APOSTILA DE NÚMEROS COMPLEXOS

www.ricardinhomatematicax.com.br

AULA 01

NÚMEROS COMPLEXOS

UNIDADE IMAGINÁRIA

Introdução

Sabemos até agora que $N \subset Z \subset Q \subset R$. Sendo que o conjunto dos números reais (R) é o mais amplo que estudamos até então. No entanto, nesse universo equações como $x^2+4=0$ ou $x^2-6x+13=0$ não possuem solução visto que iríamos nos deparar com situações do tipo: $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-16}$,...

A rigor, não foram as equações do 2º grau que sugeriram a criação dos números complexos e sim as de terceiro e quarto grau. No século XVI Raphael Bombelli publicou um livro chamado *Álgebra* em que descreve as idéias de Cardano de forma didática. É precisamente neste livro onde aparece pela primeira vez a necessidade explícita de introduzir os números complexos e também uma primeira apresentação do assunto.

As aplicações foram usadas no século XVII ainda de maneira tímida para facilitar alguns cálculos. Já no século seguinte são mais usados na medida em que se descobre que os complexos permitem a conexão de vários resultados dispersos da Matemática no conjunto dos números reais.

No século XIX, aparece a representação geométrica dos números complexos, motivada pela necessidade em algumas áreas de conhecimento como a Geometria e a Física.

1. Unidade Imaginária

Denomina-se unidade imaginária ao número **i**, tal que:

$\boxed{\mathbf{i^2=-1 \Rightarrow i=\sqrt{-1}}}$

Com isso, podemos escrever:

$\sqrt{-25}=\sqrt{25(-1)}=5i$

$\sqrt{-36}=\sqrt{36(-1)}=6i$

Assim, no conjunto dos números complexos, as equações do 2º grau com discrimante negativo passam a ter solução.

2. Forma Algébrica

Todo número complexo pode ser colocado na forma $\boxed{z=\mathbf{a}+\mathbf{b}i}$ que é denominada forma algébrica.

a é a parte real do complexo z
b é a parte imaginária do complexo z

Exemplos:
a) No complexo $z_1=3+6i$, a parte real é 3 e a parte imaginária é 6.
b) No complexo $z_2=5i$, a parte real é 0 e a parte imaginária é 5.
c) No complexo $z_3=7$, a parte real é 7 e a parte imaginária é 0.

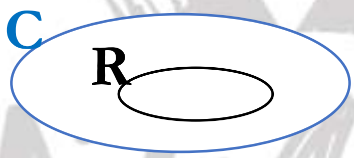
Observação: Tomando o número complexo $z=\mathbf{a}+\mathbf{b}i$, temos:

- $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Rightarrow z=bi \to \text{Imaginário puro}$

Nos exemplos acima, z_2 é imaginário puro.

- $\{b=0 \Rightarrow z=a \to \text{real puro ou real}$

Nos exemplos acima, z_3 é real.
Com isso, podemos afirmar que todo número real é um número complexo, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$



Os números que são complexos e não são reais são denominados números imaginários.

3. Conjugado de um número complexo

Denomina-se conjugado do número complexo $z=\mathbf{a}+\mathbf{b}i$ o número complexo:

$$\boxed{\mathbf{\bar{z}=a-bi}}$$

Exemplos:

a) Se $z=\mathbf{4}+3i$ então $\bar{z}=4-3i$

b) Se $z=\mathbf{1-7i}$ então $\bar{z}=1+7i$

c) Se $z=\mathbf{i}$ então $\bar{z}=-i$

d) Se $z=\mathbf{4}$ então $\bar{z}=4$

4. Igualdade de números complexos

Dois números complexos $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$ são iguais se e somente suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias também forem iguais.

$$\boxed{z_1=z_2 \Leftrightarrow a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ e } b=d}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1) Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$

Resolução:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (2)^2 - 4.1.5$$
$$\Delta = -16$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$
$$S = \{-1 + 2i, -1 - 2i\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) Resolver em $\mathbb{C}$ as seguinte equação:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

02) No campo dos números complexos, determine a solução da equação $9x^2 - 36x + 37 = 0$.

03) O número complexo z = 2 + (x^2 – 16)i é real se e somente se:

a) $x = 0$
b) $x = \pm 4$
c) $x \neq 0$
d) $x \neq 2$
e) $x = 8$

04) A parte real das raízes complexas da equação $x^2 - 4x + 13 = 0$, é igual a

Nível 2

05) Dentro do conjunto dos números complexos, o conjunto solução da equação $x^2 + 625 = 0$ é

a) $S = \{-5, 5\}$. b) $S = \{-25, 25\}$. c) $S = \{-5i, 5i\}$.

d) $S = \{-25i, 25i\}$. e) $S = \varnothing$.

06) A solução da equação $x^2 + 2x + 5 = 0$ no conjunto dos números complexos é dada por:

a) $\pm i$
b) $\pm 2i$
c) $-1 \pm 2i$
d) $2 \pm i$
e) $2 \pm i$

07) O número complexo z = (x^2 – 4) + (2x – 6)i é imaginário puro se e somente se:

a) $x = 0$
b) $x = \pm 2$
c) $x \neq 0$
d) $x \neq 2$
e) $x = 4$

Nível 3

08) (MACK – SP) Em **C** o conjunto solução da equação

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x-1 \\ 2x & 2x & 2x \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x^2 + 2x + 5 \text{ é:}$$

a) $\{2 + 2i, 2 - 2i\}$
b) $\{-1 - 4i, -1 + 4i\}$
c) $\{1 + 4i, 1 - 4i\}$
d) $\{-1 + 2i, -1 - 2i\}$
e) $\{2 - 2i, 1 + 2i\}$

09) (UERJ – RJ) Considere a equação a seguir, que se reduz a uma equação do terceiro grau:

$$(x+2)^4 = x^4$$

Uma de suas raízes é real e as outras são imaginárias. Determine as três raízes dessa equação.

GABARITO – AULA 01

1) $S = \{2 + i, 2 - i\}$ 2) $S = \left\{\frac{6-i}{3}, \frac{6+i}{3}\right\}$ 3) b 4) 2

5) d 6) c 7) b 9) d

10) Fatorando a equação, obtemos

$$\begin{aligned} (x+2)^4 = x^4 &\Leftrightarrow [(x+2)^2]^2 - (x^2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow [(x+2)^2 - x^2] \cdot [(x+2)^2 + x^2] = 0 \\ &\Leftrightarrow 8 \cdot (x+1) \cdot (x^2 + 2x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -1 + i \text{ ou } x = -1 - i. \end{aligned}$$

AULA 02

NÚMEROS COMPLEXOS

OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA – PARTE I

3. Operações com números complexos na forma algébrica

3.1. Adição e Subtração

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Faz-se a adição ou subtração dos complexos somando ou subtraindo as partes reais a e c e as partes imaginárias b e d.

$$\boxed{(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i}$$

$$\boxed{(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i}$$

Observe os exemplos:

a) (2 + 5i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (5 + 4)i = 5 + 9i

b) (7 + 8i) – (2 + 3i) = (7 – 2) + (8 – 3)i = 5 + 5i

Para a adição de números complexos valem as seguintes propriedades:

- Comutativa: $\boxed{z_1 + z_2 = z_2 + z_1}$
- Associativa: $\boxed{(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)}$
- Elemento neutro: $\boxed{z + 0 = z}$

3.2. Multiplicação

O procedimento para se multiplicar dois números complexos é idêntico ao procedimento da multiplicação de dois binômios. Lembrando que $\boxed{\mathbf{i^2 = -1}}$

Sejam: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

$$z_1.z_2 = (a+bi).(c+di)$$
$$z_1.z_2 = a.c + adi + bci + bdi^2$$
$$z_1.z_2 = a.c + adi + bci + bd(-1)$$

$$\boxed{z_1.z_2 = \underbrace{(ac-bd)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(ad+bc)}_{\text{parte imaginária}}\,i}$$

Observe o exemplo abaixo:

Dado $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4 + 5i$, calcule $z_1.z_2$.

Resolução:

$$z_1.z_2 = (3+2i).(4+5i)$$
$$z_1.z_2 = 3.4 + 3.5i + 2i.4 + 2i.5i$$
$$z_1.z_2 = 12 + 15i + 8i + 10i^2$$
$$z_1.z_2 = 12 + 23i + 10(-1)$$
$$z_1.z_2 = 2 + 23i$$

Para a multiplicação de números complexos valem as seguintes propriedades:

- Comutativa: $\boxed{z_1.z_2 = z_2.z_1}$
- Associativa: $\boxed{(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)}$
- Distributiva: $\boxed{z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3}$
- Elemento neutro: $\boxed{z.1 = z}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) Sejam os complexos $z = 2 + 3i$ e $w = -1 + 2i$. A alternativa que representa o produto z.w é:

a) 8 + i
b) – 8 + i
c) 4 – 8i
d) 8 – i
e) 2 + 3i

02) Dados os números complexos $z_1 = 2 - i$ e $z_2 = 3 + xi$, sabe-se que $z_1 \cdot z_2$ é um número real. Então x é igual a

a) –6.
b) $-\dfrac{3}{2}$.
c) 0.
d) $\dfrac{3}{2}$.
e) 6.

03) O valor de k + m de modo que $(2+m)(1+i) = k - 2i$, é:

Nível 2

04) (UPF – RS) Sendo $P(x) = x^2 - 2x + 4$, pode-se afirmar que $P(1 - i)$ é um número:

a) imaginário puro positivo
b) real positivo
c) imaginário
d) real negativo
e) imaginário puro negativo

05) (PUC – RS) Dados os números complexos z = a + bi e seu conjugado Z, é correto afirmar que z + Z é um número

a) natural.
b) inteiro.
c) racional.
d) real.
e) imaginário puro.

06) (PUC – RS) No determinante $D = \begin{vmatrix} 2+i & 3-i \\ 1-i & -2i \end{vmatrix}$, $i = \sqrt{-1}$, o valor de D é:

a) – 2i
b) zero
c) 2 – 4i
d) 2 + 2i
e) – 4

07) (UPF – RS) O número complexo z, tal que $5z + \bar{z} = 12 + 16i$, é igual a:

a) $-2 + 2i$
b) $2 - 3i$
c) $3 + i$
d) $2 + 4i$
e) $1 + 2i$

Nível 3

08) (UEL – PR) Leia o texto a seguir.

Na virada do século XVIII para o século XIX, um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussão enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era reconhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Adaptado de: CARNEIRO, J. P. "A Geometria e o Ensino dos Números Complexos". *Revista do Professor de Matemática*. 2004. v.55. p.18.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, uma composição de rotação dos pontos $P(-3, 4)$ e $Q(2, -3)$ representados pelos números complexos $z = -3 + 4i$ e $w = 2 - 3i$.

a) $-18 + 17i$
b) $-6 - 12i$
c) $-1 + i$
d) $5 + 7i$
e) $6 + 17i$

09) (UEL – PR) Qual é a parte real do número complexo $z = a + bi$, com a e b reais e $a > 0$ e $b > 0$ cujo quadrado é $-5 + 12i$?

a) 1/3
b) 1/2
c) 1
d) 2
e) 3

10) Dado o complexo Z = a + bi. A soma de Z com seu conjugado é 18 e o produto de ambos é 145. Determine o módulo de a.b

GABARITO – AULA 02

1) b	**2)** d	**3)** – 6	**4)** b	**5)** d	**6)** b
7) d	**8)** e	**9)** d	**10)** 72		

AULA 03

NÚMEROS COMPLEXOS

OPERAÇÕES NA FORMA ALGÉBRICA – PARTE II

Divisão de complexos na forma algébrica

Dados os complexos z_1 e z_2 .A divisão $\frac{z_1}{z_2}$ é obtida multiplicando numerador e denominador da fração pelo conjugado do denominador ou seja:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}}$$

Observe abaixo as questões resolvidas:

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Dado $z_1=-10+15i$ e $z_2=2-i$, calcule $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-10+15i}{2-i}\cdot\frac{(2+i)}{(2+i)}=\frac{-20-10i+30i+15i^2}{(2)^2-(i)^2}==\frac{-20+20i-15}{4+1}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-35+20i}{5}=-7+4i$$

2) O resultado da expressão $\frac{3+2i}{1-4i}$ na forma $x+yi$ é

Resolução:

Lembrando que $i^2=-1$, temos

$$\frac{3+2i}{1-4i}=\frac{3+2i}{1-4i}\cdot\frac{1+4i}{1+4i}$$

$$=\frac{3+12i+2i+8i^2}{1-16i^2}$$

$$=-\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) Considere os complexos $z_1=3+2i$ e $z_2=1+i$. A parte real do quociente $\frac{z_1}{z_2}$ é:

a) $-\frac{1}{5}$
b) $\frac{1}{25}$
c) $\frac{5}{2}$
d) $-\frac{8}{5}$
e) $\frac{1}{8}$

02) O número complexo $z=\frac{1-i}{1+i}$ é igual a:

a) $-i$
b) i
c) -1
d) 1
e) $2i$

03) O quociente entre os números complexos $Z_1=1+i$ e $Z_2=1-i$ é

a) 1.
b) i.
c) 0.
d) 2.
e) 2i.

04) A soma dos números complexos $\frac{5+5i}{1+i}$ e $\frac{20}{1+i}$

a) $\frac{25+5i}{2}$
b) 10 + 10i
c) –10 –10i
d) 15 – 10i
e) 30 + 20i

Nível 2

05) O resultado da expressão $\frac{3+2i}{1-4i}$ na forma $x+yi$ é

a) $-\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i$
b) $\frac{11}{15}+\frac{14}{15}i$
c) $\frac{11}{17}-\frac{14}{17}i$
d) $\frac{11}{15}-\frac{14}{15}i$
e) $3-\frac{1}{2}i$

06) A parte real do número complexo $z=\frac{1+(3i)^2}{1-i}$ é

a) 1
b) –1
c) 2
d) –2
e) –4

07) (MACK – SP) Se $\frac{2+i}{\beta+2i}$ tem parte imaginária igual a zero, então o número real β é igual a

a) 4
b) 2
c) 1
d) –2
e) –4

Nível 3

08) O valor de $\frac{(2+i)(2-i)(1+i)(1-i)}{i}$ é :

a) 10i
b) – 10i
c) 5i
d) 10
e) – 10

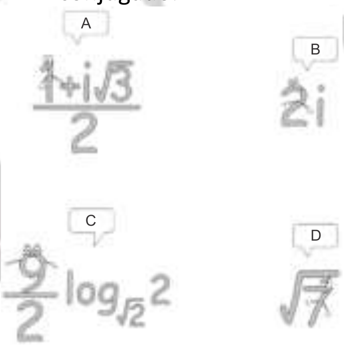
09) Considerando os números complexos $z_1=1-2i$ e $z_2=-3+i$, assinale o que for correto.

01) $z_1.z_2=25i$.
02) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}(-1+i)$.
04) $(\bar{z}_2)^2=8+6i$.
08) O inverso de $z_1 = 1 + 2i$
16) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=-1-7i$

10) (UEL – PR) Uma estratégia para obter efeito humorístico em quadrinhos é atribuir a objetos abstratos características e ações tipicamente humanas. A figura a seguir é um exemplo de aplicação desse recurso.

Supondo que cada número diga uma verdade matemática sobre si mesmo, relacione as frases (de I a IV) aos balões de diálogo (de A a D).

I. Meu cubo é irracional.
II. Sou racional.
III. Sou puramente imaginário.
IV. Meu inverso multiplicativo coincide com meu conjugado.



Assinale a alternativa que contém a associação correta.

a) I-B, II-C, III-A, IV-D.
b) I-C, II-B, III-A, IV-D.
c) I-D, II-A, III-C, IV-B.
d) I-D, II-A, III-B, IV-C.
e) I-D, II-C, III-B, IV-A.

GABARITO – AULA 03					
1) c	**2)** a	**3)** b	**4)** d	**5)** a	**6)** e
7) a	**8)** b	**9)** 22	**10)** e		

AULA 04

NÚMEROS COMPLEXOS

POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

Potências de i

Observe algumas potências de **i** (unidade imaginária):

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = i^2.i = (-1).i = -i \end{cases} \qquad \begin{cases} i^4 = i^3.i = -i.i = -i^2 = 1 \\ i^5 = i^4.i = 1.i = i \\ i^6 = i^5.i = i.i = i^2 = -1 \\ i^7 = i^6.i = (-1).i = -i \end{cases} \quad \ldots\ldots$$

Se continuássemos o procedimento, verificaríamos que os resultados encontrados repetem a cada grupo de quatro potências, assumindo os valores 1, i, –1, –i.

Logo, para se obter a potência i^n, basta calcular i^r, onde **r** é o resto da divisão de **n** por 4.

Veja o esquema abaixo:

$$\begin{array}{c|l} n & 4 \\ \hline r & k \end{array} \longrightarrow n = 4k + r$$

r deve assumir um dos valores: 0, 1, 2 ou 3.

$$\boxed{i^n = i^{4k+r} = \underbrace{i^{4k}}_{\text{sempre igual a 1}} .i^r = i^r}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

(UECE – CE) Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1, então, o valor de $5 \cdot i^{227} + i^6 - i^{13}$ é igual a

a) $i + 1.$

b) $4i - 1.$

c) $-6i - 1.$

d) $-6i.$

Resolução:

Sabemos que:

$$\begin{aligned} 227 &= 56 \cdot 4 + 3 \\ 6 &= 1 \cdot 4 + 2 \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$5 \cdot i^{227} + i^6 - i^{13} = 5 \cdot i^3 + i^2 - i = -5i - 1 - i = -6i - 1$ [C]

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) A expressão i^{203} é igual a:

a) i
b) $-i$
c) 1
d) -1
e) 0

02) A expressão $i^7 + i^{19} + i^{49}$ é igual a:

a) i
b) $-i$
c) 1
d) -1
e) 0

03) Sendo **i** a unidade imaginária, determine o valor de $i^{528714587256712}$

a) 0
b) 1
c) i
d) $-i$
e) -1

04) O número complexo $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{198}$ é igual a:

a) $-i$
b) i
c) -1
d) 1
e) $2i$

Nível 2

05) (PUC – RS) Se n é um número natural par e i = $\sqrt{-1}$, então i^{6n} vale

a) i
b) – 1
c) – i
d) 1
e) 0

06) Se i é a unidade imaginária, então $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ é um número complexo que pode ser representado por: z = a + bi. Determine o valor de a + b.

Nível 3

07) (FGV – SP) Sendo i a unidade imaginária, então $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$ é igual a

a) –1024.
b) –1024i.
c) 0
d) 1024.
e) 1024i.

08) (PUC – PR) Seja n $\in$ { 1, 2, 3, 4, 5, ...}. O valor de i^{12n+3}, sendo i = $\sqrt{-1}$, será igual a:

a) 1
b) – 1
c) i
d) – i
e) depende do valor de n

09) (UNICAMP – SP) Chamamos de unidade imaginária e denotamos por *i* o número complexo tal que $i^2 = -1$. Então $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2013}$ vale

a) 0.
b) 1.
c) i.
d) $1+i$.

10) (UEL – PR) Leia o texto a seguir.

Foi ali no meio da praça. [...] Zuzé Paraza, pintor reformado, tossiu sacudindo a magreza do seu todo corpo. Então, assim contam os que viram, ele vomitou um corvo vivo. O pássaro saiu inteiro das entranhas dele. [...] Estivera tanto tempo lá dentro que já sabia falar.

COUTO, Mia. O último aviso do corvo falador. In: *Vozes anoitecidas*. São Paulo: Companhia das Letras, 2015. p. 29.

Zuzé desafiou o corvo falador. De dentro de seu gabinete, Zuzé mostrou ao corvo a seguinte tabela.

A	B	C
7	9	0
20	5	1
24	6	2
2	13	3

Zuzé solicita ao corvo que pense em uma equação matemática que relacione, linha a linha, os números das colunas A, B e C da tabela. Prontamente o corvo falante responde: $i^{A+B} = i^C$, onde i é a unidade imaginária.

Com base na equação dita pelo corvo e sabendo que A, B e C são números naturais, considere as afirmativas a seguir.

I. Se $A + B$ é múltiplo de 4 e $C = 4$, então A, B e C satisfazem a equação.
II. Se $A = 26, B = 44$ e $C = 30$, então A, B e C satisfazem a equação.
III. Se $A = B = 1$, então a única possibilidade para que A, B e C satisfaçam a equação é $C = 6$.
IV. Se A e B são números ímpares e $C = 1$, então A, B e C satisfazem a equação.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e II são corretas.
b) Somente as afirmativas I e IV são corretas.
c) Somente as afirmativas III e IV são corretas.
d) Somente as afirmativas I, II e III são corretas.
e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.

GABARITO – AULA 04

1) b **2)** b **3)** b **4)** c **5)** d **6)** 0 **7)** c
8) d **9)** d **10)** a

AULAS 05 e 06

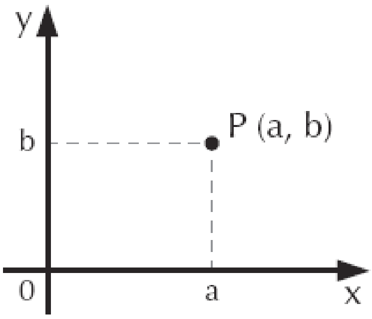
NÚMEROS COMPLEXOS

MÓDULO E ARGUMENTO

1. Representação gráfica de um número complexo – Plano de Argand – Gauss

A partir de agora, vamos associar a todo complexo da forma $z=\mathbf{a}+\mathbf{b}i$ o par ordenado (a,b) que será representado no plano de Argand – Gauss, plano esse que possui um sistemas de coordenadas cartesianas.

$$\boxed{z=\mathbf{a}+\mathbf{b}i \leftrightarrow (a,b)}$$

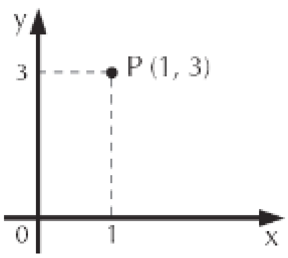


O eixo x é o eixo real e o eixo y é o eixo imaginário.

O ponto P é denominado afixo do complexo.

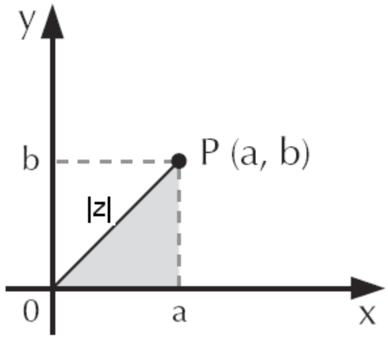
Exemplo:

$z=1+3i \leftrightarrow (1,3)$



2. Módulo de um número complexo

Considere o número complexo $z=\mathbf{a}+\mathbf{b}i$ com afixo no ponto P de coordenadas (a,b). Denomina-se módulo de z à distância do afixo P à origem do plano de Argand – Gauss. Representamos o módulo de z por: $|z|$.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo representado, temos:

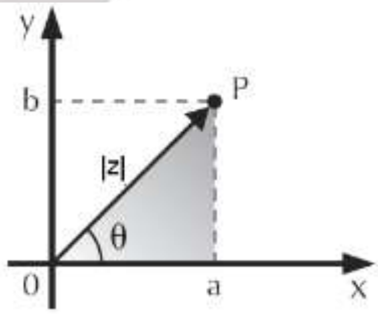
$$\boxed{|z|^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2 \Rightarrow |z|=\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}}$$

Propriedades do módulo de um número complexo:

1) $|z|=|\bar{z}|$
2) $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$
3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
4) $|z^n|=|z|^n$

3. Argumento de um número complexo

Argumento de um complexo é o número $\theta\ (0\le\theta<2\pi)$ que é à medida do ângulo formado no sentido anti-horário entre o eixo x e a reta $\overleftrightarrow{OP}$.



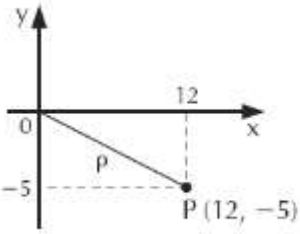
Aplicando as conhecidas razões trigonométricas, podemos determinar o valor do argumento θ.

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta=\frac{b}{|z|} \qquad \cos\theta=\frac{a}{|z|} \qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Determine o módulo do número complexo $z = 12 - 5i$.

Resolução:

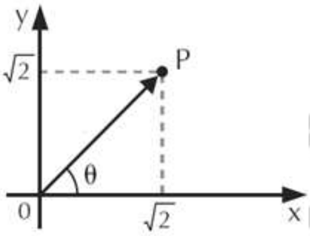


$\begin{cases} a = 12 \\ b = 5 \end{cases} \quad |z| = \sqrt{12^2 + 5^2} \rightarrow |z| = \sqrt{144 + 25} \rightarrow |z| = 13$

Portanto, |z|=13.

2) Calcular o argumento θ do número complexo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Resolução:



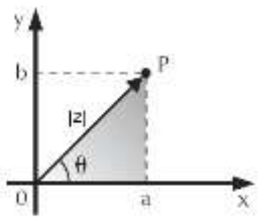
Cálculo de θ:

$tg\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

Neste caso, $\theta \in$ 1ºquadrante. Logo $\boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

4. Forma trigonométrica ou polar de um número complexo

Todo número complexo da forma $z = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ pode ser escrito em função do seno e cosseno do seu argumento θ. Observe:



Vimos que: $sen\,\theta = \frac{b}{|z|}$ $\quad \cos\theta = \frac{a}{|z|}$

Então: $\begin{cases} b = |z|.sen\,\theta \\ a = |z|.\cos\theta \end{cases}$

Substituindo esses valores em z = a + bi, vem:

$$z = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$$
$$z = |z|.\cos\theta + i.|z|.sen\,\theta$$
$$\therefore \boxed{z = |z|(\cos\theta + i.sen\,\theta)}$$

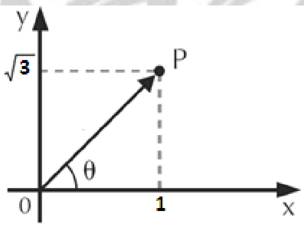
Essa é a **forma trigonométrica** ou **polar** do número complexo z = a +bi.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Passar para a forma trigonométrica o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Resolução:

$z = 1 + \sqrt{3}i$ tem representação gráfica (afixo) no primeiro quadrante



Cálculo do módulo de z:

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \rightarrow |z| = \sqrt{1+3} \rightarrow |z| = 2$$

Cálculo do argumento:

$$tg\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Então: $z = |z|(\cos\theta + i.sen\,\theta) \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.sen\frac{\pi}{3}\right)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) O módulo do número complexo $z = 5 + 12i$ é:

a) 14
b) 13
c) 21
d) 10
e) 5

02) O argumento do número complexo $z = 3 + 3i$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{\pi}{8}$

03) O módulo do conjugado do número complexo $z = -1 + \sqrt{3}i$ é:

a) 6
b) 4
c) 10
d) 2
e) 5

04) O argumento do número complexo $z = -1 + \sqrt{3}i$ é:

a) $\frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{\pi}{8}$

05) Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $z = 1 + i$ b) $z = -1 - \sqrt{3}i$,

06) A forma trigonométrica do número complexo $z = \sqrt{3} + i$ é:

a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$
b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$
c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$
d) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$
e) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

07) A forma trigonométrica do número complexo $z = i$ é:

a) $z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$
b) $z = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$
c) $z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$
d) $z = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i.\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$
e) $z = (\cos\pi + i.\text{sen}\pi)$

08) (UFSC - SC) Sendo θ o argumento principal do número principal complexo $(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})$, então o valor de $\frac{\theta}{5}$, em graus, é:

09) (PUC – RS) O número complexo $2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$, escrito na forma algébrica a + bi é:

a) $2\sqrt{3} + i$
b) $-\sqrt{3} + i$
c) $-\sqrt{3} - i$
d) $\sqrt{3} - i$
e) $2\sqrt{3} - i$

10) Se i é a unidade imaginária, então $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ é um número complexo que pode ser representado no plano de Argand-Gauss no __________ quadrante.

a) primeiro
b) segundo
c) terceiro
d) quarto

Nível 2

11) Considere os números complexos $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 2 + i$, com k um número real positivo e $z_3 = z_1 \cdot z_2$. É **FALSO** afirmar que

a) $|z_1 + z_2| = 1$
b) $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{-1+i}{2}$
c) O argumento de z_1 é $225°$.
d) $z_3 \cdot z_2 = 1 - 7i$
e) O argumento de z_2 é $225°$.

12) (UEFS) Dado um número complexo $z = a + bi$, com a e b reais, define-se afixo de z como o ponto do plano complexo de coordenadas (a, b). Sejam A, B e C os afixos dos números complexos $z_A = 14 + 4i$, $z_B = 6 - 2i$ e $z_C = 16 - 2i$. A área do triângulo de vértices A, B e C é

a) 18.
b) 24.
c) 30.
d) 36.
e) 40.

13) (IFSUL – RS) De uma forma criativa, após um exame, o professor entregou as notas expressas por números complexos aos seus alunos. Para cada aluno descobrir sua nota, era necessário calcular o módulo (observe que o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é calculado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$) do número complexo descrito no seu exame.

Dessa forma, as notas representadas pelos números complexos $N_1 = 4 \cdot \left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\, \dfrac{2\pi}{3}\right)$, $N_2 = 3 \cdot \left(\cos \dfrac{5\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ e $N_3 = \left(\dfrac{5}{2} + i\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2} - i\right) - \dfrac{3}{4} i$ aproximados são, respectivamente,

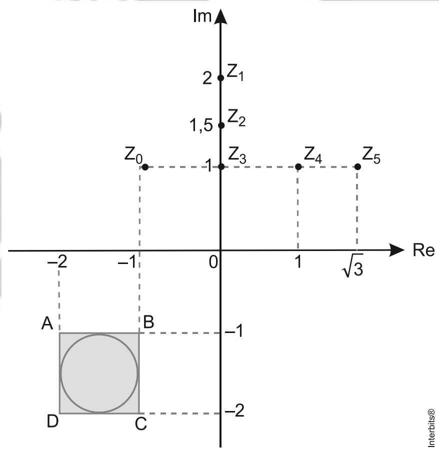
a) $4, 3$ e $3,5$.
b) $3, 4$ e $3,5$.
c) $3, 4$ e 5.
d) $4, 3$ e 5.

Nível 3

14) (UEPG – PR) O determinante $\begin{vmatrix} i & i & 1 \\ -i & i & 0 \\ 2-i & 2+i & i \end{vmatrix}$ define um número complexo z. Se $|z|$ é o módulo desse complexo, assinale o que for correto.

01. $|z|$ é um número inteiro.
02. $|z| < 5$.
04. $|z| \in [1, 4]$.
08. $|z|$ é um número par.
16. $|z| \in [2, 6]$.

15) (FGV – SP) No plano Argand-Gauss estão indicados um quadrado ABCD e os afixos dos números complexos Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, e Z_5.



Se o afixo do produto de Z_0 por um dos outros cinco números complexos indicados é o centro da circunferência inscrita no quadrado ABCD, então esse número complexo é

a) Z_1.
b) Z_2.
c) Z_3.
d) Z_4.
e) Z_5.

16) (UFSC – SC) Em circuitos elétricos como, por exemplo, o das instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos. A relação $U = Z \cdot j$ fornece a tensão U em função da impedância Z e da corrente elétrica j. Nesses termos, essas variáveis são expressas através de números complexos $a + bi$. Considere agora $U = 110(\cos 0° + i\,\text{sen}\, 0°)$ e $Z = 5 + 5i$. Determine o valor da expressão $2a + b$, sendo $j = a + bi$.

17) (UFSM – RS) Os edifícios "verdes" têm sido uma nova tendência na construção civil. Na execução da obra desses prédios, há uma preocupação toda especial com o meio ambiente em que estão inseridos e com a correta utilização dos recursos naturais necessários ao seu funcionamento, além da correta destinação dos resíduos gerados por essa utilização.

A demarcação do terreno onde será construído um edifício "verde" foi feita através dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, sendo o terreno delimitado pelas poligonais $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ e $\overline{P_4P_1}$, medidas em metros. Sabendo que P_1, P_2, P_3 e P_4 representam, respectivamente, a imagem dos complexos $z_1 = 20 + 40i$, $z_2 = -15 + 50i$, $z_3 = -15 - 10i$ e $z_4 = \frac{1}{16}z_1 - \frac{5}{4}\overline{z_3}$, qual é a área, em m^2, desse terreno?

a) 1.595.
b) 1.750.
c) 1.795.
d) 1.925.
e) 2.100.

GABARITO – AULAS 5 e 6

1) b	**2)** d	**3)** d	**4)** b	**5)** *	**6)** b	**7)** c
8) 27	**9)** d	**10)** b	**11)** e	**12)** c	**13)** a	**14)** 25
15) b	**16)** 11	**17)** d				

***5)**

a) $Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4})$. b) $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$.

AULA 07

NÚMEROS COMPLEXOS

OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

1. Multiplicação

Sejam os complexos:

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2)$

O produto deles é dado por:

$$[|z_1|(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1)].[|z_2|(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2)] \Rightarrow$$

$$|z_1|.|z_2|[\cos\theta_1.\cos\theta_2 + i.\cos\theta_1.\text{sen}\theta_2 + i.\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 + i^2\text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_2] \Rightarrow$$

$$|z_1|.|z_2|\left[\underbrace{(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\underbrace{(\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2\cos\theta_1)}_{\text{sen}(\theta_1+\theta_2)}\right]$$

Daí:

$$\boxed{\mathbf{z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)]}}$$

Note que, a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica resume-se em:

- Multiplicar os módulos dos complexos envolvidos.
- Somar os argumentos dos complexos envolvidos.

Observação: O resultado obtido acima pode ser generalizado para a multiplicação de **n** números complexos. Assim:

$$\boxed{z_1.z_2.z_3....z_n + |z_1|.|z_2||z_3|...|z_n|[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3... + \theta_n) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3... + \theta_n)]}$$

2. Divisão

Sejam os complexos:

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2) \neq 0$

A divisão deles é dado por:

$$\frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2)} = \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1).(\cos\theta_2 - i.\text{sen}\theta_2)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2).(\cos\theta_2 - i.\text{sen}\theta_2)} \Rightarrow$$

$$\frac{|z_1|(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - i.\cos\theta_1.\text{sen}\theta_2 + i.\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 - i^2\text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_2).}{|z_2|(\cos^2\theta_2 - i^2.\text{sen}^2\theta_2)} \Rightarrow$$

$$\frac{|z_1|[\cos\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_2 + i.(\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2.\cos\theta_1)].}{|z_2|(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2)}$$

$$\frac{|z_1|\left[\overbrace{\cos\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_2}^{\cos(\theta_1-\theta_2)} + i.\left(\overbrace{\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2.\cos\theta_1}^{\text{sen}(\theta_1-\theta_2)}\right)\right].}{|z_2|.1}$$

Daí:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i.\text{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]$$

Note que, a divisão de números complexos na forma trigonométrica resume-se em:

- Dividir os módulos dos complexos envolvidos.
- Subtrair os argumentos dos complexos envolvidos.

3. Potenciação(Fórmula de Moivre)

Se $z=|z|(\cos\theta+i.\text{sen}\theta)$, então:

$$z^n=\underbrace{|z|.|z|.|z|.\ldots.|z|}_{\text{n vezes}}.\left[\cos(\underbrace{\theta+\theta+\theta+\ldots.+\theta}_{\text{n vezes}})+i.\text{sen}(\underbrace{\theta+\theta+\theta+\ldots.+\theta}_{\text{n vezes}})\right]$$

ou seja:

$$\boxed{z^n=(|z|)^n\left[\cos(n\theta)+i.\text{sen}\ (n\theta)\right]}\quad \text{com } n\in N$$

Com isso:

$$z^2=|z|^2(\cos 2\theta+i.\text{sen}2\theta)$$
$$z^3=|z|^3(\cos 3\theta+i.\text{sen}3\theta)$$
$$z^4=|z|^4(\cos 4\theta+i.\text{sen}4\theta)$$
$$\vdots$$

Se $(n\theta)$ for maior que 2π, devemos reduzi-lo à primeira volta positiva.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

01) Sejam z_1 e z_2 os números complexos $z_1=5(\cos 20°+i\text{sen}20°)$ e $z_2=2(\cos 10°+i\text{sen}10°)$. O produto z_1 por z_2 é o número complexo:

a) $15(\cos 90°+i\text{sen}90°)$
b) $7(\cos 30°+i\text{sen}30°°)$
c) $10(\cos 30°+i\text{sen}30°)$
d) $15(\cos 75°+i\text{sen}75°)$
e) $8(\cos 75°+i\text{sen}75°)$

02) Sejam z_1 e z_2 os números complexos $z_1=5(\cos 25°+isen25°)$ e $z_2=20(\cos 65°+isen65°)$. O quociente $\frac{z_2}{z_1}$ é o número complexo:

a) $30(\cos 30°+i\text{sen}30°)$
b) $2(\cos 30°+i\text{sen}30°)$
c) $4(\cos 40°+i\text{sen}40°)$
d) $10(\cos 60°+i\text{sen}60°)$
e) $8(\cos 75°+i\text{sen}75°)$

03) Seja z_1 o número complexo $z=2(\cos 30°+i\text{sen}30°)$. O número complexo: z^{10} é:

a) $1024(\cos 330°+i\text{sen}330°)$
b) $20(\cos 30°+i\text{sen}30°)$
c) $20(\cos 300°+i\text{sen}300°)$
d) $1024(\cos 300°+i\text{sen}300°)$
e) $2(\cos 300°+i\text{sen}300°)$

Nível 2

04) (UNESP – SP) A expressão $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{109}$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
e) 1

05) O produto dos três números complexos
$z_1=2(\cos 40°+i.\text{sen}40°)$
$z_2=3(\cos 135°+i.\text{sen}135°)$
$z_3=1(\cos 125°+i.\text{sen}125°)$
é igual a:

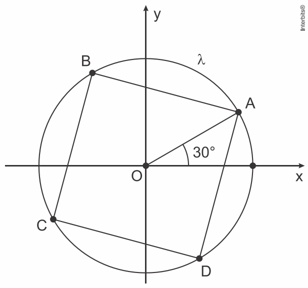
a) $3-\sqrt{3}\,i$
b) $3-3\sqrt{3}\,i$
c) $2+2\sqrt{2}\,i$
d) $6+\sqrt{3}i$
e) $\sqrt{3}+\sqrt{2}i$

06) Sendo $z=1-i$ um número complexo. O valor de z^{10} é:

a) $-32i$
b) $-\sqrt{2}i$
c) $16\sqrt{2}(1+i)$
d) $32i$
e) 32

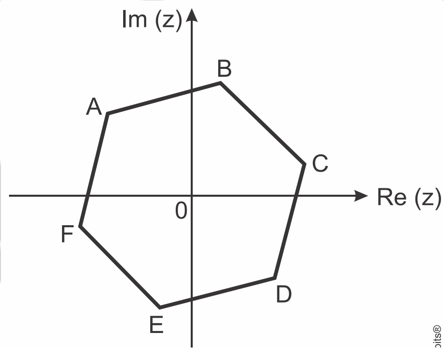
Nível 3

07) (ESPCEX) No plano complexo, temos uma circunferência λ de raio 2 centrada na origem. Sendo $ABCD$ um quadrado inscrito à λ, de acordo com a figura abaixo, podemos afirmar que o número complexo que representa o vértice B é



a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i.$
b) $-\sqrt{3}-i.$
c) $-1+\sqrt{3}i.$
d) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$
e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$

08) (UPF – RS) Na figura abaixo, está representado, no plano complexo, um hexágono regular cujos vértices são imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z.



O vértice A tem coordenadas $(-1,1)$. Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D?

a) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right]$
b) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]$
c) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{17}{12}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{17}{12}\pi\right)\right]$

d) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$

e) $2\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right]$

09) (UECE – CE) Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1, e n é um número natural maior do que 2, então, pode-se afirmar corretamente que $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$ é um número real sempre que

a) n for ímpar.
b) n for um múltiplo de 4.
c) n for um múltiplo de 3.
d) n for um múltiplo de 5.

10) (UFPR – 2019) Considere o número complexo $z=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$.

a) Calcule o módulo de z e escreva a forma polar de z.
b) Calcule o valor da expressão $z^{27}+z^{24}+1$.
(Sugestão: use a fórmula de *De Moivre*)

GABARITO – AULA 07

1) c	**2)** c	**3)** d	**4)** d	**5)** b	**6)** a
7) c	**8)** d	**9)** b			

10) a) Tem-se que

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.$$

Ademais, se θ é o argumento principal de z, então

$$\text{tg}\,\theta=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \text{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}\text{rad}.$$

A forma polar de z é

$$z=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}.$$

b) Pela fórmula de De Moivre, tem-se que

$$\begin{aligned} z^{27}+z^{24}+1 &= \cos\frac{27\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{27\pi}{6}+\cos\frac{24\pi}{6}+i\,\text{sen}\frac{24\pi}{6}+1 \\ &= \cos\frac{\pi}{2}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{2}+\cos 0+i\,\text{sen}\,0+1 \\ &= i+1+1 \\ &= 2+i. \end{aligned}$$