RICARDINHOMATEMATICAX.COM.BR

teoria e
exercícios
resolvidos

EBOOK INTERATIVO

BINÔMIO DE NEWTON

CONTÉM LINKS PARA AS VÍDEO AULAS

MATEMÁTICA X

Sumário

Binômio de Newton

Clique

Números Binomiais 03

Fórmula do termo geral 07

Termo independente 10

Resoluções 12

AULA 01

NÚMEROS BINOMIAIS
TRIÂNGULO DE PASCAL

1. Números Binomiais

Dados dois números naturais n e p, denomina-se número binomial de **n** sobre **p** e indicado por $\binom{n}{p}$ ao número definido por:

$\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$ com $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$

$n \rightarrow$ numerador

$p \rightarrow$ classe

Exemplo:

Determine o valor $\binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{4}$

Solução:

Desenvolvendo os números binomiais, vem:

$$\binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{4}$$

$$\underbrace{\frac{7!}{0!(7-0)!}}_{1} + \underbrace{\frac{5!}{1!(5-4)!}}_{5} + \underbrace{\frac{4!}{4!(4-4)!}}_{1}$$

Portanto:

$$\binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{4} = 7$$

De imediato vem:

a) $\binom{n}{0} = 1$ b) $\binom{n}{1} = n$ c) $\binom{n}{n} = 1$

OBSERVAÇÕES:

- ✓ Dois números binomiais de mesmo numerador são chamados complementares quando a soma dos denominadores (classes) é igual ao numerador

Exemplo:

$\binom{10}{4}$ e $\binom{10}{6}$ são complementares, pois 4 + 6 =10

$\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ são complementares, pois p+n–p = n

PROPRIEDADE: Dois números binomiais complementares são iguais.

Então se $\binom{n}{k} = \binom{n}{p} \Rightarrow \begin{cases} k = p \\ \text{ou} \\ k + p = n \end{cases}$

- ✓ Dois binomiais de mesmo numerador são ditos consecutivos se seus denominadores (classes) forem números consecutivos.

Exemplos: a) $\binom{10}{2}$ e $\binom{10}{3}$ b) $\binom{8}{5}$ e $\binom{8}{6}$

$\boxed{\binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{p+1} \quad \text{com } n, p \in N \text{ e } n > p}$

Propriedade (Relação de Stifel):

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Triângulo de Pascal

	Col 0	Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 5	Col 6
Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
Linha 5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
Linha 6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$

Substituindo cada binomial pelo respectivo valor, temos:

1
1 1
1 2 3
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Somando os elementos de uma mesma linha obtém-se uma potência de base 2 e expoente que é a ordem da linha. Observe:

$$\binom{0}{0} \cdots\cdots\to 1 = 2^0$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1} \cdots\cdots\to 1 + 1 = 2^1$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{1}{2} \cdots\cdots\to 1 + 2 + 1 = 2^3$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \cdots\cdots\to 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \cdots\cdots\to 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4$$

$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \cdots\to 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5$$

Genericamente:

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n}$$

EXERCÍCIOS
PROPOSTOS

Nível 1

1. O número de comissões com exatamente 2 pessoas que podemos formar a partir de 5 pessoas disponíveis pode ser calculado por $\binom{5}{2}$. Nesse cenário, quantas comissões poderíamos formar?

a) 10
b) 20
c) 30
d) 15
e) 25

2. Calcule E, sendo $E = \binom{6}{2} + \binom{5}{5} + \binom{8}{0} + \binom{9}{1}$.

3. (UFRGS – RS) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas abaixo.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7	...
Linha 0	1								
Linha 1	1	1							
Linha 2	1	2	1						
Linha 3	1	3	3	1					
Linha 4	1	4	6	4	1				
Linha 5	1	5	10	10	5	1			
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	⋱	...	

O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é

a) 15 b) 91 c) 105 d) 120 e) 455

4. Determine o valor dos seguintes somatórios abaixo:

a) $\sum_{p=0}^{8}\binom{8}{p}=\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{8}{8}$

b) $\sum_{p=0}^{10}\binom{10}{p}=\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}$

c) $\sum_{p=2}^{6}\binom{6}{p}=\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\ldots+\binom{6}{6}$

5. Determine o(s) valor(es) de x que satisfazem as equações abaixo:

a) $\binom{20}{4}=\binom{20}{3x-2}$

b) $\binom{18}{x-1}=\binom{18}{2x-6}$

Nível 2

6. (MACK – SP) Sabendo que $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=256$, então o valor de n vale

a) 8
b) 7
c) 6
d) 5
e) 4

7. (UEPG – PR) Assinale o que for correto.

01. $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}$

02. $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=15$

04. A soma das soluções da equação $\binom{11}{x}-\binom{10}{3}=\binom{10}{2}$ é 11.

08. A equação $\binom{10}{x}=\binom{10}{2x-4}$ tem duas soluções distintas.

16. $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$

8. (ESPECEX) A soma dos 2023 coeficientes binomiais com numerador 2022,

$$\sum_{n=0}^{2022}\binom{2022}{n}=\binom{2022}{0}+\binom{2022}{1}+\binom{2022}{2}+\ldots+\binom{2022}{2021}+\binom{2022}{2022},$$

equivale a

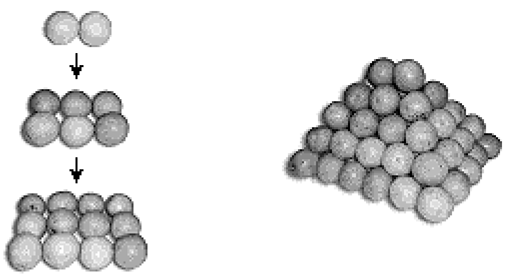
a) 4^{1011}.
b) 2^{4044}.
c) 2^{1011}.
d) $(\sqrt{2})^{2023}$.
e) $(\sqrt{2})^{1011}$.

Nível 3

9. (UECE – CE) O número inteiro n, maior do que 3, para o qual os números $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ e $\binom{n}{3}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética é

a) n = 6
b) n = 8
c) n = 5
d) n = 7

10. (UERJ – RJ) Em uma barraca de frutas, as laranjas são arrumadas em camadas retangulares, obedecendo à seguinte disposição: uma camada de duas laranjas encaixa-se sobre uma camada de seis; essa camada de seis encaixa-se sobre outra de doze; e assim por diante, conforme a ilustração abaixo.



Sabe-se que a soma dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal pode ser calculada pela fórmula $C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$, qual **n** e **p** são números naturais, $n \geq p$ e C_n^p correspondem ao número de combinações simples de n elementos tomados **p** a **q**.

Com base nessas instruções, calcule:

a) a soma $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_{18}^2$.

b) o número total de laranjas que compõem quinze camadas.

Gabarito – Aula 01

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		10	26	C	*	*	A	23	A	D
1	*									

4) a) 256 b) 1024 c) 57
5) a) 2 ou 6 b) 5
10. a) 969 b) 1360 laranjas

AULA 02

FÓRMULA DO TERMO GERAL DO BINÔMIO DE NEWTON

1. Desenvolvimento de $(a+b)^n$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Compare estes desenvolvimentos acima com as linhas, de zero a cinco do triângulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Podemos escrever os desenvolvimentos acima, assim:

$(a+b)^0 = \binom{0}{0}$

$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$

$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$

$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$

$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$

Genericamente temos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Observe que ao desenvolvermos $(a + b)^n$ obtemos n + 1 termos.

2. Soma dos coeficientes

Qual é a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+3)^2$? Facilmente podemos responder a essa pergunta se desenvolvermos esse binômio. Veja: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ e os seus coeficientes são 1, 6 e 9. Logo a soma dos coeficientes é 1+6+9 = 16.

Mas se o binômio fosse $(x+2)^{55}$? É claro que não iremos desenvolver os 56 termos desse binômio para somarmos os seus coeficientes. Existe uma maneira bastante simples de resolver esse problema. Observe:

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

Se substituirmos $x = 1$, obtemos exatamente a soma dos coeficientes $(1+3)^2 = 1+6+9$.

O mesmo ocorre com o binômio $(2x+y)^3$. Observe:

$(2x+y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$.

Substituindo x = 1 e y = 1, obtemos

$(2+1)^3 = 8+12+6+1$, que é exatamente a soma dos coeficientes.

Conclusão:

A soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é obtida trocando-se as variáveis da base por 1.

3. Fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton

É possível obter um termo qualquer do desenvolvimento do binômio sem que tenhamos que desenvolver todo o binômio.

Voltemos à fórmula do desenvolvimento do binômio:

Quando desenvolvemos um binômio da forma $(a+b)^n$ segundo as potências decrescentes de a, obtemos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

onde:

$$1^o\text{ termo}: T_1 = \binom{n}{0}a^n$$

$$2^o\text{ termo}: T_2 = \binom{n}{1}a^{n-1}.b^1$$

$$3^o\text{ termo}: T_3 = \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(p+1)-\text{ésimo termo}: T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p}.b^p$$

Ou seja, qualquer termo do desenvolvimento do binômio de Newton pode ser calculado pela expressão:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p}a^{n-p}.b^p}$$

Exemplo:

1) Determinar o 5º termo do desenvolvimento de $(x + 2)^6$.

Resolução: $n = 6$ $\quad p = 4$ (T_5) $\quad a = x$ $\quad b = 2$

$$T_5 = \binom{6}{4}.x^{6-4}.2^4$$

$$T_5 = 15.x^2.16$$

$$T_5 = 240\,x^2$$

2) Determinar o termo médio do desenvolvimento de $\left(3x+\dfrac{1}{x}\right)^6$.

Resolução: Temos 7 termos no desenvolvimento de $\left(3x+\dfrac{1}{x}\right)^6$. Portanto, o termo médio é o 4º.

$n = 6$ $\quad p = 3$ (T_4) $\quad a = 3x$ $\quad b = \dfrac{1}{x}$

$$T_4 = \binom{6}{3}.(3x)^{6-3}.\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$T_4 = 20.27x^3.\frac{1}{x^3}$$

$$\therefore T_4 = 540$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nível 1

1. Desenvolvendo o binômio $(x-y)^{4n}$, obtém-se um polinômio de 19 termos. O valor de n é:

a) 15
b) 10
c) 5
d) 4
e) 2

2. Desenvolvendo-se o binômio $P(x) = (2x+1)^4$, podemos dizer que a soma de seus coeficientes é

a) 16 b) 24 c) 32 d) 40 e) 81

3. O coeficiente do quinto termo no desenvolvimento de $(2x+3)^6$ é:

a) 1586
b) 4860
c) 5860
d) 3840
e) 1260

4. (UDESC – SC) O sexto termo do binômio $\left(\dfrac{x}{3}+y\right)^{10}$ é:

a) $\dfrac{70}{243}x^6y^4$
b) $\dfrac{28}{27}x^5y^5$
c) $\dfrac{70}{27}x^4y^6$
d) $\dfrac{40}{729}x^7y^3$
e) $5x^2y^8$

5. (PUC – RS) O termo médio no desenvolvimento de $\left(2x+\frac{2}{x}\right)^6$ é:

a) 320 b) 720 c) 960 d) 1200 e) 1280

Nível 2

6. (UFSC – SC) Determine o valor do coeficiente numérico do 3º termo do desenvolvimento do binômio $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^5$.

7. (UEPG – PR) Considerando que, $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 32$ e $a - b = -1$, assinale o que for correto.

01. $a > 1$.
02. $b < 0$.
04. $\frac{b}{a}$ é um número natural.
08. $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$.
16. $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

8. (UEPG – PR) Dois casais, Marcos e Maria e Leonardo e Lucia, vão ao teatro, sentando-se em quatro lugares consecutivos que sobraram numa mesma fila. Considerando **n** o número de maneiras diferentes que os quatro podem sentar, de tal forma que Marcos sempre fique ao lado de Maria e Leonardo fique ao lado de Lucia, assinale o que for correto.

01. O coeficiente do termo central do desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$ é maior que 80.
02. Um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x-2)^n$ é igual a $112x^6$.
04. Acendendo pelo menos uma lâmpada, pode-se iluminar de 256 modos diferentes uma sala que tem n lâmpadas, com interruptores independentes.
08. Se x = 1, então $\binom{n}{3x+2} = \binom{n}{2x+1}$.
16. Existem menos que 50 maneiras de sentar-se n meninos num banco que tem apenas dois lugares.

Nível 3

9. (UEPG – PR) Considerando que n é a solução da equação $A_{n,4} = 12\,A_{n,2}$ e que m é solução da equação $A_{m,5} = 180\,C_{m,3}$, assinale o que for correto.

01. A soma dos coeficientes do binômio $(3x+1)^{m-n}$ é 64.
02. Se $\binom{14}{mp-np} = \binom{14}{p+n}$, então p = 3 ou p = 2.
04. O quarto termo do desenvolvimento do binômio $(x+m)^n$ é $14.580\,x^3$.
08. O valor de $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}+\binom{n}{6} = 64$.

10. (UEPG – PR) Sabendo que m e n são as soluções do sistema $\begin{cases} C_{m,n} = 56 \\ A_{m,n} = 336 \end{cases}$, assinale o que for correto.

01. O desenvolvimento do binômio $(x+3)^{m-n}$ é um polinômio com cinco termos.
02. O terceiro termo do binômio $(x+n)^4$ é $54x^2$.
04. O valor de p para que $\binom{15}{np} = \binom{15}{p+8}$ é p = 4 ou p = 6.
08. A soma dos coeficientes do binômio $(x+1)^m$ é 256.

Gabarito – Aula 02

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		D	C	B	B	E	80	28	10	15
1	10									

AULA 03

TERMO INDEPENDENTE DO BINÔMIO

Vimos que ao desenvolver um binômio da forma $(a+b)^n$ segundo as potências decrescentes de a, obtemos:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

e percebemos que um termo qualquer desse desenvolvimento pode ser calculado pela expressão:

$$\boxed{T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^p}$$

Nessa aula veremos como calcular o termo independente de uma variável em questão no desenvolvimento de um binômio.

Exemplo:

Calcular o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^{10}$

Solução: $a = x^4 \quad b = \frac{1}{x} \quad n = 10$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p}.\left(x^4\right)^{10-p}.\left(-\frac{1}{x}\right)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p}.x^{40-4p}.(-1)^p.\left(x^{-1}\right)^p$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p}.x^{40-4p}.(-1)^p.x^{-p}$$

$$T_{p+1} = \binom{10}{p}.x^{40-5p}.(-1)^p$$

O termo independente de x é o que contém x^0, logo: $40 - 5p = 0 \rightarrow p = 8$

$$T_9 = \binom{10}{8}.x^0.(-1)^8 \qquad \binom{10}{8} = \frac{10!}{2!.8!} = 45$$

$T_9 = 45 \rightarrow$ termo independente

EXERCÍCIOS

PROPOSTOS

Nível 1

1. (UFSC – SC) Desenvolvendo o binômio $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$, o valor do termo independente de x, é:

2. (EFOMM) Assinale a alternativa que apresenta o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2 + \frac{1}{x^6}\right)^8$.

a) 1
b) 8
c) 28
d) 56
e) 70

3. (ESPM) O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9$ é:

a) 5.376
b) 876
c) 4.832
d) 1.278
e) 654

4. Desenvolvendo o binômio $\left(\frac{2}{x} + x^2\right)^4$, encontramos um termo em x^2. O coeficiente desse termo é:

a) 24
b) 26
c) 36
d) 48
e) 56

5. O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^7$ é

a) 30
b) 90
c) 120
d) 270
e) 560

Nível 2

6. (UECE – CE) No desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x}\right)^{16}$, a soma do coeficiente de x^4 com o termo independente de x é

a) 1836.
b) 1823.
c) 1830.
d) 1828.

7. (UFSC – SC) O coeficiente numérico do termo em x^2, no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{10}$, é:

8. (UEPG – PR) Considerando o binômio de Newton $\left(mx+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n}$, em que "m" é a solução par da equação $\binom{9}{m}=\binom{10}{7}-\binom{9}{6}$ e "n" é a solução da equação $12n = C_{10,3} - \frac{A_{8,3}}{7}$, assinale o que for correto.

01. O termo médio no desenvolvimento do binômio tem coeficiente 160.
02. O quinto termo do binômio é independente de x.
04. A soma dos coeficientes do binômio é 64.
08. O último termo do binômio é independente de x.
16. O desenvolvimento do binômio tem seis termos.

Nível 3

9. (UECE – CE) O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3$ é

a) 18
b) 24
c) 34
d) 30

10. (ITA – SP) Sejam **a** e **b** números inteiros positivos. Se **a** e **b** são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então **a** + **b** é

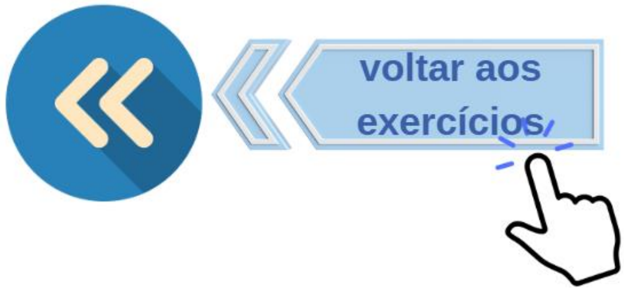
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

Gabarito – Aula 03

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		20	C	A	A	E	A	45	03	B
1	B									

Ir para resoluções

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 01



Resolução do Exercício 1: [A]

Resolução: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4}{2} = 10$

Resolução do Exercício 2:

$$\binom{6}{2}+\binom{5}{5}+\binom{8}{0}+\binom{9}{1}$$

$$\frac{6!}{4!.2!}+\frac{5!}{0!.5!}+\frac{8!}{8!\ 0!}+\frac{9!}{8!.1!}=$$

$$15\ +\ 1\ +\ 1\ +\ 9 = 26$$

Resolução do Exercício 3: [C]

A tabela acima é o famoso triângulo de Pascal.

$$\binom{15}{13} = \frac{15!}{2!.13!} = \frac{15.14}{2} = 105$$

Resolução do Exercício 4:

a) $2^8 = 256$ b) $2^{10} = 1024$ c) $2^6 - 1 - 6 = 57$

Gabarito: a) 2 ou 6 b) 5

Resolução do Exercício 5:

a) $\binom{20}{4} = \binom{20}{3x-2} \rightarrow \begin{cases} 3x-2=4 \rightarrow x=2 \\ \text{ou} \\ 3x-2+4=20 \rightarrow x=6 \end{cases}$

b)

$$\binom{18}{x-1} = \binom{18}{2x-6} \rightarrow \begin{cases} 2x-6=x-1 \rightarrow x=5 \\ \text{ou} \\ 2x-6+x-1=18 \rightarrow x=\frac{25}{3}\text{(não serve)} \end{cases}$$

Resolução do Exercício 6: [A]

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$$

Assim,

$2^n = 256$

$2^n = 2^8$

$n = 8$

Resolução do Exercício 7: [23]

[01] Verdadeira, pois $n-2+2=n$ (binomiais complementares).

[02] Verdadeira, pois

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = 2^4 - \binom{4}{0} = 15.$$

[04] Verdadeira, pois

$$\binom{11}{x}-\binom{10}{3}=\binom{10}{2} \Rightarrow \binom{11}{x}=\binom{11}{3} \qquad \text{e } 8+3=11.$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ ou } x+3=11 \Rightarrow x=2 \text{ ou } x=8$$

[08] Falsa, pois $\binom{10}{x}=\binom{10}{2x-4} \Rightarrow$

$2x-4=x$ ou $2x-4+x=10$

$\Rightarrow x=4$ ou $x=\frac{14}{3}$ (não convém).

[16] Verdadeira, pois $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$ (relação de Stifel).

Resolução do Exercício 8: [A]

Como:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$$

Devemos ter que:

$$\binom{2022}{0}+\binom{2022}{1}+\binom{2022}{2}+\ldots+\binom{2022}{2022} = 2^{2022}$$

Manipulando o expoente, chegamos a:

$$2^{2022} = \left(2^2\right)^{1011} = 4^{1011}$$

Resolução do Exercício 9: [D]

Do enunciado,

$$\frac{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}}{2}=\binom{n}{2}$$

$$n+\frac{n!}{3!\times(n-3)!}=2\times\frac{n!}{2!\times(n-2)!}$$

$$n+\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{6}=n\times(n-1)$$

$$6n+n\times\left(n^2-3n+2\right)=6n\times(n-1)$$

$$n\times\left(6+n^2-3n+2\right)=6n\times(n-1)$$

$$6+n^2-3n+2=6n-6$$

$$n^2-9n+14=0$$

$$n=2 \text{ ou } n=7$$

Como $n>3$,

$n=7$

Resolução do Exercício 10:

Solução. Utilizando os conceitos binomiais, temos:

a)

$$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\ldots+C_{18}^2=C_{19}^3=\frac{19!}{3!.16!}=$$

$$\frac{19.18.17.16!}{3!.16!}=(19).(17).(3)=969$$

b)

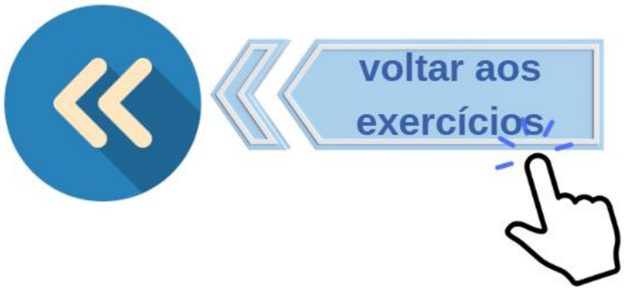
As camadas de laranjas podem ser representações de números binomiais em colunas. Observando as primeiras representações do triangulo de Pascal, temos que a 3ª coluna multiplicada por 2 fornece a quantidade indicada de laranjas por camadas:

$$\begin{cases} 1^a\text{camada}: 2=2.C_2^2 \\ 2^a\text{camada}: 6=2.C_3^2 \\ 3^a\text{ camada}: 12=2.C_4^2 \\ 4^a\text{camada}: 20=2.C_5^2 \\ \ldots. \\ 15^a\text{camada}: 2.C_{16}^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Total}: 2.\left(C_2^2+C_3^2+\ldots+C_{16}^2\right)=2.C_{17}^3=2.\left(\frac{17!}{3!.14!}\right)$$

$$\text{Total}: 2.\left(\frac{17.16.15.14!}{(2.3).14!}\right)=17.16.5=1360$$

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 02



Resolução do Exercício 1: [D]

$(x-y)^{4n}$, possui 17 termos, então: $4n+1=17 \Rightarrow n=4$

Resolução do Exercício 2: [C]

A soma dos coeficientes de P é dada por $P(1)=(2.1+1)^4=3^4=81$.

Resolução do Exercício 3: [B]

Resolução: $\begin{cases} a=2x \\ b=3 \\ n=6 \\ p+1=5 \to p=4 \end{cases}$

$$T_{p+1}=\binom{n}{p}a^{n-p}.b^p$$

$$T_5=\binom{6}{4}(2x)^{6-4}.3^4 \qquad \binom{6}{4}=\frac{6!}{4!.2!}=15$$

$$T_5=15.4x^2.81$$

$$T_5=4860x^2$$

Resposta: $4860x^2$

Resolução do Exercício 4: [B]

Resolução: $\begin{cases} a=\frac{x}{3} \\ b=y \\ n=10 \\ p+1=6 \to p=5 \end{cases}$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^{p}$$

$$T_6 = \binom{10}{5}\left(\frac{x}{3}\right)^{10-5}.y^5 \qquad \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!.5!} = 252$$

$$T_5 = 252.\frac{x^5}{243}.y^5$$

$$T_5 = \frac{28}{27}.x^5.y^5$$

Resolução do Exercício 5: [E]

Resolução: $\begin{cases} a = 2x \\ b = \dfrac{2}{x} \\ n = 6 \\ p+1 = 4 \to p = 3 \end{cases}$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^{p}$$

$$T_3 = \binom{6}{3}(2x)^{6-3}.\left(\frac{2}{x}\right)^3 \qquad \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!.3!} = 20$$

$$T_3 = 20.8x^3.\frac{8}{x^3}$$

$$T_3 = 1280$$

Resolução do Exercício 6: [80]

Resolução: $\begin{cases} a = 2x \\ b = \dfrac{1}{x} \\ n = 5 \\ p+1 = 3 \to p = 2 \end{cases}$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^{p}$$

$$T_3 = \binom{5}{2}(2x)^{5-2}.\left(\frac{1}{x}\right)^2 \qquad \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

$$T_5 = 10.4x^3.\frac{1}{x^2}$$

$$T_5 = 80x$$

Portanto, o coeficiente numérico do 3° termo é 80.

Resolução do Exercício 7: [28]

Cálculos auxiliares
$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 32 \Rightarrow$
$(a + b)^5 = 32 \Rightarrow a + b = 2.$

Portanto:

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ a-b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Item (01) – Falso

$a = \frac{1}{2} < 1$

Item (02) – Falso

$b = \frac{3}{2} > 0$

Item (04) – Verdadeiro

$$\frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 3 \in N$$

Item (08) – Verdadeiro

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

Item (16) – Verdadeiro

$$\frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Resolução do Exercício 8: [10]

Os dois casais podem escolher o par de cadeiras no qual se sentará de 2 maneiras. Definidos os pares de cadeiras, cada casal pode se sentar de 2 modos. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

[01] Falsa. Tem-se que o coeficiente do termo central é $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70 < 80.$

[02] Verdadeira. De fato, pois sendo $T_{p+1} = \binom{8}{p} \cdot x^{8-p} \cdot (-2)^p$ o termo geral do binômio

$(x-2)^8$, sendo que $p = 2$ e, portanto, $T_3 = \binom{8}{2} \cdot x^6 \cdot (-2)^2 = 112x^6$.

[04] Falsa. Cada uma das $n = 8$ lâmpadas pode estar acesa ou apagada. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ possibilidades. Para que a sala esteja iluminada, deve haver pelo menos uma lâmpada acesa. Em consequência, devemos descontar o caso em que todas as lâmpadas estão apagadas.
A resposta é $256 - 1 = 255$.

[08] Verdadeira. Com efeito, pois $\binom{8}{5}$ e $\binom{8}{3}$ são números binomiais complementares.

[16] Falsa. Dispondo de $n = 8$ meninos, existem $A_{8,\,2} = \frac{8!}{6!} = 56$ maneiras distintas de ocupar um banco de dois lugares com dois meninos.

Resolução do Exercício 9: [15]

Desde que $n \geq 4$ e $m \geq 5$, temos

$$\begin{aligned} A_{n,\,4} = 12A_{n,\,2} &\Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 12\frac{n!}{(n-2)!} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(n-4)!} = 12\frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)!} \\ &\Rightarrow n^2 - 5n - 6 = 0 \\ &\Rightarrow n = 6 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_{m,\,5} = 180C_{m,\,3} &\Rightarrow \frac{m!}{(m-5)!} = 180\frac{m!}{3!(m-3)!} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(m-5)!} = 30\frac{1}{(m-3)(m-4)(m-5)!} \\ &\Rightarrow m^2 - 7m - 18 = 0 \\ &\Rightarrow m = 9. \end{aligned}$$

[01] Verdadeira. De fato, a soma dos coeficientes do binômio $(3x+1)^3$ é $(3 \cdot 1 + 1)^3 = 4^3 = 64$.

[02] Verdadeira. Com efeito, pois

$$\binom{14}{9p-6p} = \binom{14}{p+6} \Leftrightarrow \binom{14}{3p} = \binom{14}{p+6}$$
$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3p = p+6 \\ \quad \text{ou} \\ 3p + p + 6 = 14 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow p = 3 \text{ ou } p = 2.$$

[04] Verdadeira. De fato, pois o quarto termo do binômio $(x+9)^6$, segundo as potências decrescentes de x, é

$$\binom{6}{3} \cdot x^{6-3} \cdot 9^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 729 \cdot x^3 = 14580x^3.$$

[08] Verdadeira. Com efeito, pois $64 = 2^6$ e, assim, pelo Teorema das Linhas, vem $n = 6$.

Resolução do Exercício 10: [10]

Calculando a razão entre equações do sistema, obtemos:

$$\frac{A_{m,n}}{C_{m,n}} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}} = n! \Rightarrow \frac{336}{566} = n! \Rightarrow n = 6 \text{ e } m = 8.$$

[01] Falsa.
$(x+3)^{8-3} = (x+3)^5$ possui 6 elementos.

[02] Verdadeira.
$$T_3 = \binom{4}{2} x^{4-2} \cdot 3^2 = 6 \cdot x^2 \cdot 9 = 54x^2$$

[04] Falsa.
$\binom{15}{3p} = \binom{15}{p+8} \Rightarrow 3p = p + 8$ ou $3p + p + 8 = 15 \Rightarrow p = 4$ ou $p = \frac{7}{4}$ (não convém)

[08] Verdadeira.
A soma dos coeficientes de $(x+1)^8$ é $(1+1)^8 = 2^8 = 256$.

RESOLUÇÕES – EXERCÍCIOS AULA 03

voltar aos exercícios

Resolução do Exercício 1: [20]

Resolução: $\begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{1}{x} \\ n = 6 \\ p = ? \end{cases}$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^{p}$$

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} (x)^{6-p} . \left(\frac{1}{x}\right)^{p}$$

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} x^{6-p} . \frac{1}{x^{p}}$$

$$T_{p+1} = \binom{6}{p} .x^{6-2p}.$$

O termo independente de x é o termo em x^0. Então para que o expoente de x seja 0, devemos ter:

$6 - 2p = 0 \rightarrow p = 3$

Assim, nesse caso, para obter o termo independente basta fazer p = 3.

$$T_{3+1} = \binom{6}{3} x^{6-2.3}.$$

$$T_4 = 20 \rightarrow T_4 = 20$$

Resposta: 20

Resolução do Exercício 2: [C]

O termo geral de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^6}\right)^8$ é dado por:

$$\binom{8}{p} \cdot \left(x^2\right)^p \cdot \left(x^{-6}\right)^{8-p}$$

$$\binom{8}{p} \cdot x^{2p} \cdot x^{-48+6p}$$

$$\binom{8}{p} \cdot x^{8p-48}$$

Fazendo $8p - 48 = 0,$

$p = 6$

Daí, o termo independente de x na expansão binomial $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^6}\right)^8$ é:

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\cdot 2!}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{8}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\binom{8}{6} = 28$$

Resolução do Exercício 3: [A]

Termo geral do binômio:

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} \left(x^2\right)^{9-p} \left(\frac{2}{x}\right)^{p}$$

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} x^{18-2p} . \frac{2^p}{x^p}$$

$$T_{p+1} = \binom{9}{p} x^{18-3p} . 2^p$$

O termo que independe de x é tal que:

$18 - 3p = 0$

$p = 6$

Logo:

$$T_{6+1} = \binom{9}{6} x^0 . 2^6$$

$$T_7 = \frac{9!}{6!3!} \cdot 64$$

$$T_7 = 84 \cdot 64$$

$$\therefore T_7 = 5376$$

Resolução do Exercício 4: [A]

$$\left(\frac{2}{x}+x^2\right)^4=\binom{4}{p}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{4-p}\cdot\left(x^2\right)^p$$

$$\left(\frac{2}{x}+x^2\right)^4=\binom{4}{p}.2^{4-p}.x^{3p-4}$$

Devemos ter:

$3p-4=2\Rightarrow p=2$

Logo:

$$\binom{4}{2}.2^{4-2}.x^{3.2-4}=$$

$24x^2$

O coeficiente do termo em x^2 é 24.

Resolução do Exercício 5: [E]

$$\binom{7}{p}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{7-p}\cdot\left(x^3\right)^p=\binom{7}{p}.2^{7-p}.x^{4p-7}$$

Como o expoente de x é 5, temos $4p-7=5,$ isto é p = 3. Fazendo, agora, p = 3, temos:

$$\binom{7}{3}\cdot 2^{7-3}\cdot x^{4\cdot 3-7}=35\cdot 16\cdot x^5=560x^5.$$

Portanto, o coeficiente pedido é 560.

Resolução do Exercício 6: [A]

Do termo geral do binômio de Newton, obtemos:

$$T_{p+1}=\binom{16}{p}\left(\frac{1}{x}\right)^{16-p}\left(\sqrt[3]{x}\right)^p=\binom{16}{p}\frac{x^{\frac{p}{3}}}{x^{16-p}}=\binom{16}{p}x^{\frac{4p}{3}-16}$$

Coeficiente de x^4:

$$\frac{4p}{3}-16=4\Rightarrow p=15$$

$$\binom{16}{15}=\frac{16!}{15!}=16$$

Termo independente de x:

$$\frac{4p}{3}-16=0\Rightarrow p=12$$

$$\binom{16}{12}=\frac{16!}{12!4!}=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{4\cdot 3\cdot 2}=1820$$

Portanto, a soma pedida vale:

$16+1820=1836$

Resolução do Exercício 7: [45]

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{10}=\binom{10}{p}.\left(\sqrt{x}\right)^{10-p}.\left(\frac{1}{x}\right)^p$$

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{10}=\binom{10}{p}.x^{\frac{10-p}{2}}.x^{-p}$$

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{10}=\binom{10}{p}.x^{\frac{10-3p}{2}}$$

Devemos ter $\dfrac{10-3p}{2}=2\Rightarrow p=2$

Logo:

$$\binom{10}{2}.x^{\frac{10-3.2}{2}}=$$

$=45x^2$

Resolução do Exercício 8: [03]

Tem-se que

$$\binom{9}{m}=\binom{10}{7}-\binom{9}{6}\Rightarrow\binom{9}{m}=\binom{9}{6}+\binom{9}{7}-\binom{9}{6}$$

$$\Rightarrow\binom{9}{m}=\binom{9}{7}$$

$$\Rightarrow m=7 \text{ ou } m=2.$$

Logo, vem m = 2.

Ademais, segue que

$$12n=C_{10,3}-\frac{A_{8,3}}{7}\Leftrightarrow 12n=\frac{10!}{3!\cdot 7!}-\frac{1}{7}\cdot\frac{8!}{5!}$$

$$\Leftrightarrow 12n=120-48$$

$$\Leftrightarrow n=6.$$

Em consequência, temos

$$\left(mx+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n=\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6,$$

cujo termo geral é

$$T_{p+1}=\binom{6}{p}.(2x)^{6-p}.\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p$$

$$=\binom{6}{p}.2^{6-p}.x^{6-p}.x^{-\frac{p}{2}}$$

$$=\binom{6}{p}.2^{6-p}.x^{6-\frac{3p}{2}}.$$

[01] Verdadeira. De fato, pois

$$T_4 = \binom{6}{3} \cdot (2x)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$$
$$= \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 8x^3 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}}$$
$$= 160x\sqrt{x}.$$

Logo, o coeficiente do termo médio é 160.

[02] Verdadeira. Com efeito, pondo $6 - \frac{3p}{2} = 0,$ encontramos $p = 4.$ Desse modo, o quinto termo do binômio é independente de x.

[04] Falsa. Pondo $x = 1,$ vem $\left(2 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right)^6 = 3^6 = 729 \neq 64.$

[08] Falsa. Conforme [02], há somente um termo independente de x.

[16] Falsa. O desenvolvimento do binômio possui $n+1 = 7$ termos.

Resolução do Exercício 9: [B]

Sendo

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p},$$

o termo geral de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3$, e

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot (x^2)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^q = \binom{3}{q} \cdot 2^{-q} \cdot x^{6-3q},$$

o termo geral de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$, e

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{p} \cdot \binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}.$$

Logo, deve-se ter $p + q = 1,$ o que implica em $(p, q) = (0, 1)$ ou $(p, q) = (1, 0).$ Em consequência, a resposta é

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2^2 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot 2^2 = 24.$$

Resolução do Exercício 10: [B]

Do enunciado,
a = 2b

O termo geral de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é:

$$\binom{12}{p}.(ax)^{12-p}.\left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^p$$

$$\binom{12}{p}.a^{12-p}.x^{12-p}.\frac{(-b)^p}{x^{\frac{p}{2}}}$$

$$\binom{12}{p}.a^{12-p}.(-b)^p.x^{\frac{24-3p}{2}}$$

O termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é obtido tomando-se $\frac{24-3p}{2} = 0,$ ou seja, $p = 8.$

Daí,

$$7920 = \binom{12}{8} \cdot a^4 \cdot (-b)^8$$

$$7920 = 495 \cdot a^4 \cdot b^8$$

Mas, a = 2b
logo,

$$16 = (2b)^4 \cdot b^8$$
$$16 = 2^4 \cdot b^4 \cdot b^8$$
$$b^{12} = 1$$

Como b é positivo,
$b = 1$

De a = 2b e $b = 1,$
a = 2.

Assim,
a + b = 3