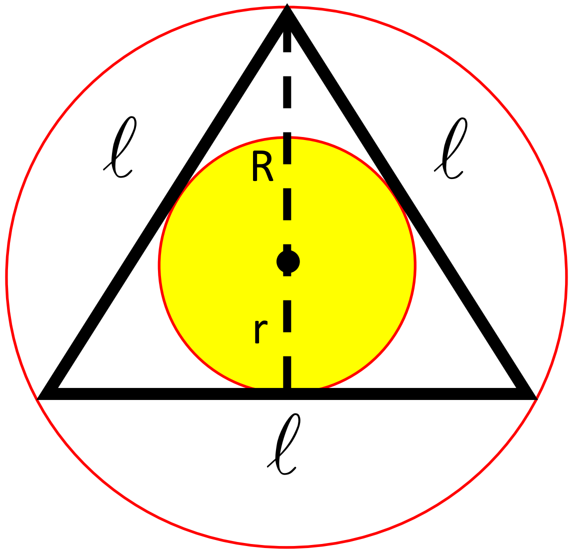
$$A = \frac{6.\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \ell$$

Polígonos Regulares

TRIÂNGULO EQUILÁTERO



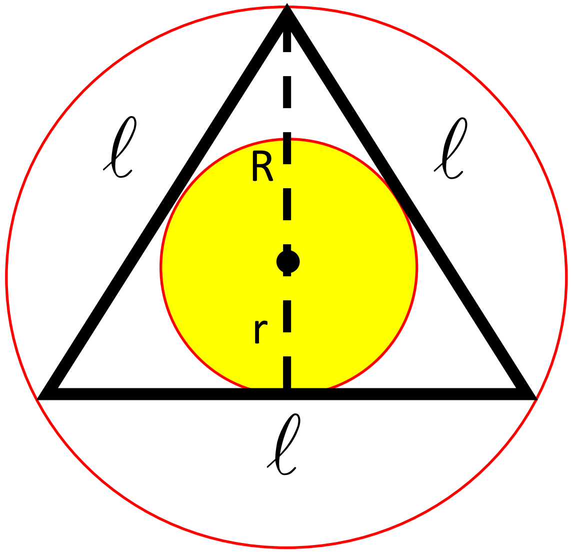
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

TRIÂNGULO EQUILÁTERO



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

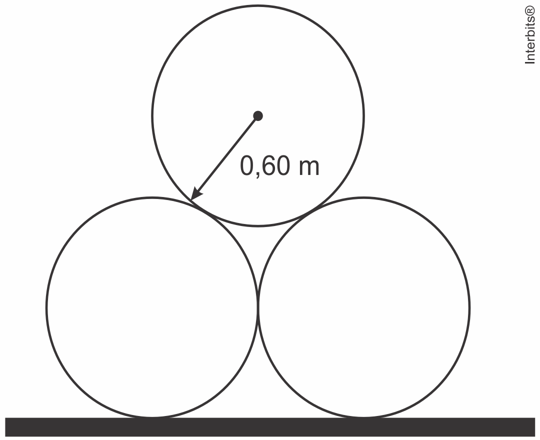
$$R = \frac{2}{3}h$$

A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja **0,60 m** e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a **1,30 m** do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, **0,50m** menor do que a altura do vão do viaduto. Considere **1,7** como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

Resposta: 4,02 m

www.ricardinhomatematicax.com.br

AULA 17

Áreas - Triângulos

ASSISTA À AULA

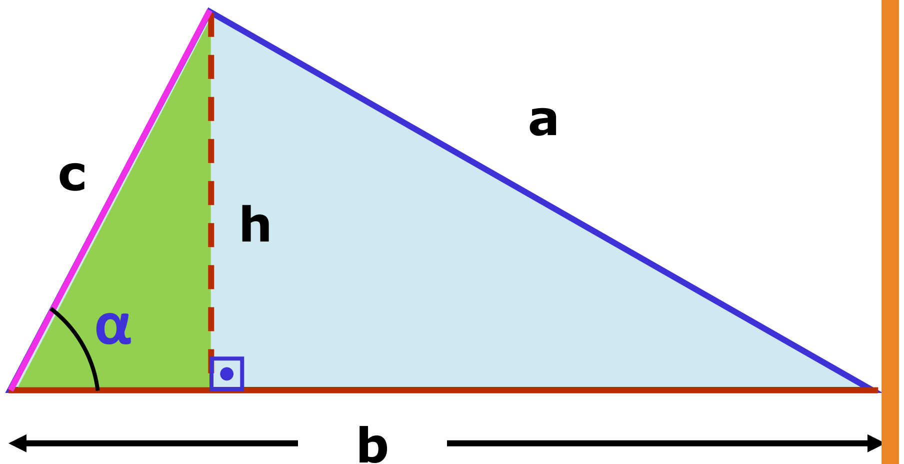
MATEMÁTICA X

Professor Ricardinho

Matemática – Frente B

Área de triângulo

TRIÂNGULOS - EXPRESSÕES



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{c}$$

$$\Rightarrow h = c.\ \text{sen}\ \alpha$$

$$A = \frac{b\ .\ h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{b\ .\ c\ .\ \text{sen}\ \alpha}{2}}$$

Conhecendo a medida da base e da altura

$$\boxed{A = \frac{b.h}{2}}$$

Conhecendo a medida dos lados

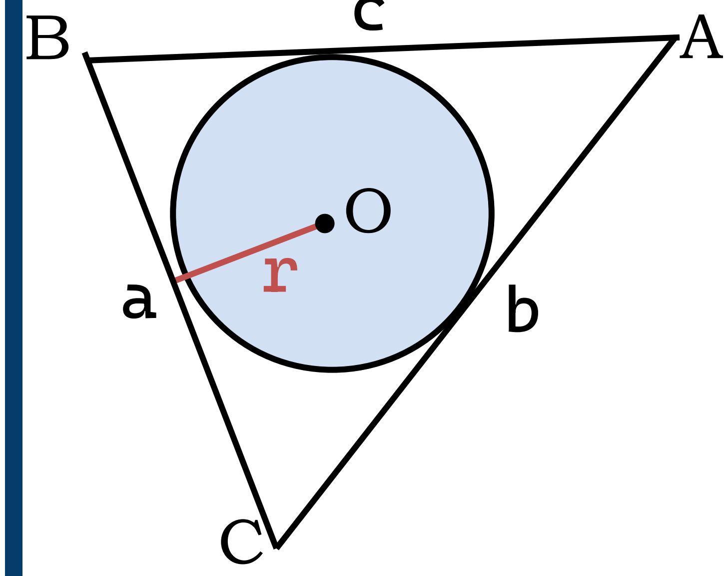
$$\boxed{A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Conhecendo a medida de dois lados e do ângulo entre eles

$$\boxed{A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\alpha}$$

Conhecendo a medida do raio da circunferência inscrita



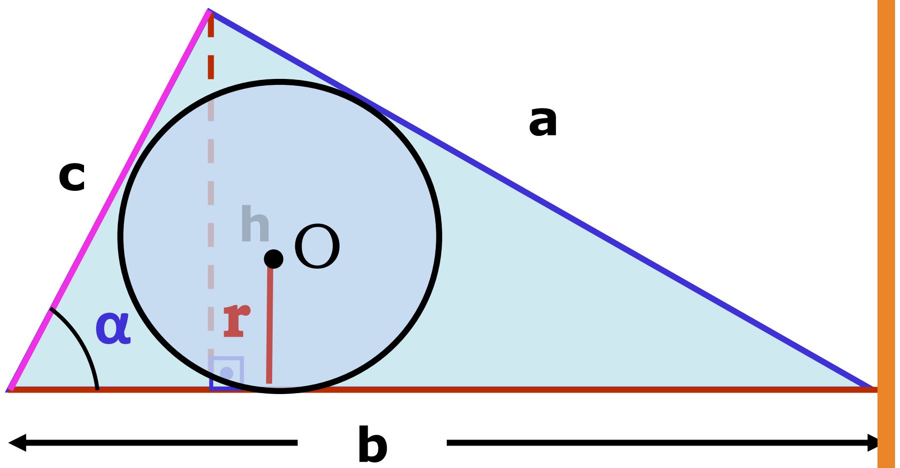
$$\boxed{A = p.r}$$

S p a

Àrea semiperímetro apótema

Área de triângulo

TRIÂNGULOS - EXPRESSÕES



$$A = \frac{b.h}{2}$$

$$A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\alpha$$

$$A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)} \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

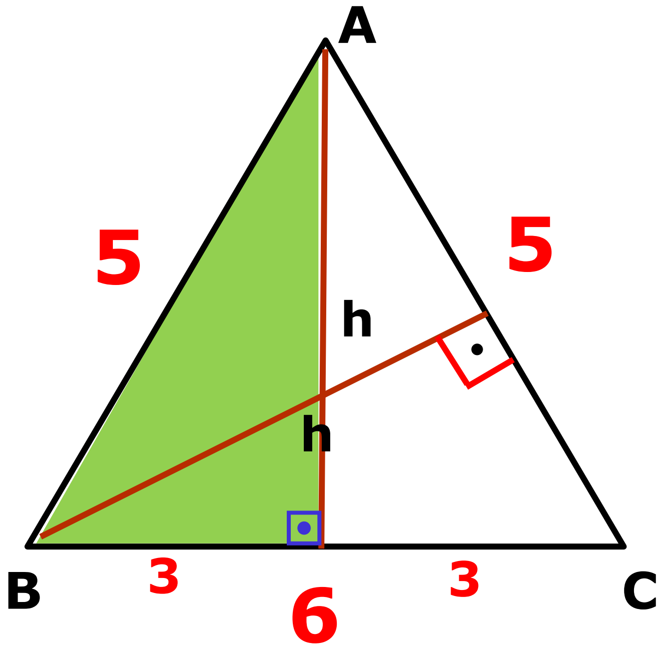
$$A = p.r$$

EXERCÍCIO 1:

Seja ABC um triângulo isósceles onde AB = AC = 5cm e BC = 6cm. Determine:

a) A área desse triângulo

b) A altura relativa ao lado AC



$$5^2 = 3^2 + h^2$$

$$h = 4\,\text{cm}$$

$$A = \frac{b.h}{2}$$

$$A = \frac{6.h}{2}$$

$$A = \frac{6.}{2}$$

$$\boxed{A = 12\,\text{cm}^2}$$

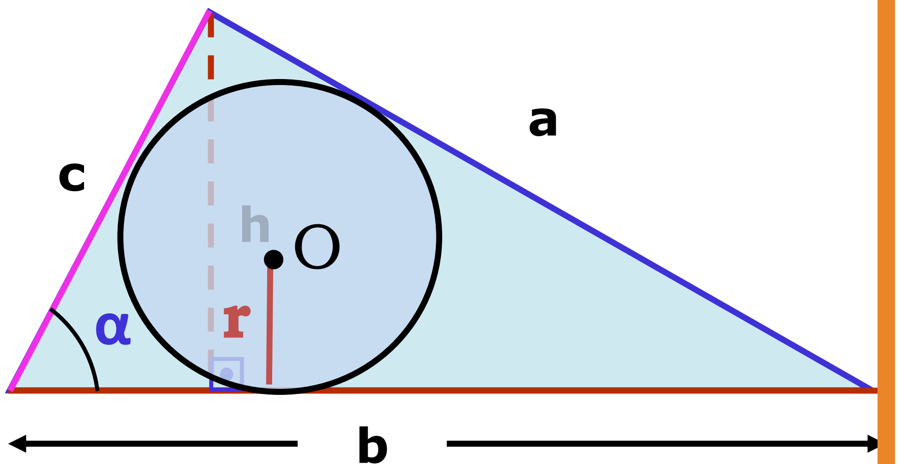
$$A = \frac{b.h}{2}$$

$$12 = \frac{5.h}{2}$$

$$\boxed{h = 4,8\,\text{cm}}$$

Área de triângulo

TRIÂNGULOS - EXPRESSÕES



$$A = \frac{b.h}{2}$$

$$A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\alpha$$

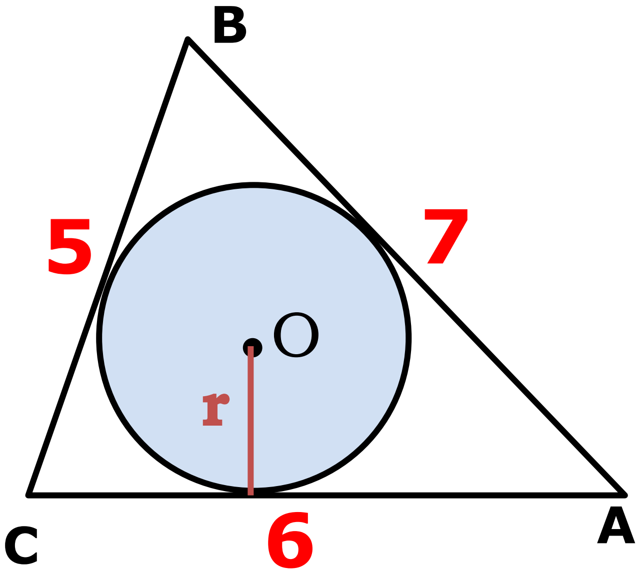
$$A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)} \qquad p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = p.r$$

EXERCÍCIO 2:

Seja um triângulo de lados a = 5cm, b = 6cm e c = 7cm. Determine:

a) A área do triângulo.
b) O raio da circunferência inscrita no triângulo.



$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$A = \sqrt{\ \ (\ \ -5).(\ \ -6).(\ \ -7)}$$

$$A = \sqrt{9.4.3.2}$$

$$\boxed{A = 6\sqrt{6}\,cm^2}$$

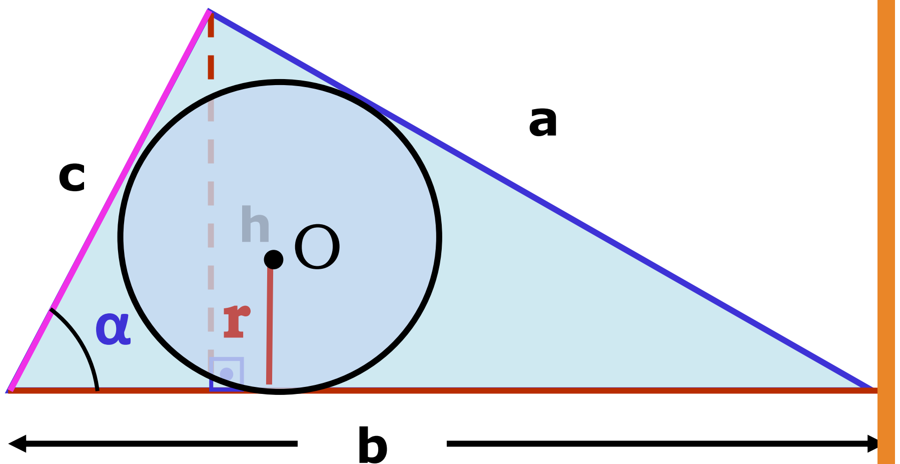
$$A = p.r$$

$$6\sqrt{6} = 9.r$$

$$r = \frac{6\sqrt{6}}{9} \Rightarrow \boxed{r = \frac{2\sqrt{6}}{3}cm}$$

Área de triângulo

TRIÂNGULOS - EXPRESSÕES



$$A = \frac{b.h}{2}$$

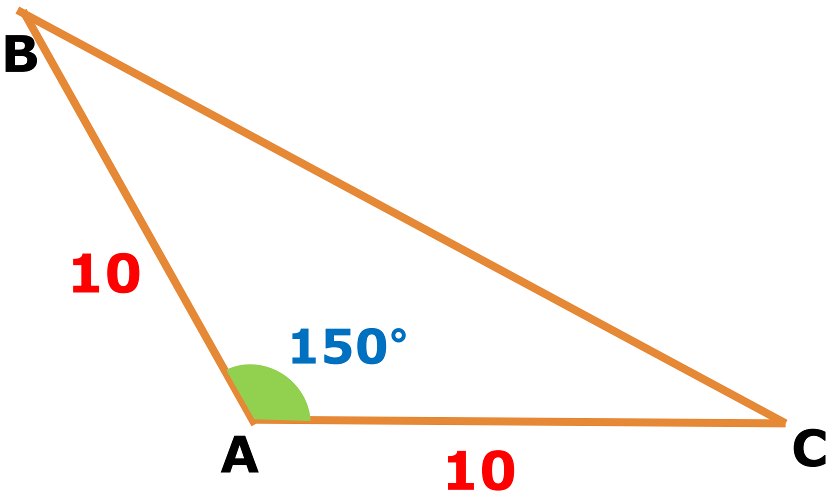
$$A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\alpha$$

$$A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$$ $$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = p.r$$

EXERCÍCIO 3:

Num triângulo isósceles, os lados de mesma medida medem 10cm e o ângulo formado por eles mede 150°. A área desse triângulo é



$$A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\alpha$$

$$A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\alpha$$

$$A = \frac{10.10}{2}.\text{sen}150°$$

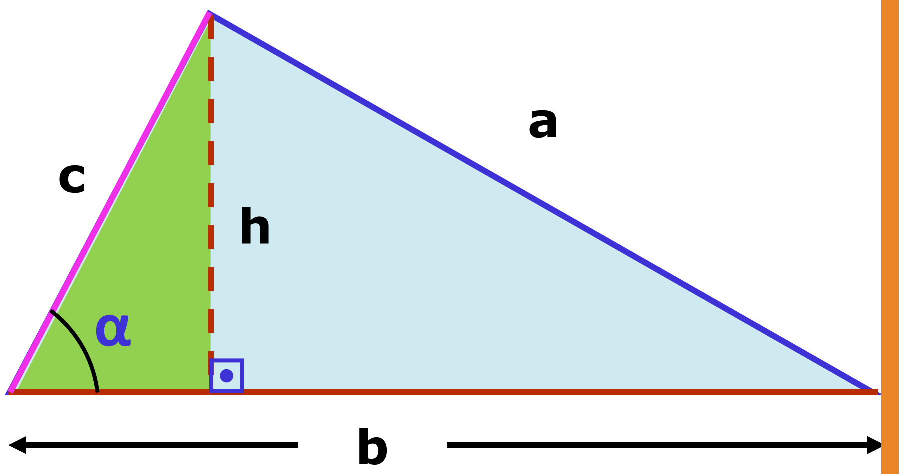
$$A = 50.$$

$$A = 25\,cm^2$$

$$\text{sen}150° = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$$

Área de triângulo

TRIÂNGULOS - EXPRESSÕES



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{c}$$

$$\Rightarrow\ h = c.\ \text{sen}\ \alpha$$

$$A = \frac{b\ .\ h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{b\ .\ c\ .\ \text{sen}\ \alpha}{2}}$$

Conhecendo a medida da base e da altura

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Conhecendo a medida dos lados

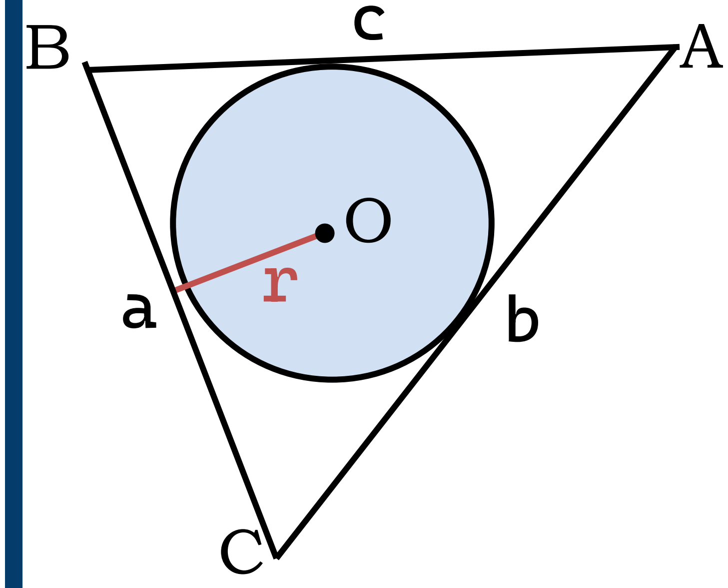
$$A = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Conhecendo a medida de dois lados e do ângulo entre eles

$$A = \frac{b.c}{2}.\text{sen}\,\alpha$$

Conhecendo a medida do raio da circunferência inscrita



$$A = p.r$$

S p a

Àrea semiperímetro apótema

AULA 18

Áreas - Quadriláteros

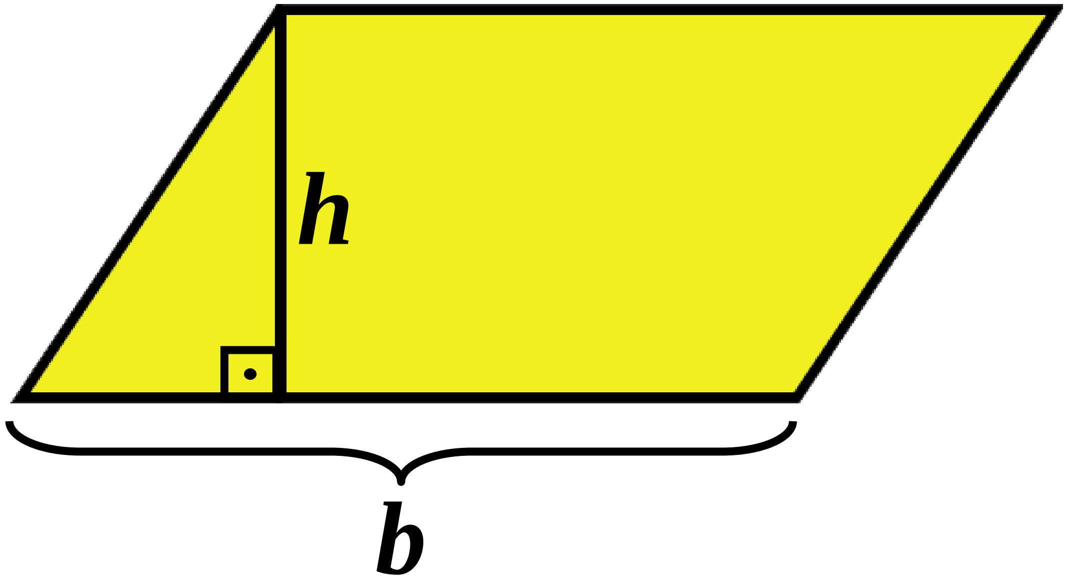
ASSISTA À AULA

Professor Ricardinho

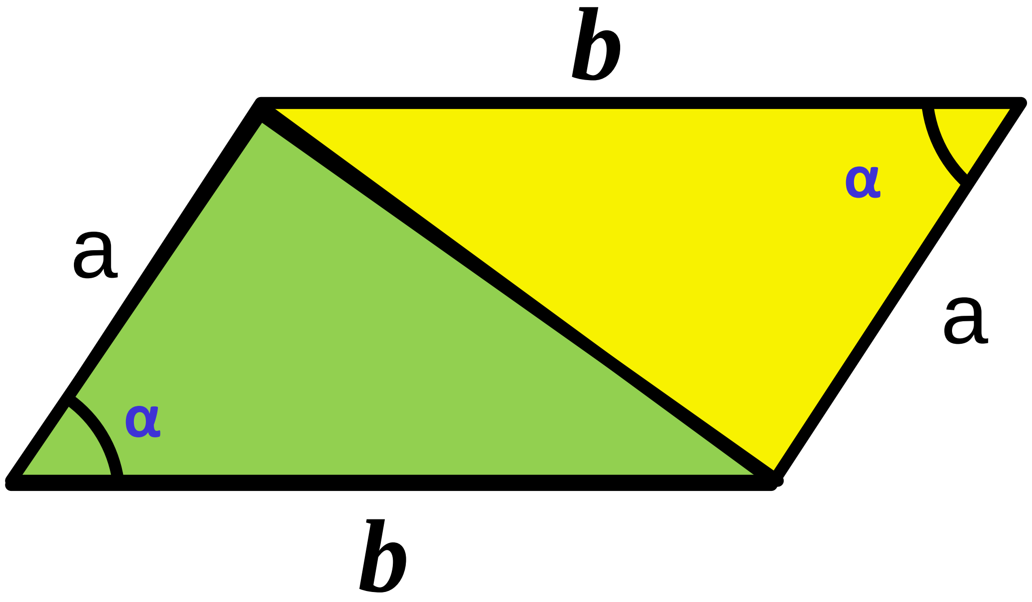
Matemática – Frente B

Área de quadriláteros

Paralelogramo



h



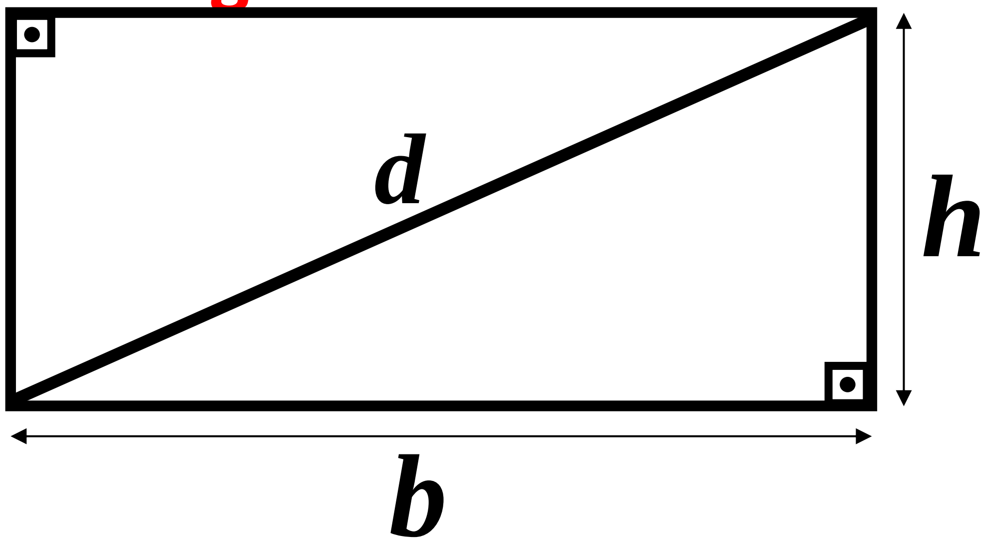
$$\boxed{A_{\text{paral.}} = b \cdot h}$$

$$A = 2 \cdot \frac{a.b}{2} . \text{sen}\,\alpha$$

$$\boxed{A = a.b.\text{sen}\,\alpha}$$

Área de quadriláteros

Retângulo



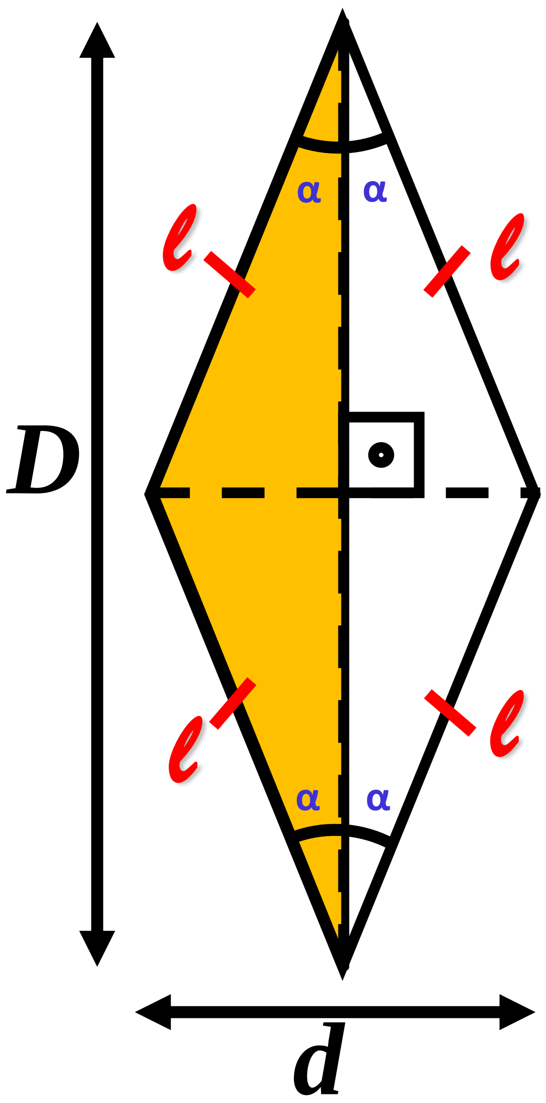
DIAGONAL

$$\boxed{d^2 = b^2 + h^2}$$

(pitágoras)

$$\boxed{A_{\text{retângulo}} = b \cdot h}$$

Losango



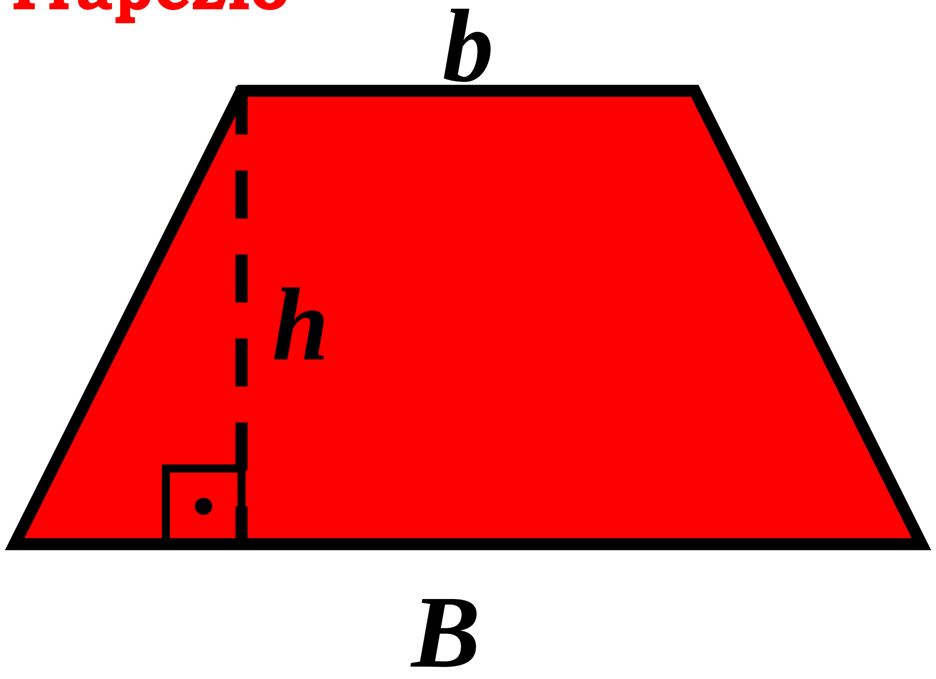
$$\boxed{A_{\Delta} = \frac{b.h}{2}}$$

$$A_{\Delta} = \frac{D.\frac{d}{2}}{2} = D.\frac{d}{2}.\frac{1}{2} = \frac{D.d}{4}$$

$$\boxed{A_{L} = \frac{D \cdot d}{2}}$$

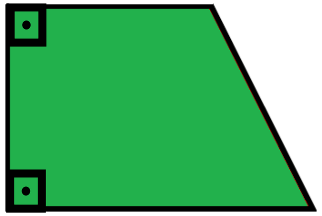
Área de quadriláteros

Trapézio



$$A_{Trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Retângulo

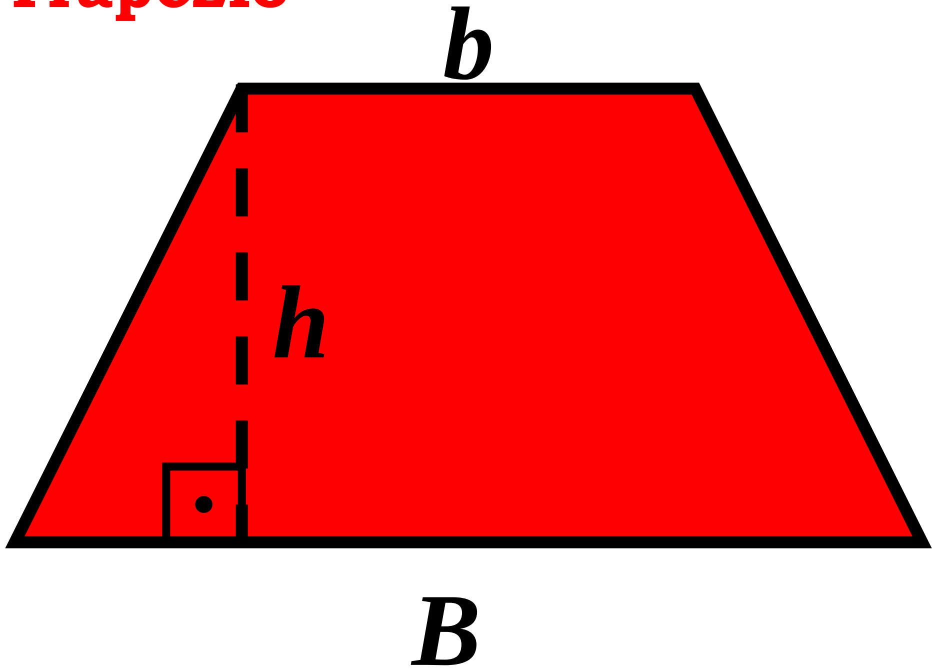


Isósceles

Escaleno

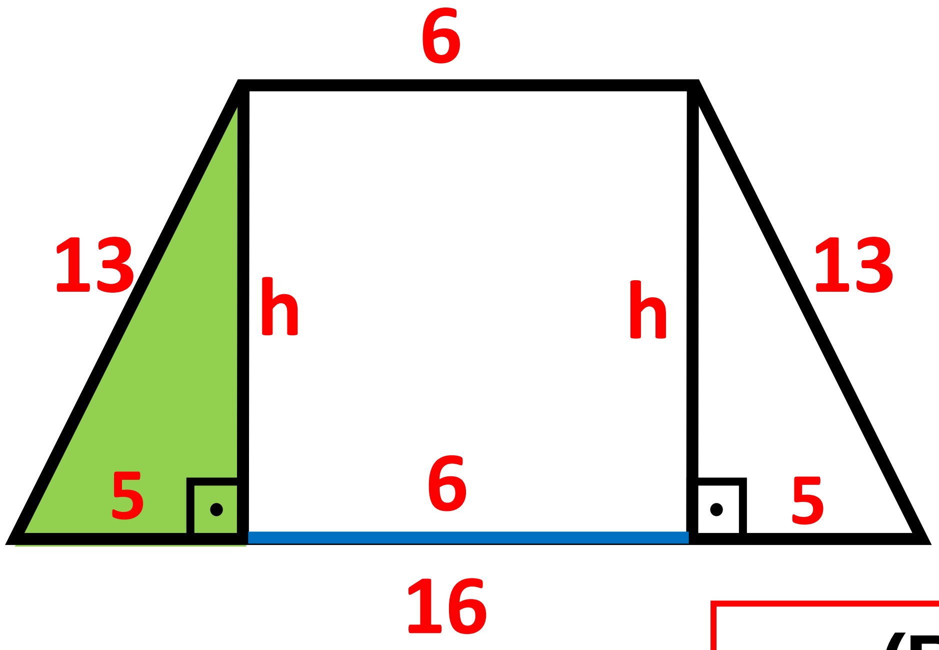
Área de quadriláteros

Trapézio



$$A_{Trapézio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

EXEMPLO



$$\boxed{A = \frac{(B+b).h}{2}}$$

13

h

5

$$13^2 = 5^2 + h^2$$

$$\boxed{h = 12}$$

$$A = \frac{(16+6).}{2}$$

$$\boxed{A = 132}$$

MATEMÁTICA X

www.ricardinhomatematicax.com.br

AULA 20

Áreas - Círculo

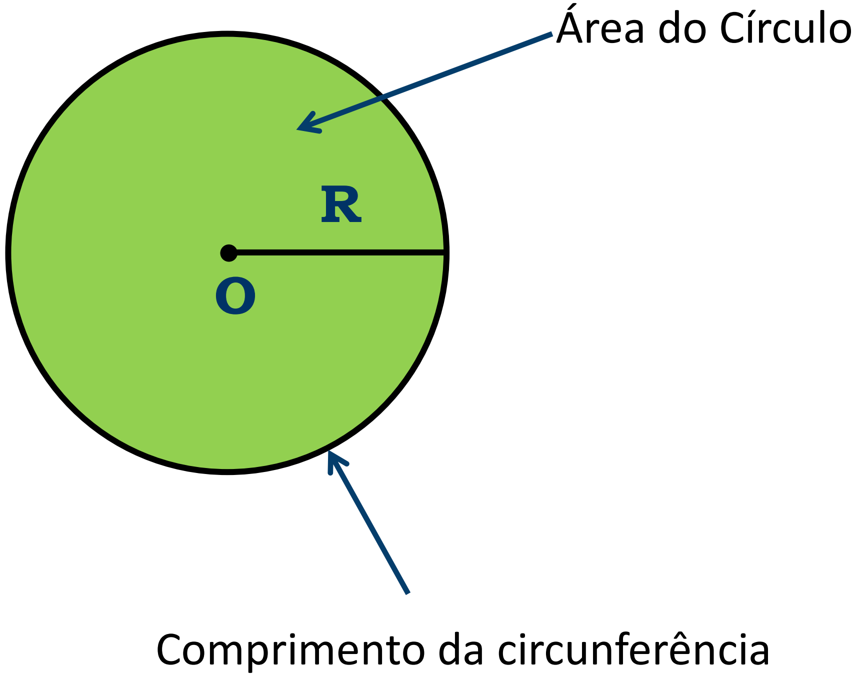
ASSISTA À AULA

Professor Ricardinho

Matemática – Frente B

Área – Círculo e partes

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

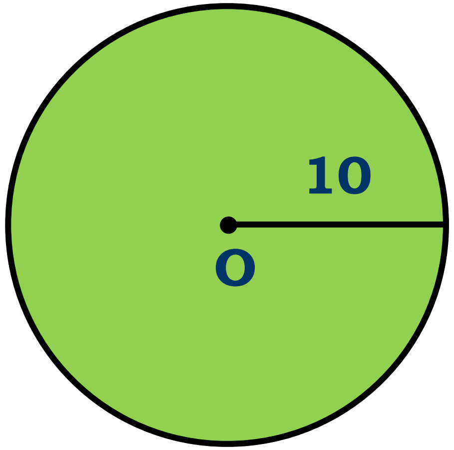


$$C = 2\pi R$$
$$A = \pi R^2$$

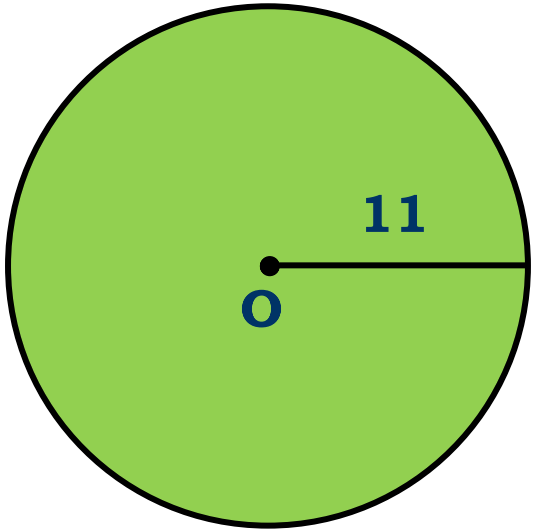
EXERCÍCIO 1:

Se o raio de um círculo cresce 10%, sua área cresce:

a) 10% **b) 20%** **c) 21%** **d) 100%**



$$A = \pi 10^2$$
$$A = 100\pi$$



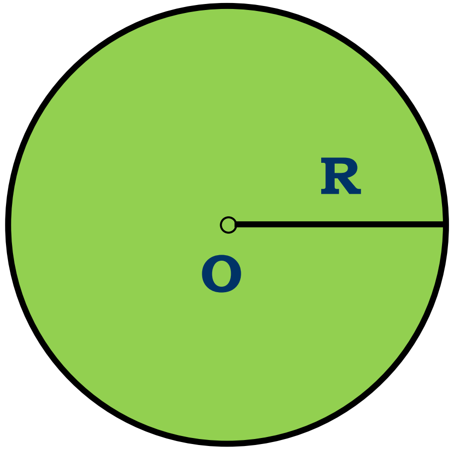
$$A = \pi 11^2$$
$$A = 121\pi$$

$$100\pi \longleftrightarrow 100\%$$
$$121\pi \longleftrightarrow x$$

$$x = 121\%$$

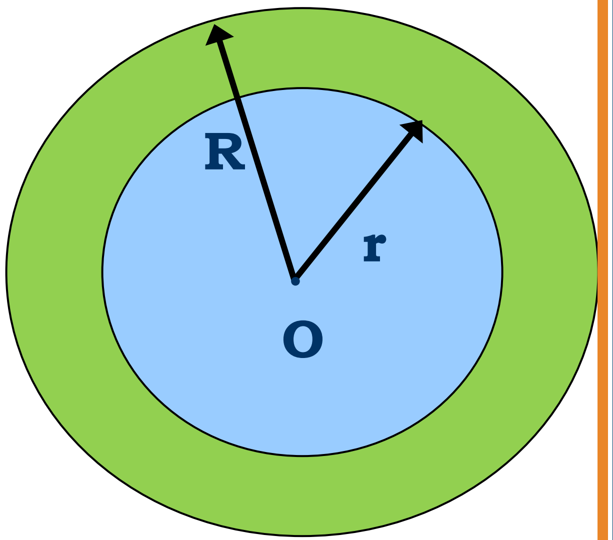
Área – Círculo e partes

CÍRCULO



$A = \pi R^2$

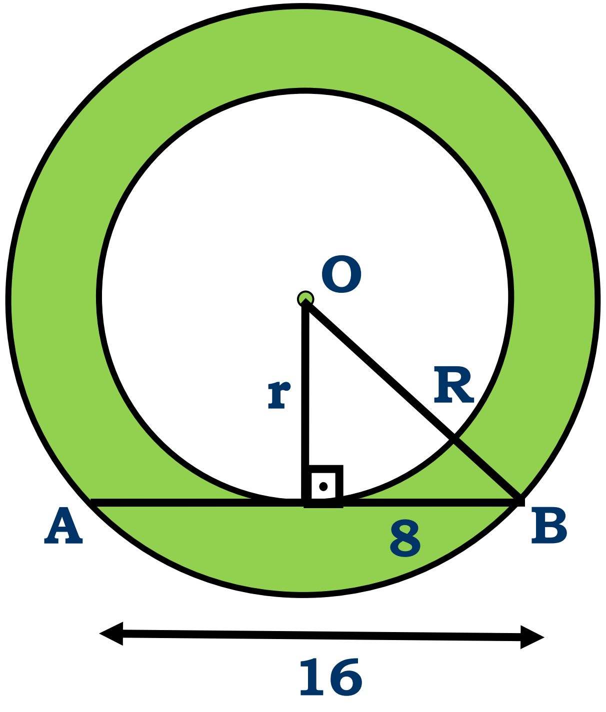
COROA CIRCULAR



$A = \pi\,(R^2 - r^2)$

EXERCÍCIO 2:

Determine a área da coroa circular sabendo que a medida do segmento AB é 16cm.



$R^2 = r^2 + 8^2$

$R^2 - r^2 = 64$

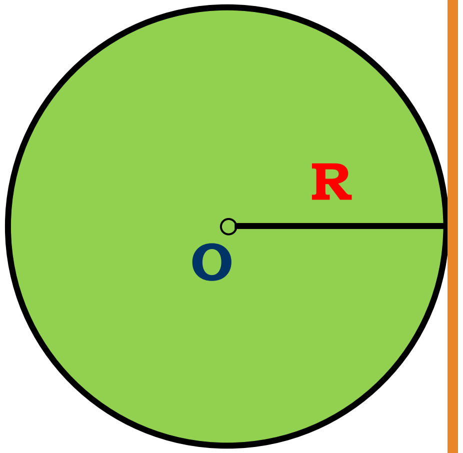
$A = \pi\,(R^2 - r^2)$

$A = \pi\,(\quad)$

$A = 64\pi\ cm^2$

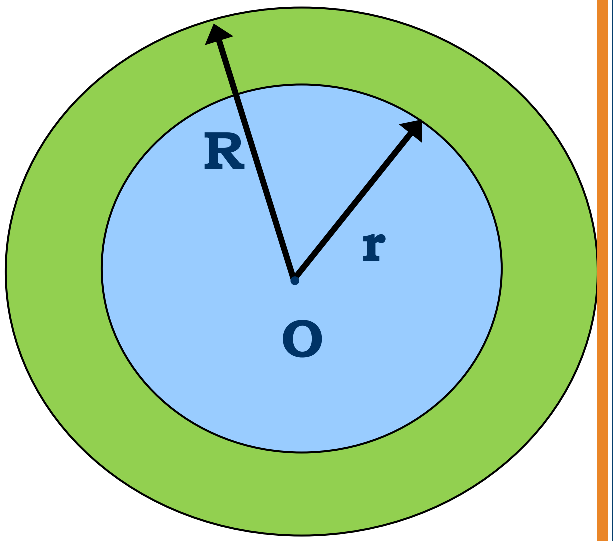
Área – Círculo e partes

CÍRCULO



$$\boxed{A = \pi R^2}$$

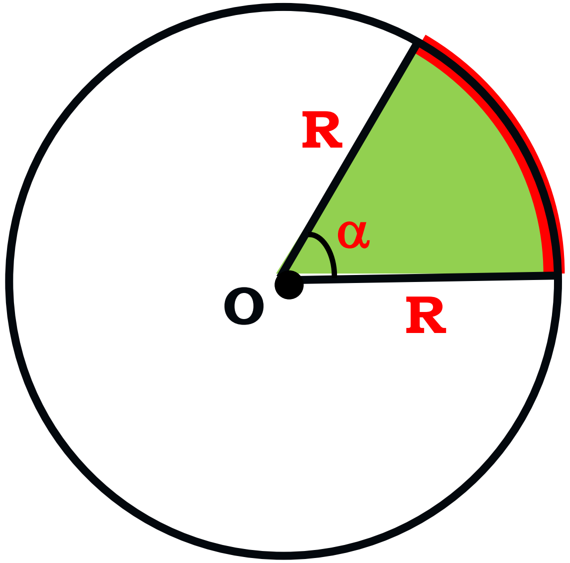
COROA CIRCULAR



$$A = \pi\, R^2 - \pi\, r^2$$

$$\boxed{A = \pi\,(R^2 - r^2)}$$

SETOR CIRCULAR



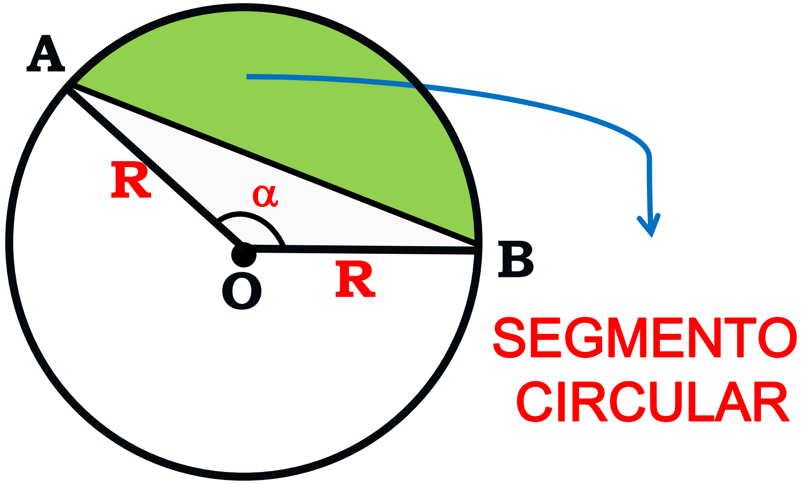
360^0 ———— $\pi . R^2$

α ———— A

$A .\ 360° = \alpha . \pi . R^2$

$$\boxed{A = \frac{\alpha\ \pi R^2}{360°}}$$

SEGMENTO CIRCULAR



$$\boxed{A_{SEGMENTO} = A_{SETOR} - A_{AOB}}$$

$$A_{SETOR} = \frac{\alpha\, \pi R^2}{360°}$$

$$A_{\Delta AOB} = \frac{b.a}{2} . \mathrm{sen}\alpha$$